MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
3, 12 (1974)

O MODELOWANIU WAŁU WIELOPODPOROWEGO Z WIELOMA TARCZAMI ZA POMOCĄ WIELKIEGO SYSTEMU BIOSCYLATORÓW

Część I. Uwagi ogólne. Oscylatory wielowskaźnikowe

ROBERT KRZYWIEC (WARSZAWA)

1. Wstęp

W literaturze technicznej istnieje wiele prac na temat dynamiki wałów obciążonych tarczami. Nie można jednak do tej pory zauważyć jednolitej koncepcji modelowania tych układów mechanicznych, ponieważ autorzy prac zajmują się raczej określonymi przypadkami szczególnymi zjawiska ruchu układów wirujących.

Praca niniejsza stanowi próbę ogólnego sformułowania równania (stanu) ruchu sprężystego wału wielopodporowego z wieloma tarczami. Stosuje się w tym celu następujące założenia.

1. Przyjęcie na ogół dowolnego sprężystego modelu konstrukcyjnego.
2. Traktowanie tego modelu jako systemu wielkiego.
3. Przedstawienie wielowskaźnikowego modelu algebraicznego.
4. Podanie równań (stanu) ruchu dyskretnego układu mechanicznego wielokrotnego dzięki wyprowadzeniu równań różniczkowych zwyczajnych wielociągowych opisujących badane zjawisko przy założeniach: (a) sześciu stopni swobody — trzech w ruchu postępowym i trzech w ruchu obrotowym, (b) dowolnej liczby naturalnej przekrojów podporowych wału, (c) — dowolnej liczby naturalnej przekrojów wału obciążonego tarczami, (d) — dowolnej liczby naturalnej przekrojów mas zredukowanych wału; (e) — małych ugięć konstrukcji, (f) — dopuszczenia dowolnej liczby naturalnej obciążeń konstrukcji za pomocą: (g) — sił o wartościach danych ciągami wielowskaźnikowymi, (h) — momentów sił o wartościach danych ciągami wielowskaźnikowymi, (i) — oraz przy uwzględnieniu wynikających z (a) sił i momentów sił oporów (tłumienia) ośrodka o wartościach danych ciągami wielowskaźnikowymi.

W taki sposób, zgodnie z wielociągowym prawem Hooke'a, został skonstruowany bioscylator wielowymiarowy wielowskaźnikowy, gdyż funkcja stanu ruchu rozważanego systemu wielkiego (wał, trzy rodzaje jego przekrojów ponumerowanych za pomocą wielowskaźnika i o parametrach podanych za pomocą ciągów wielowskaźnikowych) jest ciągiem wielowskaźnikowym funkcji określonych na zbiorze ciągów wielowskaźnikowych.

Stanowi on jednolity model fizykalno-matematyczny rozważanej konstrukcji, ponieważ: (1) — istnieje jej model fizykalny. (2) — istnieje model matematyczny (zarówno algebraiczny, jak i dany w postaci równań różniczkowych zwyczajnych wielociągowych)

Wykorzystano tutaj prace własne [1, 2] i przygotowaną do druku pracę pod tytułem *Uogólnione prawo wielowskaźnikowe dynamiki układów mechanicznych wielokrotnych jako systemów wielkich.*

Znając równania różniczkowe zwyczajne wielociągowe (ciągi wielowskaźnikowe równań) wielowymiarowego bioscylatora wielowskaźnikowego możemy także sformułować problem stabilności ruchu rozpatrywanej konstrukcji wielowskaźnikowej. Uczyniono to w pracy pod tytułem *O stabilności ruchu wału wielopodporowego z wieloma tarczami modelowanego za pomocą wielkiego systemu bioscylatorów* zreferowanej dnia 22.V.1970 r. na konferencji naukowej w Warszawie na temat «Zagadnienia stateczności w teorii układów dyskretnych».

Przyjęty model konstrukcji można zbadać na analogu elektrycznym, co wynika ze znanej analogii elektromechanicznej po uzasadnieniu jej w klasie równań bioscylatorów wielowskaźnikowych.

