

KSZTAŁT RÓWNANIA RÓŻNICZKOWEGO CZĄSTKOWEGO ROZWIĄZUJĄCEGO KLASĘ POWŁOK PROSTOKREŚLNYCH ROZWIJALNYCH

STANISŁAW BIELAK (GLIWICE)

1. Wstęp

Podawane w literaturze technicznej równania rozwiązujące powłoki dotyczą jedynie powłok walcowych i stożkowych, których powierzchnie środkowe są utworzone przez proste przecinające okręgi pod kątem prostym, na przykład [2, 3]. Równania różniczkowe cząstkowe, rozwiązujące te powłoki, posiadają różną budowę, zarówno w odniesieniu do ich rzędu, jak i kształtu niektórych członów. Występujące różnice w rozpatrywanych równaniach rozwiązujących tego samego rzędu uwidaczniają się w kształcie członów wewnętrznych tych równań, to znaczy członów zawierających niższe pochodne cząstkowe od stopnia określającego rząd równania różniczkowego z jednej strony i wyższe pochodne cząstkowe od wyrazu skrajnego prawego o najniższej pochodnej, z drugiej strony.

Przeprowadzona analiza wykazała, że o ile różnica dotycząca rzędu równania ma swoje uzasadnienie we wprowadzonych przez poszczególnych badaczy założeniach upraszczających, to kształt członów wewnętrznych równania rozwiązującego zależy od sposobu przeprowadzania rachunku i odrzucania w trakcie rugowania zmiennych wielkości małych wyższego rzędu. Mała stabilność kształtu członów wewnętrznych równania rozwiązującego nasunęła wniosek, że członowie te nie mają istotnego wpływu na rozwiązania w ramach teorii uproszczonej.

Treścią pracy będzie między innymi wykazanie słuszności wysuniętego wniosku dającego istotne uproszczenie równania różniczkowego cząstkowego rozwiązującego klasę powłok prostokreślnych rozwijalnych. Problem ten nabiera szczególnego znaczenia w numerycznym sposobie rozwiązania, prowadzonym przy użyciu maszyn cyfrowych, a tylko taki możemy brać pod uwagę, bo jak się okazuje, źle pojęta dokładność prowadząca do równań rozwiązujących niestabilnych daje w niektórych przypadkach macierz rozwiązującą równanie różniczkowe, która jest macierzą osobliwą z uwagi na występujące «zera maszynowe». Rozwiązanie numeryczne równania różniczkowego niestabilnego, przy użyciu określonej maszyny cyfrowej, staje się więc czasem niemożliwe.

Odrzucenie w równaniu różniczkowym rozwiązującym członów mało stabilnych, nie mających istotnego wpływu na wyniki, prowadzi do równania różniczkowego stabilnego, dającego rozwiązanie numerycznie poprawne również w tych przypadkach, gdzie uprzednio było to niemożliwe.

2. Ogólny układ równań

Ogólny układ równań powłok prostokreślnych rozwijalnych, podany w tym rozdziale, jest napisany dla parametryzacji naturalnej w oparciu o pracę [1].

2.1. Opis geometryczny powierzchni środkowej powłoki. Równanie wektorowe powierzchni prostokreślnej

$$(2.1) \quad \vec{r} = \vec{p}(u^2) + u^1 \vec{l}(u^2),$$

u^1, u^2 — współrzędne krzywoliniowe na powierzchni; u^1 określa położenie punktu na tworzącej, u^2 wskazuje tworzącą, na której leży punkt.

Współczynniki pierwszej i drugiej formy różniczkowej oraz ich wyróżniki

$$(2.2) \quad \begin{aligned} g_{11} &= 1, \\ g_{12} &= g_{21} = \sqrt{g_{22}} \vec{t} \vec{l}, \\ g_{22} &= |\vec{p}_2 + u^1 \vec{l}_2|^2 \\ g &= g_{22} [1 - (\vec{l} \vec{l})^2], \\ b_{11} &= 0, \\ b_{12} &= b_{21} = 0, \\ b_{22} &= g_{22} \kappa \vec{n} \vec{m}, \\ b &= 0. \end{aligned}$$

2.2. Związki geometryczne powłoki. Współczynniki pierwszej i drugiej formy różniczkowej powierzchni odkształconej

$$(2.3) \quad \begin{aligned} g_{ij}^* &= g_{ij} + 2\gamma_{ij}, \\ b_{ij}^* &= b_{ij} + 2\varrho_{ij}. \end{aligned}$$

Związek składowych przemieszczenia z tensorem odkształcenia błonowego

$$(2.4) \quad \gamma_{ij} = \frac{1}{2} (w_{|j}^k g_{ik} + w_{|i}^k g_{jk}) - w^3 b_{ij}.$$

2.3. Związki fizyczne. Związki fizyczne wiążące naprężenia z odkształceniami, dla wersji uproszczonej mogą być zadane w postaci

$$(2.5) \quad \begin{aligned} N^{ij} &= \bar{N}^{ij} + 6H \hat{M}^{ij}, \\ M^{ij} &= \hat{M}^{ij} + \xi h^2 H \bar{N}^{ij}, \end{aligned}$$

gdzie

$$(2.6) \quad \begin{aligned} \bar{N}^{ij} &= \frac{2Eh}{1-\nu^2} [(1-\nu)\gamma^{ij} + \nu g^{ij} A], \\ \hat{M}^{ij} &= -\frac{4Eh^3}{3(1-\nu^2)} [(1-\nu)\varrho^{ij} + \nu g^{ij} B] \end{aligned}$$

oraz ξ — parametr stały.