2. Uwagi o konstrukcji i jej elementach

Niech będą dane następujące elementy konstrukcyjne k_1 — łożyska (podpory), k_2 — wał oraz k_3 — tarcze, połączone ze sobą w pewien sposób (na wale tarcze, wał w łożyskach) i tworzące zbiór uporządkowany — ciąg jednowskaźnikowy elementów

$$\bar{k} = [k_1, k_2, k_3],$$

zwany konstrukcją $\bar{k}$.

2.1. Uwagi o geometrii k_j i konstrukcji $\bar{k}$. Wał jest na ogół (lecz niekoniecznie) walcem o długości skończonej. W sposób uproszczony przedstawiamy go schematycznie odcinkiem jako tworem jednowymiarowym. Przy założeniach: (1) małych krzywizn oraz (2) płaskich przekrojów poprzecznych otrzymujemy [4] linię ugięcia pręta w postaci równania różniczkowego zwyczajnego drugiego rzędu, liniowego i niejednorodnego, o współczynnikach stałych. Może ono też być słuszne w przypadkach (3) — prętów posiadających wymiary poprzeczne skończone, małe w porównaniu z długościami.

Tarcza jest wykuta wspólnie z wałem bądź osadzona na nim stanowiąc na ogół twór dwuwymiarowy — koło z wyciętym współśrodkowo kołem mniejszym o średnicy wału. Środek tarczy może pokrywać się ze środkiem przekroju wału lub nie. Tarcza może być prostopadła do osi wału lub nie.

Łożyska są płatami powierzchni walcowymi lub kulistymi. Wał styka się z nimi na pewnym płacie lub linii. Zakładamy dla uproszczenia, że styk ten jest punktowy.

2.2. Uwagi o konstrukcji $\bar{k}$ i jej elementach w układzie odniesienia. Ilość stopni swobody elementów. Konstrukcja $\bar{k}$ istnieje w przestrzeni euklidesowej trójwymiarowej. Przyjmujemy więc taki ortokartezjański układ odniesienia $(0, x_{11}, x_{21}, x_{31})$, aby można było w nim tę konstrukcję opisać.

Wał o długości $l = AB$ usytuowany jest tak, że punkt A stanowi początek 0 osi Ox_{11} (a tym samym początek układu odniesienia) stycznej do jego osi nieodkształconej, na której leży odcinek AB.

Linia ugięcia wału jest na ogół krzywą przestrzenną, ale często można przyjąć ją jako płaską. Wtedy jest ona interpretacją graficzną rozwiązania $y = y(x)$, czyli $x_{21} = x_{21}(x_{11})$ równania różniczkowego

$$P(x_{11}, x''_{21}(x_{11}), E, J) = 0,$$

gdzie E, J są pewnymi stałymi fizykalnymi.

Podpora pierwsza ma w stanie nieodkształconym współrzędne $A_0 = (0, 0, 0)_0 = A$. Podpora ta styka się z przekrojem początkowym wału. W dalszych rozważaniach przyjmiemy, że właśnie dzięki temu podpora może posiadać sześć stopni swobody opisanych ciągami współrzędnych niezależnych

$$\bar{x}_1 = [x_1, x_2, x_3]_1$$

o charakterze przemieszczeń wzdłuż osi przyjętego układu odniesienia, oraz ciągami współrzędnych

$$\bar{x}_2 = [x_1, x_2, x_3]_2$$

o charakterze obrotów dookoła osi przyjętego układu odniesienia.

Rozważania dotyczące konstrukcji $\bar{k}$ są różnie uproszczone z powodu zastąpienia ciągłej konstrukcji trójwymiarowej wyidealizowanym układem dyskretnym punktów, które mają przedstawiać trojaki charakter elementów k_j, $j = 1, 2, 3$, mianowicie:

1) punkty — podpory z przekrojami podporowymi, jako elementy sprężyste w przestrzeni trójwymiarowej posiadające sześć stopni swobody,

2) punkty — tarcze, jako elementy sprężyste w przestrzeni trójwymiarowej posiadające sześć stopni swobody,

3) punkty — masy zredukowane, jako elementy sprężyste w przestrzeni trójwymiarowej posiadające sześć stopni swobody.

Omówimy oddzielnie każdy element k_j konstrukcji $\bar{k}$. Mimo ich różnorodności przyjmiemy wspomniany wyżej jednolity schemat tak modelu elementów k_j, jak też konstrukcji $\bar{k}$ za pomocą bioscylatora wielowskaźnikowego. Pojęcie to wprowadzimy w dalszych rozważaniach i uogólnimy je korzystając z ciągów wielowskaźnikowych [1, 2].

Reasumując stwierdzamy, że chociaż wał w idealizacji za pomocą pręta jest tworem jednowymiarowym, to dzięki założeniu przekrojów płaskich (dwuwymiarowych) uwzględniamy w pewien sposób jego trójwymiarowość — chociaż przyjmujemy, że ma on wymiary poprzeczne małe w porównaniu z długością.

Jeśli nawet mówimy o płaskim przekroju podporowym jako o elemencie granicznym tworu trójwymiarowego, biorąc pod uwagę tylko jego środek geometryczny (później środek masy), to przez przyporządkowanie mu sześciu stopni swobody uwzględniamy w rozpatrywanych przekrojach wszystkie możliwe ruchy takiego elementu wału jako granicznej bryły elementarnej.

Idealizacja taka umożliwia zastąpienie ważkiego sprężystego wału trójwymiarowego ciągłego — układem dyskretnym wyróżnionych punktów, w których w taki sposób skupiamy masę wału, podpór, tarcz, ażeby ruch przyjętego w ten sposób modelu dyskretnego konstrukcji $\bar{k}$ (o masach skupionych wałów, tarcz, podpór — zredukowanych do punktów) z wystarczającym przybliżeniem aproksymował ruch układu rzeczywistego $\bar{k}$. Tym samym, zamiast równań różniczkowych cząstkowych opisujących drgania continuum punktów, mamy równania różniczkowe zwyczajne opisujące drgania wybranej ilości punktów przekrojowych poddanym utwierdzeniu na podporach lub obciążonych tarczami lub masami zredukowanymi pręta.

Nie będziemy się przy tym zajmowali redukcją masy wału do pewnych wybranych na nim punktów, ani też redukcją mas tarczy lub mas podpór. W dynamice elementów wirujących jest to problem najważniejszy. W literaturze technicznej istnieje dużo publikacji na ten temat, ale nie można stwierdzić, że istnieją zadowalające rozwiązania ogólne.

Chociaż więc nie zajmujemy się redukcją mas i momentów bezwładności konstrukcji $\bar{k}$, to postaramy się przedstawić tutaj propozycję formułowania dostatecznie ogólnego jej modelu dyskretnego.

1. Przyjmijmy, że wał jest podparty w n_3 przekrojach. Każda podpora (łożysko) posiada współrzędne

$$A_{q_3} = \Big[[[x_1, x_2, x_3]_1]_{q_3}\Big], \qquad q = 1, \dots, n_3,$$

gdzie n_3 — ilość podpór, przy czym

$$A_{n_3} = \Big[[[x_1, x_2, x_3]_1]_{n_3}\Big] = B.$$

O ilości stopni swobody każdej podpory (z odpowiednim przekrojem) przyjmujemy takie samo założenie, jak i w przypadku podpory pierwszej zapisanej symbolicznie w postaci $A = A_1$.

Tak więc każda podpora posiadająca masę skupioną w punkcie z odpowiednim przekrojem, jako elementarny twór trójwymiarowy o znikomych wymiarach poprzecznych i długości dążącej do zera, jest pod względem możliwości wykonywania ruchów scharakteryzowana:

1° — jednowskaźnikowym trójelementowym ciągiem stopni swobody wynikającym z możliwości zmian (o charakterze przemieszczeń wzdłuż osi układu odniesienia) jednowskaźnikowego ciągu współrzędnych — położeń

$$\begin{aligned}[{}^2\bar{x}_1]_1 &= \Big[[[x_1, x_2, x_3]_1]_1, \dots, [[x_1, x_2, x_3]_1]_{n_3}\Big]_1 = \\ &= \Big[[[x_{j_1}]_1]_{j_3}\Big]_1 = \Big[[[x_{j_1}]_{j_3}]_1\Big]_1, \quad j_1 = 1, 2, 3; \quad j_3 = 1, \dots, n_3;\end{aligned}$$