Niezmienniki A i B występujące w (2.6) są sumami

$$(2.7) \quad \begin{aligned} A &= g^{ij} \gamma_{ij}, \\ B &= g^{ij} \varrho_{ij}. \end{aligned}$$

2.4. Równania równowagi. Układ równań równowagi dla powłok w zapisie tensorowym:

$$(2.8) \quad \begin{aligned} N^{ij}|_i - Q^i b_i^j + P^j &= 0, \\ N^{ij} b_{ij} + Q^j|_j + P^3 &= 0, \\ M^{ij}|_i - Q_i^j &= 0. \end{aligned}$$

Przejdźcie do współrzędnych fizycznych, to znaczy odniesionych do bazy jednostkowej, wygląda następująco:

$$(2.9) \quad \begin{aligned} \bar{N}_{ij} &= \sqrt{\frac{g_{jj}}{g^{ii}}} N_{ij}^{\bar{ij}}, & \bar{Q}_i &= \sqrt{\frac{1}{g^{ii}}} Q^i, \\ \bar{M}_{i1} &= -\sqrt{\frac{g g^{11}}{g^{ii}}} M_i^{12}, & \bar{M}_{i2} &= \sqrt{\frac{g g^{22}}{g^{ii}}} M^{i1}, \\ \bar{P}_i &= \sqrt{g_{ii}} P^i, & \bar{P}_3 &= P^3. \end{aligned}$$

Uwaga: po i, j nie sumować.

Symbol „ $\bar{\quad}$ ” oznacza współrzędną fizyczną.

2.5. Równania nierozdzielności. Równania nierozdzielności dla wersji uproszczonej, przy założeniu $2hH \ll 1$ — ($2hH$ małe w porównaniu z jednością) — przyjmują postać:

$$(2.10) \quad \begin{aligned} \varrho_{11}|_2 - \varrho_{12}|_1 &= 0, \\ \varrho_{22}|_1 - \varrho_{21}|_2 &= 0, \\ 2b\bar{b}^{ij} &= 2\gamma_{12}|_{12} - \gamma_{11}|_{22} - \gamma_{22}|_{11}. \end{aligned}$$

3. Rozwiązanie ogólnego układu równań

Jeśli do pierwszych dwóch równań układu (2.8) podstawimy N^{ij} z (2.5), to wówczas otrzymamy

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \bar{N}^{ij}|_i + \bar{P}^j &= 0, \\ \bar{N}^{ij} b_{ij} + \bar{P}^3 &= 0. \end{aligned}$$

Występujące w (3.1) wielkości \bar{P}^j, \bar{P}^3 są funkcjami obciążeń, wymuszającymi stan błonowy, jeśli układ równań równowagi (3.1) potraktujemy jako układ równań stanu błonowego. Wyjaśnienie takiego postępowania zostało podane w pracy [1]. Funkcje \bar{P}^j, \bar{P}^3 opisują wzory:

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \bar{P}^j &= 6(H\hat{M}^{ij})|_i - Q^i b_i^j + P^j, \\ \bar{P}^3 &= 6H\hat{M}^{ij} b_{ij} + Q^j|_j + P^3. \end{aligned}$$

Rozpisany układ równań (3.1) dla powłok prostokreślnych — rozwijalnych, przyjmuje postać

$$(3.3) \quad \begin{aligned} \bar{N}^{11}|_1 + \bar{N}^{12}|_2 + \bar{P}^1 &= 0, \\ \bar{N}^{12}|_1 + \bar{N}^{22}|_2 + \bar{P}^2 &= 0, \\ \bar{N}^{22}b_{22} + \bar{P}^3 &= 0. \end{aligned}$$

Z trzeciego równania układu (3.3) obliczymy \bar{N}^{22} ;

$$(3.4) \quad \bar{N}^{22} = -\frac{\bar{P}^3}{b_{22}},$$

a następnie podstawimy (3.4) do drugiego równania (3.3) i wyznaczmy

$$(3.5) \quad \bar{N}^{12}|_1 = \left(\frac{\bar{P}^3}{b_{22}} \right) \Big|_2 - \bar{P}^2.$$

Rugując z pierwszych dwóch równań (3.3) wielkość \bar{N}^{12} otrzymamy

$$\bar{N}^{11}|_{11} - \bar{N}^{22}|_{22} + \bar{P}^1|_1 - \bar{P}^2|_2 = 0,$$

skąd po wykorzystaniu (3.4) uzyskamy

$$(3.6) \quad \bar{N}^{11}|_{11} = -\left(\frac{\bar{P}^3}{b_{22}} \right) \Big|_{22} - \bar{P}^1|_1 + \bar{P}^2|_2.$$