2° — jednowskaźnikowym trójelementowym ciągiem stopni swobody wynikającym z możliwości zmian (o charakterze obrotów dookoła osi układu odniesienia) ciągu współrzędnych — kątów

$$[{}^2\bar{x}_2]_1 = \Big[[[x_1, x_2, x_3]_2]_1, \dots, [[x_1, x_2, x_3]_2]_{n_3}\Big]_1 = \Big[[[x_{j_1}]_2]_{j_3}\Big]_1 = \Big[[[x_{j_1}]_{j_3}]_2\Big]_1.$$

W ten sposób n_3 — elementowy ciąg jednowskaźnikowy podpór jest scharakteryzowany ciągiem trójwskaźnikowym stopni swobody wynikającym z przyjęcia ciągu trójwskaźnikowego współrzędnych niezależnych

$${}^3\bar{x}_1 = [x_{j_1 j_2 j_3}]_1, \quad j_{q_1} = 1, \dots, n_{q_1}; \quad q_1 = 1, 2, 3$$

opisującego n_3 utwierdzonych przekrojów łożysk.

2. Załóżmy następnie, że na wale mamy n_4 tarcz, których środki znajdują się w odległościach

$$\bar{l} = [l_{j_4}] = [l_1, \dots, l_{n_4}]$$

od początku układu odniesienia przy założeniu wału jednowymiarowego. Środki tarcz O_{k_4}, $k_4 = 1, \dots, n_4$ na ogół nie pokrywają się ze środkami tych przekrojów wału, na których są one osadzone.

Oznaczmy współrzędne tych środków za pomocą ciągów dwuwskaźnikowych w sposób następujący:

$$O_{k_4} = [[x_1, x_2, x_3]_1]_{k_4}, \quad k_4 = 1, \ldots, n_4.$$

Gdy traktujemy tarczę jako wycinek (najczęściej pierścieniowy) płaszczyzny, to czynimy pewne uproszczenie. Działanie tarczy na wał uwzględnia się w ten sposób, że jej środek masy opisuje się na ogół dwiema wspórzędnymi, skąd wynikają równania ruchów postępowych. Tarcza posiada ponadto moment bezwładności względem osi obrotu, ewentualnie momenty bezwładności względem osi lokalnego układu odniesienia, co umożliwia rozważanie jej ruchów obrotowych.

Najczęściej przyjmuje się, że ruchy tarczy są płaskie, gdy jest ona nieodkształcalna i prostopadła do osi wału. Jest to bardzo optymistyczne założenie, z którego musimy zrezygnować przyjmując dowolne odchylenia (ale o małych kątach) początkowego usytuowania tarczy na wale.

W celu ujednolicenia i zachowania możliwej ogólności rozważań przyjmujemy, że każda tarcza (wraz z ewentualnym przekrojem wału, na którym jest zawieszona), jako elementarny twór trójwymiarowy o znikomych wymiarach poprzecznych[1)] i długości dążącej do zera jest (pod względem możliwości wykonywania ruchów) opisana podobnie do każdej podpory z odpowiadającym jej przekrojem, to znaczy przez:

1° n_4-elementowy ciąg jednowskaźnikowy trójelementowych ciągów jednowskaźnikowych położeń

$$[{}^2\overline{x}_1]_2 = \left[[[x_{j_1}]_1]_{j_4}\right]_2 = \left[[[x_{j_1}]_{j_4}]_1\right]_2, \quad j_1 = 1, 2, 3; \quad j_4 = 1, \ldots, n_4;$$

2° n_4-elementowy ciąg jednowskaźnikowy trójelementowych ciągów jednowskaźnikowych kątów

$$[{}^2\overline{x}_2]_2 = \left[[[x_{j_1}]_2]_{j_4}\right]_2 = \left[[[x_{j_1}]_{j_4}]_2\right]_2.$$

W ten sposób n_4-elementowy ciąg jednowskaźnikowy tarcz jest scharakteryzowany ciągiem trójwskaźnikowym stopni swobody wynikającym z przyjęcia ciągu trójwskaźnikowego współrzędnych niezależnych

$${}^3\overline{x}_2 = [x_{j_1 j_2 j_4}]_2, \quad j_{q_2} = 1, \ldots, n_{q_2}, \quad q_2 = 1, 2, 4$$

opisującego n_4 tarcz.

3. Przyjmijmy ponadto, że masa wału może być skupiona w n_5 jego przekrojach, przy czym nie będziemy zajmowali się realizacją «skupiania» — redukcji jego mas częściowych. Dodamy tylko, że masę wału można redukować do: (a) przekrojów podporowych, (b) przekrojów zawieszenia tarcz, (c) przekrojów innych.

Podobnie jak w rozważaniach poprzednich, także i tu przyjmujemy, że każdy przekrój, do którego redukujemy masę częściową wału jako elementarny twór trójwymiarowy o znikomych wymiarach poprzecznych i długości dążącej do zera, jest pod względem możliwości wykonywania ruchów opisany podobnie do każdej podpory z odpowiadającym jej przekrojem lub tarczy, to znaczy przez

[1)] Większych jednak od wymiarów poprzecznych przekroju wału.

1° n_5-elementowy ciąg jednowskaźnikowy trójelementowych ciągów jednowskaźnikowych położeń

$$[{}^2\overline{x}_1]_3 = \left[[[x_{j_1}]_1]_{j_5}\right]_3 = \left[[[x_{j_1}]_{j_5}]_1\right]_3, \quad j_1 = 1, 2, 3; \quad j_5 = 1, \ldots, n_5;$$

2° n_5-elementowy ciąg jednowskaźnikowy trójelementowych ciągów jednowskaźnikowych kątów

$$[{}^2\overline{x}_2]_3 = \left[[[x_{j_1}]_2]_{j_5}\right]_3 = \left[[[x_{j_1}]_{j_5}]_2\right]_3.$$

W ten sposób n_5-elementowy ciąg jednowskaźnikowy przekrojów, do których redukujemy masy częściowe wału, jest scharakteryzowany ciągiem trójwskaźnikowym współrzędnych niezależnych

$${}^3\overline{x}_3 = [x_{j_1 j_2 j_5}], \quad j_{q_3} = 1, \ldots, n_{q_3}; \quad q_3 = 1, 2, 3$$

opisujących n_5 mas.

Zauważmy, że korzystając z ciągów wielowskaźnikowych [1, 2] wszystkie trzy rodzaje przekrojów:

1) podporowych (z masami skupionymi podpór i ewentualnymi momentami bezwładności względem osi układu odniesienia),

2) osadzenia tarcz (z masami skupionymi tarcz i momentami bezwładności względem osi układu odniesienia),

3) mas zredukowanych (z masami częściowymi skupionymi i ewentualnymi momentami bezwładności względem osi układu odniesienia)

możemy opisać ciągiem czterowskaźnikowym współrzędnych niezależnych

$${}^4\overline{x} = [{}^3\overline{x}_1, {}^3\overline{x}_2, {}^3\overline{x}_3].$$

Pamiętamy jednak, że w każdym ciągu trójwskaźnikowym występuje inna liczba ciągów dwuwskaźnikowych: podpór, tarcz oraz mas zredukowanych.

2.3. Uwagi o własnościach fizykalnych tworzywa elementów k_j i konstrukcji $\overline{k}$ oraz o jej funkcji stanu. Każdy element k_q, $q = 1, 2, 3$ posiada pewną liczbę własności mechanicznych, na przykład jest izotropowy lub anizotropowy, ma przekrój stały lub zmienny, postać jednorodną (stałą) lub niejednorodną (zmienną), momenty bezwładności stałe lub zmienne, współczynniki sprężystości, współczynniki tłumienia, siły i momenty obciążające stałe lub zmienne.