Zróżniczkujmy kowariantnie wyrażenia (3.4) i (3.5) względem zmiennej u^1 , pierwsze dwukrotnie, a drugie jednokrotnie, a następnie utwórzmy sumę

$$(3.7) \quad (g_{ij}\bar{N}^{ij})|_{11} = -gg^{ij}\left(\frac{\bar{P}^3}{b_{22}} \right) \Big|_{ij} - 2g_{1k}\bar{P}^k|_1 + \bar{P}^j|_j.$$

Sumę $g_{ij}\bar{N}^{ij}$ możemy obliczyć z pierwszego wyrażenia (2.6)

$$(3.8) \quad g_{ij}\bar{N}^{ij} = \frac{2Eh}{1-\nu}A,$$

a wówczas wyrażenie (3.7) przyjmie postać

$$(3.7') \quad \frac{2Eh}{1-\nu}A|_{11} = -gg^{ij}\left(\frac{\bar{P}^3}{b_{22}} \right) \Big|_{ij} - 2g_{1k}\bar{P}^k|_1 + \bar{P}^j|_j.$$

Zróżniczkujmy kowariantnie pierwsze równanie (3.1) względem u^j

$$(3.9) \quad \bar{N}^{ij}|_{ij} + \bar{P}^j|_j = 0.$$

Obliczone odpowiednie pochodne kowariantne tensora kontrawariantnego γ^{ij} , uzyskane-go z (2.4), przy wykorzystaniu zależności [1];

$$(3.10) \quad A = w_{\square}^k|_k - 2Hw^3,$$

podstawione do pierwszego związku (2.5), dadzą

$$\bar{N}^{ij}|_{ij} = \frac{2Eh}{1-\nu^2} \{ (1-\nu)[(2Hg^{ij} - b^{ij})w^3]|_{ij} + g^{ij}A|_{ij} \}$$

Podstawiając powyższe wyrażenie do (3.9), otrzymamy;

$$(3.9') \quad \frac{2Eh}{1-\nu^2} \{ (1-\nu)[(2Hg^{IJ}-b^{IJ})w^3]_{|ij} + g^{IJ}A_{|ij} \} + \bar{P}^J|_j = 0.$$

Jeśli teraz zróżniczkujemy kowariantnie powyższe równanie względem zmiennej u^1 , a następnie w miejsce $A_{|11}$ podstawimy (3.7'), to wówczas będzie:

$$(3.11) \quad -g^{ij} \left[g^{kl} g \left(\frac{\bar{P}^3}{b_{22}} \right) \right]_{|kl} + 2g_{1k} \bar{P}^k|_1 - \bar{P}^k|_k \Big|_{ij} + \{ 2Eh[(2Hg^{IJ}-b^{IJ})w^3]_{|ij} + (1+\nu)\bar{P}^J|_j \}_{|11} = 0.$$

Występujące w (3.11) funkcje \bar{P}^J , \bar{P}^3 , jak to zostanie wykazane, są funkcjami zależnymi od zadanych obciążeń P^J , P^3 i tylko przemieszczenia w^3 . Tak więc równanie (3.11) jest równaniem różniczkowym zawierającym jedynie niewiadomą funkcję w^3 , czyli jest równaniem rozwiązującym klasę powłok prostokreślnych — rozwijalnych.

Pierwsze dwa równania nierozdzielności będą spełnione, jeśli przyjmiemy

$$\varrho_{ij} = \Phi|_{ij},$$

gdzie $\Phi = \Phi(u^1, u^2)$ jest funkcją zmiennych u^1, u^2 .

Wychodząc ze związku tensora ϱ_{ij} z przemieszczeniami w^i, w^3 — patrz praca [1], możemy powyższą równość, w ramach uproszczonej teorii, zastąpić związkiem

$$(3.12) \quad \varrho_{ij} = \frac{1}{2} w^3|_{ij}.$$

Wtedy momenty \hat{M}^{ij} opisane wyrażeniem (2.6) będą równe

$$(3.13) \quad \hat{M}^{ij} = -\frac{2Eh^2}{3(1-\nu^2)} [(1-\nu)g^{ij}g^{JK}w^3|_{ik} + \nu g^{ij}W],$$

gdzie

$$(3.14) \quad W = 2B = g^{ij}w^3|_{ij}.$$

Podstawiając do trzeciego równania (2.8) drugi związek (2.5) z obliczonymi pochodnymi kowariantnymi w oparciu o wyrażenia (3.13) i (3.14) uzyskamy

$$(3.15) \quad Q^J = -\frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)} g^{IJ}W|_i + \xi h^2 (H\bar{N}^{IJ})|_i.$$