Przypuśćmy, że u_1 tych własności zapisujemy ciągiem jednowskaźnikowym

$$\overline{w}_q = [w_1, \ldots, w_{u_1}] = [w_{i_1}], \quad i_1 = 1, \ldots, u_1,$$

przy czym zmieniają się one na ogół ze zmianą punktów p konstrukcji $\overline{k}$ i w czasie t, co zapisujemy symbolicznie $\overline{w}_q = \overline{w}_q(p, t)$, czyli

$${}^2\overline{w} = [w_{i_1 i_2}] = {}^2\overline{w}(p, t), \quad i_1 = 1, \ldots, u_1; \quad i_2 = 1, 2, 3,$$

gdzie p jest punktem przestrzeni trójwymiarowej $p = (x_1, x_2, x_3) = (\overline{x})$.
Można więc powiedzieć, że istnieje takie przekształcenie, które przeprowadza konstrukcję $\overline{k}$ w ciąg (tu dwuwskaźnikowy) zmiennych jej stanu $\overline{k} = \overline{k}({}^2\overline{w})$.

Jeśli przyjmiemy ortokartezjański układ odniesienia umożliwiający opis konstrukcji $\overline{k}$, to mamy $\overline{k} = \overline{k}(\overline{x}, t)$.

Konstrukcja $\bar{k}$ o własnościach $^2\bar{w}$ spełnia pewną liczbę u_3 praw fizyki F_{i_3}, gdzie

$$\bar{F} = [F_{i_3}] = F_1, \ldots, F_{u_3}].$$

Znaczy to, że dana jest rodzina przekształceń

$$\bar{F}[\bar{k}\{^2\bar{w}(\bar{x}, t)\}] = \bar{0} \quad \text{lub} \quad \bar{F}[^2\bar{w}(\bar{x}, t)] = \bar{0}$$

określona na zbiorach wielowymiarowych zmiennych $^2\bar{w}$, przy czym poszukujemy rozwiązań takich układów przekształceń ze względu na wyróżnione, interesujące nas cechy — własności mechaniczne. Ciąg jednowskaźnikowy $\bar{F}$ nazywamy funkcją stanu konstrukcji $\bar{k}$.

Zauważmy, że konstrukcja $\bar{k}$ tworzy układ — system w sensie sformalizowanym tego pojęcia [4]. Odpowiada mu układ — ciąg jednowskaźnikowy opisu przekształceń jako model matematyczny zjawiska.

2.4. Uwagi o sposobach opisu konstrukcji. Przekształcenie $\bar{F}$ w dynamice konstrukcji może mieć zasadniczo charakter dwojaki.

1° Jeśli badany układ wirujący posiada model dyskretny, to funkcja stanu zjawiska jest układem równań różniczkowych zwyczajnych:

$$\bar{F}(t, \bar{x}(t), \quad \dot{\bar{x}}(t), \quad \ddot{\bar{x}}(t), \quad \bar{w}(\bar{x}, t)) = \bar{0},$$

gdzie

$$\dot{\bar{x}} = \frac{d}{dt}\bar{x}(t), \qquad \ddot{\bar{x}} = \frac{d^2}{dt^2}\bar{x}(t)$$

są odpowiednio wektorami prędkości i przyspieszeń układu, zaś

$$\bar{w} = \bar{w}(\bar{x}, t)$$

przedstawia ciąg (tu jednowskaźnikowy) parametrów układu $\bar{k}$ zmiennych w czasie i przestrzeni, ale przy pewnych założeniach co do redukcji (skupienia) parametrów w określonych i wyróżnionych punktach konstrukcji.

Analogicznie do założenia ciągłości czasu przyjąć jednak należy ciągłość konstrukcji $\bar{k}$, czyli wału ważkiego obciążonego wieloma tarczami ciągłymi i podpartego w wielu łożyskach przy traktowaniu go jako układu mechanicznego trójwymiarowego ze względu na geometrię. Trzeba przy tym również poczynić założenia co do uproszczeń kształtu, wymiarów, własności konstrukcji itp., aby uzyskać jej model ciągły.