Mając \hat{M}^{ij} i Q^J określone wyrażeniem (3.13) i (3.15), możemy po odrzuceniu wielkości małej rzędu wyższego występującej w (3.15) opisać funkcje obciążeń wymuszających (3.2) za pomocą funkcji w^3

$$(3.2') \quad \bar{P}^J = 6H|_i \hat{M}^{ij} - \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)} (6Hg^{IJ}-b^{IJ})W|_i + P^J,$$

$$\bar{P}^3 = 6H\hat{M}^{ij}b_{ij} - \frac{2Eh^2}{3(1-\nu^2)} g^{ij}W|_{ij} + P^3.$$

Korzystając z (3.9) wprowadzimy dalsze uproszczenia w równaniach (3.7') i (3.11), bo dla celów porównawczych, określających rząd wielkości, można przyjąć w oparciu o równanie (3.9'), że: $\frac{3}{h^2}W$ jest porównywalne z $g^{ij}W|_{ij}$, natomiast W odniesione do

$g^{ij}W|_{ij}$ jest wielkością małą rzędu wyższego dla powłok cienkich spełniających warunek $2hH \ll 1$.

Dowód wysuniętego stwierdzenia o pomijalności pewnych wyrazów jako wielkości małych wyższego rzędu można przeprowadzić następująco: wielkość $\frac{3}{h^2}W$ jest porównywalna z wielkością $g^{ij}W|_{ij}$ z założenia, gdyż obie wielkości są tego samego rzędu, czyli możemy napisać

$$g^{ij}W|_{ij} = \frac{3}{h^2}W.$$

Powyższa równość jest słuszna jedynie dla określenia rzędu wielkości W i dlatego nie można się nią posłużyć do wyznaczenia samej wielkości W .

Utwórzmy wyrażenie

$$F = g^{ij}W|_{ij} \pm W,$$

w którym następnie człon $g^{ij}W|_{ij}$ zastąpimy wielkością $\frac{3}{h^2}W$ na podstawie pierwszej równości, czyli otrzymamy

$$F = \left(\frac{3}{h^2} \pm 1 \right) W.$$

Dla powłok cienkich wielkość $\frac{3}{h^2}$ jest wielkością dużą rzędu wyższego w stosunku do 1, bo na przykład dla powłoki żelbetowej o grubości $2h = 0,2$ m, będzie $\frac{3}{h^2} = 300$, a dla powłoki stalowej o grubości $2h = 0,02$ m, będzie $\frac{3}{h^2} = 30\,000$.

W ramach liniowej teorii, pomijając wielkości małe wyższego rzędu, napiszemy

$$F = \frac{3}{h^2}W = g^{ij}W|_{ij},$$

czyli wielkość W odniesiona do $g^{ij}W|_{ij}$ jest wielkością małą wyższego rzędu, czego należało dowieść.

Procentowy błąd odrzucenia wyrazu małego, dla powłoki stosunkowo grubej, dla której $\frac{3}{h^2} = 300$, nie przekracza więc 0,5%.

Powyższe analityczne obliczenie błędu wynikającego z odrzucenia członów mało-stabilnych zostało potwierdzone numerycznie przeliczonymi przykładami. Przeliczona powłoka walcowa żelbetowa, dla której $h = 0,1$ m, wzorami ścisłymi i uproszczonymi, (patrz załączone tablice) wykazuje również różnice nie przekraczające 0,5%.

Wersja uproszczona równań (3.7') i (3.11) może więc przyjąć postać

$$(3.16) \quad \frac{2Eh}{1-\nu} A|_{11} = -gg^{ij} \left(\frac{P^3}{b_{22}} \right) \Big|_{ij} - 2g_{1k} P^k|_1 + P^j|_j, \\ -gg^{ij}g_{ik} \left(\frac{\bar{P}^3}{b_{22}} \right) \Big|_{kij} + 2Eh[(2Hg^{ij} - b^{ij})w^3]|_{11ij} = g^{ij}(2g_{1k}P^k|_1 - P^k|_k)|_{ij} - (1+\nu)P^j|_{j11}.$$

Jeśli do drugiego równania (3.16) wprowadzimy funkcję \bar{P}^3 z układu (3.2') z odrzuconym członem $6HM^ijb_{ij}$ jako wielkością małą w porównaniu z $g^{ij}W|_{ij}$, to wówczas otrzymamy następujące równanie różniczkowe cząstkowe rzędu ósmego, rozwiązujące powłoki prostokątne rozwijalne

$$(3.17) \quad g^{ij}g^{kl} \left(\frac{1}{b_{22}} g^{mn} W|_{mn} \right) \Big|_{kl ij} + \frac{3(1-\nu^2)}{gh^2} [(2Hg^{ij} - b^{ij})w^3]_{|ij} = \frac{3(1-\nu^2)}{2Eh^3g} P,$$

gdzie

$$P = gg^{ij}g^{kl} \left(\frac{P^3}{b_{22}} \right) \Big|_{kl ij} + g^{ij}(2g_{ik}P^k|_i - P^k|_k)_{ij} - (1+\nu)P^k|_{k11}.$$

Dla przykładu napiszemy równanie (3.17) dla powłoki walcowej, sparametryzowanej w układzie ortogonalnym naturalnym.

Jeśli a będzie promieniem walca, powierzchni środkowej powłoki, to jej wielkości geometryczne przyjęte z pracy [1] będą równe

$$(3.18) \quad \begin{aligned} g_{11} &= 1, & g_{12} &= g_{21} = 0, & g_{22} &= g = a^2, \\ b_{11} &= b_{12} = b_{21} = 0, & b_{22} &= a, & b &= 0, \\ 2H &= \frac{1}{a}, & \Gamma_{ij}^k &= 0. \end{aligned}$$

Pochodne kowariantne dla powłoki walcowej w parametryzacji naturalnej, przejdą w pochodne zwykłe, ponieważ symbole Christoffela drugiego rodzaju są równe zeru.

Równanie różniczkowe (3.17), rozwiązujące powłoki walcowe dowolnie obciążone i podparte, przyjmie postać

$$(3.19) \quad g^{ii}g^{jj}g^{kk}W_{,kkjjii} + \frac{3(1-\nu^2)}{(ah)^2} w_{,1111}^3 = \frac{3(1-\nu^2)}{2Eh^3a} P,$$

przecinek «,» oznacza pochodną zwykłą.

Osiowa symetria odkształceń, występująca przy obciążeniu i podparciu powłoki osiowo-symetrycznym, obniża rząd równania (3.19) i powoduje jego przejście w równanie zwyczajne rzędu czwartego

$$(3.20) \quad W_{,1111} + \frac{3(1-\nu^2)}{(ah)^2} W = \frac{3(1-\nu^2)}{2Eh^3a} \bar{P},$$

gdzie

$$W = w_{,11}^3; \quad \bar{P} = aP_{,11}^3 - \nu P_{,1}^1.$$

Dla porównania wpływu wprowadzonych do równań (3.7') i (3.11) uproszczeń, dających uproszczony układ równań (3.16) rozwiązujący powłoki prostokątne rozwijalne, zostanie przeliczony przykład liczbowy wzorami uproszczonymi i uściślonymi. W przykładzie rozpatrzona zostanie powłoka walcowa odkształcająca się osiowo-symetrycznie. Odpowiednikiem równania rozwiązującego uproszczonego (3.20), dla tego przykładu, będzie równanie różniczkowe uściślone otrzymane z (3.11), po wykorzystaniu odpowiednich wielkości geometrycznych (3.18). Równanie uściślone rozwiązujące powłoki walcowe, odkształcalne osiowo-symetrycznie, przyjmie kształt

$$(3.21) \quad W_{,1111} + \frac{1}{a^2} W_{,11} + \frac{3(1-\nu^2)}{(ah)^2} W = \frac{3(1-\nu^2)}{2Eh^3a} \bar{P}.$$

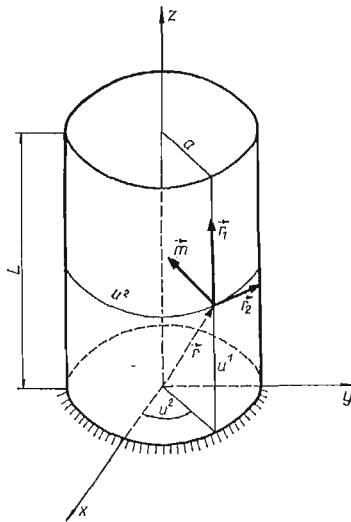
Inna droga postępowania podana w pracy [1] doprowadzi do równania rozwiązującego (3.21) różniącego się jedynie parametrem przy pochodnej wewnętrznej $W_{,11}$. Wprowadzając w równaniu (3.21) parametr λ jako wielkość zależną od sposobu upraszczania, to znaczy odrzucania wielkości małych wyższego rzędu w trakcie rugowania zmiennych, możemy ogólnie napisać

$$(3.22) \quad W_{,1111} + \frac{\lambda}{a^2} W_{,11} + \frac{3(1-\nu^2)}{(ah)^2} W = \frac{3(1-\nu^2)}{2Eh^3a} \bar{P}.$$

Niestabilność członu wewnętrznego, lewej strony równania (3.22), nasunęła przypuszczenie, że człon ten nie ma istotnego wpływu na rozwiązanie. Bliższe badanie tego zagadnienia pozwoliło wprowadzić uproszczenia, w ramach przedstawionej teorii, dające układ równań (3.16), z którego uzyskano równanie stabilne (3.17), rozwiązujące powłoki prostokątne rozwijalne.

4. Przykłady

Dana jest powłoka walcowa zamknięta o promieniu a i wysokości l (rys. 1), zamocowana u swej podstawy i obciążona parciem cieczy znajdującej się wewnątrz \vec{p} . Wielkości sił wewnętrznych i przemieszczeń występujących w powłoce, dla różnych rodzajów ma-



Rys. 1.

teriałów, z których są utworzone powłoki, i różnych sposobów obciążenia, wyznaczono wzorami podanymi w pracy [1]. Obliczenie przykładów liczbowych przeprowadzono w oparciu o program realizujący równanie różniczkowe (3.22) przy założeniu $\lambda = 0$, lub $\lambda \neq 0$. Podane w tablicach wyniki uwzględniają $\lambda = 0$ i $\lambda = 1$ dla żelbetu.