2° Jeśli badany układ wirujący posiada model ciągły, to funkcja stanu zjawiska jest układem równań różniczkowych cząstkowych postaci:

$$\bar{F}\left(t, \bar{w}(\bar{x}, t), \frac{\partial}{\partial \bar{x}}\bar{w}(\bar{x}, t), \frac{\partial}{\partial t}\bar{w}(\bar{x}, t), \ldots, \frac{\partial^n}{\partial \bar{x}^n}\bar{w}(\bar{x}, t), \frac{\partial^n}{\partial t^n}\bar{w}(\bar{x}, t)\right) = \bar{0},$$

gdzie $\bar{w}(\bar{x}, t)$ jest ciągiem (tu jednowskaźnikowym) funkcji parametrów charakteryzujących pod określonym względem stan konstrukcji w czasie i przestrzeni. W równaniu tym pominęliśmy niektóre pochodne zaznaczając tylko symbolicznie pochodne ciągu jednowskaźnikowego funkcji względem zmiennych $\bar{x}$ i oddzielnie pochodne względem czasu, aby odróżniać zmiany w przestrzeni geometrycznej od zmian w przestrzeni czasu.

2.5. Uwagi o numeracji wielowskaźnikowej zmiennych stanu i funkcji stanu zjawiska. Przyjmiemy jednolitą nazwę zmiennych stanu zjawiska dla zmiennych, parametrów i stałych, charakteryzujących (opisujących) stan zjawiska, gdzie przez stan rozumiemy wyróżniony podzbiór zbioru zmiennych.

Numeracja własności $\overline{w}$ i punktów $\overline{x}$ układu-konstrukcji $\overline{k}$ jako zmiennych stanu określonego zjawiska (na przykład ruchu) nie musi być dokonana tylko za pomocą ciągów jednowskaźnikowych. Często jest korzystniej, szczególnie w systemach wielkich (przede wszystkim ze względu na przejrzystość opisu zjawiska, czyli jego funkcji stanu), wprowadzić ciągi wielowskaźnikowe tak zmiennych stanu jak i funkcji stanu, a tym samym przyjąć model wielowskaźnikowy zjawiska.

Widzimy to na przykładzie modelu wielowskaźnikowego układu wirującego jako systemu wielkiego przekrojów podpartych, tarcz i mas skupionych. Przygotowujemy mianowicie jego opis wielowskaźnikowy w postaci oscylatora wielkiego charakteryzując elementy k_j konstrukcji $\overline{k}$ jednolicie za pomocą ciągu czterowskaźnikowego współrzędnych niezależnych ${}^4\overline{x}$. Należy przy tym podać ciągi stałych o podwójnej ilości wskaźników [1, 2], aby zdefiniować najprostsze przekształcenie liniowe (tu czteroliniowe, zgodnie z pracą [1, 2]) jako funkcję stanu zjawiska.

Dla napisania natomiast równania dynamiki musimy wprowadzić [1, 2] równanie różniczkowe zwyczajne wielowskaźnikowe:

$$ {}^4\overline{F}(t, {}^4\overline{x}(t), {}^4\dot{\overline{x}}(t), {}^4\ddot{\overline{x}}(t), {}^8\overline{m}({}^4\overline{x}, {}^4\dot{\overline{x}}, t), {}^8\overline{r}({}^4\overline{x}, {}^4\dot{\overline{x}}, t), {}^8\overline{s}({}^4\overline{x}, {}^4\dot{\overline{x}}, t), {}^4\overline{f}({}^4\overline{x}, {}^4\dot{\overline{x}}, t)) = {}^4\overline{0}, $$

gdzie ${}^8\overline{m}$ ciąg wielowskaźnikowy współczynników bezwładności,
${}^8\overline{r}$ ciąg wielowskaźnikowy współczynników tłumienia,
${}^8\overline{s}$ ciąg wielowskaźnikowy współczynników sprężystości,
${}^4\overline{f}$ ciąg wielowskaźnikowy obciążeń wymuszających (sił i momentów sił).