Wydrukowane w nagłówkach tablic symbole oznaczają:

- $A = a$ promień walca,
- $H = h$ połowa grubości powłoki,
- $NI = \nu$ współczynnik Poissona,

- E stała sprężystości,
- N obciążenie stałe brzegu górnego,
- $P1$ składowa obciążenia wzdłuż prostej tworzącej,
- $P3$ składowa obciążenia wzdłuż prostej normalnej,
- $M12$ moment zginający w kierunku tworzącej,
- $M21$ moment zginający w kierunku łuku,
- $Q1$ siła tnąca działająca w kierunku normalnym do powłoki,
- $N11$ siła osiowa działająca w kierunku prostej tworzącej,
- $N22$ siła osiowa działająca w kierunku łuku,
- $W1$ przemieszczenie w kierunku tworzącej powłoki,
- $W3$ przemieszczenie w kierunku normalnym do powłoki.

Tablice 1 i 2 podają wartości sił, momentów i przemieszczeń obliczone przy założeniu $\lambda = 1$, dla zbiorników napełnionych wodą o wymiarach: pierwszy o promieniu $A = 2,0$ m i wysokości $L = 50,0$ m i drugi o promieniu $A = 10,0$ m i wysokości $L = 20,0$ m.

Tablice 3 i 4 podają wartości poszczególnych wielkości fizycznych dla tych samych zbiorników przy założeniu $\lambda = 0$. Porównanie wyników obliczonych wzorami uściślonymi i uproszczonymi, potwierdza słuszność wprowadzonych uproszczeń, ponieważ odchyłki są bardzo małe i nie przekraczają 0,5% wartości uzyskanych wzorami uproszczonymi.

Literatura cytowana w tekście

1. St. BIELAK, *Ogólna teoria powłok prostokreślnych pracujących w stanie zgięciowym*, Politechnika Śląska, Budownictwo z. 33. Gliwice 1973.
2. В. М. ДАРИЕВСКИЙ, *Сборник статей, Прочность цилиндрических оболочек*, Москва 1959.
3. H. LUNDGREN, *Powłoki walcowe*, Arkady, 1963.

Tablica 1

DANE: $A = 200,00$ $H = 10,00$ $NI = 0,18$ $E = 2,10$ 5

$U1$ (cm)	$M12$ (KG cm/cm)	$M21$ (KG cm/cm)	$Q1$ (KG/cm)	$N11$ (KG/cm)	$N22$ (KG/cm)	$W1$ (cm)	$W3$ (cm)
0	5,812900	3	-2,393440	2	0,00	0,000000	0
10	3,662490	3	-1,909900	2	0,00	-5,431150	-3
20	1,982930	3	-1,456370	2	0,00	-3,908710	-5
30	7,324930	2	-1,054240	2	0,00	-1,174880	-2
40	-1,463070	2	-7,141280	1	0,00	-2,521080	-4
50	-7,174160	2	-4,387940	1	0,00	-4,416440	-4
60	-1,044630	3	-2,255700	1	0,00	-6,843480	-4
70	-1,187250	3	-6,837520	0	0,00	-9,746300	-4
80	-1,197420	3	4,071680	0	0,00	-1,305410	-3
90	-1,118980	3	1,103050	1	0,00	-1,669140	-3
100	-9,871600	2	1,488410	1	0,00	-2,058450	-3
200	6,132130	1	2,103280	0	0,00	-6,331390	-3
300	4,209530	1	-5,182610	-1	0,00	-1,042450	-2
400	2,637510	1	2,297650	-2	0,00	-1,440560	-2
500	2,795840	1	-1,351480	-3	0,00	-1,830580	-2
600	2,731280	1	-7,294090	-3	0,00	-2,212020	-2
700	2,665930	1	-6,144360	-3	0,00	-2,584870	-2
800	2,604390	1	-6,189830	-3	0,00	-2,949160	-2
900	2,542370	1	-6,203230	-3	0,00	-3,304870	-2
1000	2,480360	1	-6,200800	-3	0,00	-3,652020	-2
1500	2,170310	1	-6,200900	-3	0,00	-5,259160	-2
2000	1,860270	1	-6,200900	-3	0,00	-6,652020	-2
2500	1,550220	1	-6,200900	-3	0,00	-7,830590	-2
3000	1,240180	1	-6,200900	-3	0,00	-8,794870	-2
3500	9,301360	0	-6,200900	-3	0,00	-9,544870	-2
4000	6,200900	0	-6,200900	-3	0,00	-1,008050	-1
4500	3,100460	0	-6,200850	-3	0,00	-1,040200	-1
5000	0,000000	0	0,000000	0	0,00	-1,050910	-1
						0,000000	0

Tablica 2

DANE: $A = 1000,00$ $H = 10,00$ $NI = 0,18$ $E = 2,10^5$

$U1$ (cm)	$M12$ (KG cm/cm)	$M21$ (KG cm/cm)	$Q1$ (KG/cm)	$N11$ (KG/cm)	$N22$ (KG/cm)	$W1$ (cm)	$W3$ (cm)
0	1.110370	4	-2.105370	2	0.00	0.000000	0
10	9.097650	3	-1.907210	2	0.00	-2.195200	-3.600340
20	7.288070	3	-1.712780	2	0.00	-1.673790	-1.349970
30	5.670040	3	-1.524460	2	0.00	-5.382020	-2.844690
40	4.236460	3	-1.344160	2	0.00	-1.215010	-4.732310
50	2.978560	3	-1.173320	2	0.00	-2.259430	-6.913650
60	1.886300	3	-1.013010	2	0.00	-3.716310	-9.301690
70	9.487770	2	-8.639550	1	0.00	-5.615880	-1.182080
80	1.545010	2	-7.265630	1	0.00	-7.975760	-1.440610
90	-5.082970	2	-6.010100	1	0.00	-1.080270	-1.700260
100	-1.051450	3	-4.872550	1	0.00	-1.409460	-1.956430
200	-2.254290	3	9.968860	0	0.00	-6.830080	-3.808900
300	-9.070600	2	1.248760	1	0.00	-1.422770	-4.225490
400	-7.128810	1	4.403490	0	0.00	-2.164710	-3.970260
500	1.156340	2	1.296910	-1	0.00	-2.847300	-3.620320
600	7.250670	1	-6.391350	-1	0.00	-3.471990	-3.331320
700	2.182200	1	-3.311020	-1	0.00	-4.049230	-3.086530
800	3.933340	0	-6.174180	-2	0.00	-4.583790	-2.853280
900	2.961220	0	1.860940	-2	0.00	-5.076300	-2.618570
1000	4.906040	0	1.448320	-2	0.00	-5.526320	-2.381330
1500	3.098880	0	-6.195960	-3	0.00	-7.133550	-1.190470
2000	0.000000	0	0.000000	0	0.00	-7.669240	0.000000

Tablica 3

D A N E: $A = 200,00$ $H = 10,00$ $NI = 0,18$ $E = 2,10$ 5

$U1$ (cm)	$M12$ (KG cm/cm)	$M21$ (KG cm/cm)	$Q1$ (KG/cm)	$N11$ (KG/cm)	$N22$ (KG/cm)	$W1$ (cm)	$W3$ (cm)				
0	5.812490	3	-1.046240	3	-2.410930	2	0.00	1.569370	1	0.000000	0
10	3.650900	3	-6.632710	2	-1.915660	2	0.00	4.659970	1	-5.426880	-3
20	1.969430	3	-3.756400	2	-1.455120	2	0.00	1.324880	2	-3.903210	-5
30	7.222440	2	-1.710220	2	-1.049480	2	0.00	2.486750	2	-1.182790	-4
40	-1.511070	2	-3.549900	1	-7.083050	1	0.00	3.767220	2	-2.515040	-4
50	-7.165230	2	4.492740	1	-4.335210	1	0.00	5.036060	2	-4.404220	-4
60	-1.038960	3	8.334020	1	-2.214660	1	0.00	6.207870	2	-6.822510	-4
70	-1.178250	3	9.130920	1	-6.584670	0	0.00	7.232870	2	-9.714220	-4
80	-1.186680	3	7.860170	1	4.170400	0	0.00	8.088290	2	-1.300910	-3
90	-1.107930	3	5.311470	1	1.099880	1	0.00	8.770790	2	-1.663210	-3
100	-9.769380	2	2.096010	1	1.475530	1	0.00	9.290180	2	-2.051020	-3
200	5.763100	1	-1.740750	2	2.106100	0	0.00	9.848210	2	-6.315220	-3
300	4.203360	1	-1.639230	2	-4.980360	-1	0.00	9.406060	2	-1.040910	-2
400	2.652580	1	-1.580850	2	-1.885980	-2	0.00	9.222340	2	-1.439040	-2
500	2.793640	1	-1.550360	2	-1.284250	-3	0.00	9.023710	2	-1.829050	-2
600	2.731230	1	-1.515820	2	-7.195820	-3	0.00	8.822700	2	-2.210490	-2
700	2.665990	1	-1.481320	2	-6.160590	-3	0.00	8.622210	2	-2.583340	-2
800	2.604380	1	-1.446870	2	-6.189710	-3	0.00	8.421700	2	-2.947630	-2
900	2.542370	1	-1.412420	2	-6.202900	-3	0.00	8.221180	2	-3.303340	-2
1000	2.480360	1	-1.377970	2	-6.200850	-3	0.00	8.020660	2	-3.650490	-2
1500	2.170310	1	-1.205730	2	-6.200900	-3	0.00	7.018080	2	-5.257630	-2
2000	1.860270	1	-1.033480	2	-6.200900	-3	0.00	6.015500	2	-6.650490	-2
2500	1.550220	1	-8.612370	1	-6.200900	-3	0.00	5.012910	2	-7.829060	-2
3000	1.240180	1	-6.889890	1	-6.200900	-3	0.00	4.010330	2	-8.793340	-2
3500	9.301360	0	-5.167420	1	-6.200900	-3	0.00	3.007750	2	-9.543340	-2
4000	6.200900	0	-3.444940	1	-6.200900	-3	0.00	2.003160	2	-1.007900	-1
4500	3.100460	0	-1.722470	1	-6.200870	-3	0.00	1.002580	2	-1.040040	-1
5000	0.000000	0	0.000000	0	0.000000	0	0.00	0.000000	0	-1.050760	-1

Tablica 4

DANE: $A = 1000,00$ $H = 10,00$ $NI = 0,18$ $E = 2,10$ 5

$U1$ (cm)	$M12$ (KG cm/cm)	$M21$ (KG cm/cm)	$Q1$ (KG/cm)	$N11$ (KG/cm)	$N22$ (KG/cm)	$W1$ (cm)	$W3$ (cm)
0	1.110280	4	-2.108210	2	0.00	0.000000	0
10	9.094400	3	-1.909040	2	0.00	-2.194880	-3.599720
20	7.283410	3	-1.713790	2	0.00	-1.673430	-2.843750
30	5.664710	3	-1.524820	2	0.00	-5.380560	-2.843750
40	4.231030	3	-1.344020	2	0.00	-1.214620	-4.730400
50	2.973460	3	-1.172810	2	0.00	-2.258580	-6.910410
60	1.881850	3	-1.012250	2	0.00	-3.714720	-9.296760
70	9.451820	2	-8.630240	1	0.00	-5.613240	-1.181390
80	1.518860	2	-7.255440	1	0.00	-7.971670	-1.439690
90	-5.098770	2	-5.999670	1	0.00	-1.079670	-1.699100
100	-1.052000	3	-4.862380	1	0.00	-1.408630	-1.955020
200	-2.249870	3	9.962040	0	0.00	-6.824730	-3.805650
300	-9.057850	2	1.244950	1	0.00	-1.421680	-4.222950
400	-7.253600	1	4.393160	0	0.00	-2.163320	-3.969390
500	1.442400	2	1.370350	-1	0.00	-2.845850	-3.620410
600	7.211090	1	-6.320660	-1	0.00	-3.470580	-3.331580
700	2.188210	1	-3.289450	-1	0.00	-4.047860	-3.086660
800	4.054880	0	-6.216270	-2	0.00	-4.582430	-2.853300
900	3.015170	0	1.791630	-2	0.00	-5.074940	-2.618560
1000	4.910420	0	1.419870	-2	0.00	-5.524960	-2.381320
1500	3.099250	0	-6.199110	-3	0.00	-7.132190	-1.190470
2000	0.000000	0	0.000000	0	0.00	-7.667880	0.000000

Резюме

ВИД ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ РЕШАЮЩЕГО КЛАССА ЛИНЕЙЧАТЫХ РАЗВЕРТЫВАЮЩИХСЯ ОБОЛОЧЕК

В работе предпринята попытка сформулировать единое решение общей системы уравнений линейчатых развертывающихся оболочек, работающих при изгибающих напряжениях, выполненных из однородного изотропного материала. Принята математическая модель, описывающая работу оболочки при изгибе, основана на линейной теории оболочек отнесенной к среде Гука.

Приводимые в технической литературе решения, относятся лишь к цилиндрическим и коническим оболочкам, срединные поверхности которых образованы прямыми пересекающимися окружности под прямым углом, при чем дифференциальные уравнения, решающие эти оболочки, различны по строению, как в отношении их порядка, так и вида отдельных членов.

Проводимое в настоящей работе решение этого класса оболочек сведено к одному дифференциальному уравнению восьмого порядка в частных производных на неизвестную функцию перемещений w^3 . Полученным уравнение охватываются произвольного вида нагрузки и виды опирания оболочек.

Summary

THE PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATION SOLVING A CLASS OF RULED DEVELOPABLE SHELLS

An attempt is made to determine a uniform solution of the general system of equations governing the theory of bending of ruled developable shells made of isotropic material. The mathematical model assumed which describes the state of bending of shells is based on the linear shell theory referred to Hooke's medium.

The corresponding solutions quoted in the literature concern the cylindrical and conical shells in which the middle surfaces are generated by straight lines intersecting the circles at right angles; the corresponding differential equations have various forms, differing by their order and the form of individual terms.

The solution given in this paper is reduced to a single eighth order differential equation in the unknown displacement function w^3 . The differential equation applies to arbitrary loading and support conditions of the shell.

POLITECHNIKA ŚLĄSKA, GLIWICE

Praca została złożona w Redakcji dnia 16 sierpnia 1973 r.