Uwzględniając przyjęty poprzednio symbol w, mamy

$$ {}^9\overline{w} = [{}^8\overline{w}_1, {}^8\overline{w}_2, {}^8\overline{w}_3], $$

gdzie $m = w_1$, $r = w_2$, $s = w_3$.

W przypadku najprostszym jest

$$ {}^9\overline{w} = {}^9\overline{\mathrm{const}}, \quad {}^8\overline{f} = {}^8\overline{f}(t). $$

Wtedy równanie różniczkowe wielowskaźnikowe [1, 2], mianowicie

$$ {}^8\overline{m} \cdot {}^4\ddot{\overline{x}} + {}^8\overline{r} \cdot {}^4\dot{\overline{x}} + {}^8\overline{s} \cdot {}^4\overline{x} = {}^8\overline{f}(t) $$

opisuje przyjęty model drgań układu wirującego — konstrukcji $\overline{k}$. Jest ono uogólnieniem — za pomocą przestrzeni liniowej ciągów wielowskaźnikowych — równania różniczkowego:

$$ {}^2\overline{m} \cdot \ddot{\overline{x}} + {}^2\overline{r} \cdot \dot{\overline{x}} + {}^2\overline{s} \cdot \overline{x} = \overline{f}(t), $$

czyli

$$ m_{11}\ddot{x}_1 + m_{12}\ddot{x}_2 + r_{11}\dot{x}_1 + r_{12}\dot{x}_2 + s_{11}x_1 + s_{12}x_2 = f_1(t), $$
$$ m_{21}\ddot{x}_1 + m_{22}\ddot{x}_2 + r_{21}\dot{x}_1 + r_{22}\dot{x}_2 + s_{21}x_1 + s_{22}x_2 = f_2(t) $$

nazwanego równaniem bioscylatora jednowskaźnikowego lub krótko: bioscylatorem jednowskaźnikowym o dwóch stopniach swobody.

Sens fizykalny bioscylatora wyjaśniamy niżej przy formułowaniu bioscylatora o sześciu stopniach swobody wyprowadzając odpowiednie równanie różniczkowe wielowskaźnikowe.

2.6. Uwagi o łączeniu elementów k_j oraz o ich odkształcalności. Łączenie ogniw (wał, łożysko) w pary kinematyczne dla uzyskania mechanizmu, na przykład przekładni zębatej lub maszyny, jest bardzo różnorodne. Przy idealizacji tego ważnego zagadnienia zakłada się sztywne lub sprężyste połączenie ogniw wzdłuż linii lub w pewnych punktach. Punkty, a właściwie płaty powierzchniowe, czyli wycinki powierzchni, w których łączą się lub stykają elementy k_j konstrukcji $\bar{k}$, posiadają odmienne własności aniżeli same elementy. Spowodowane to jest «przepływami» bądź też «wymianą» pewnych własności, albo na przykład smarowaniem.

I tak, elementy k_j tak jak i ich połączenia mogą być sztywne, sprężyste, mieszane. Przyjęty tutaj model dyskretny konstrukcji $\bar{k}$ jest całkowicie sprężysty (w odniesieniu do ogniw i ich połączeń) przy stosowalności prawa Hooke'a uogólnionego [5] na wielkie systemy mechaniczne za pomocą ciągów wielowskaźnikowych. W tym właśnie celu przyporządkowano poprzednio każdemu elementowi k_j konstrukcji $\bar{k}$ po sześć stopni swobody, z możliwościami sprężystych działań i oddziaływań w postaci sił oraz momentów sił.

2.7. Uwagi o działaniu otoczenia na konstrukcję $\bar{k}$. Otoczeniem konstrukcji jest przestrzeń fizykalna. Istniejące w niej pola fizykalne działają na konstrukcję $\bar{k}$. Prócz tego konstrukcja jest pod działaniem obciążeń (sił i momentów sił) wynikających z określonych założeń co do jej przydatności. Charakter działania otoczenia na konstrukcję $\bar{k}$ jest najczęściej przypadkowy. W rozważaniach wstępnych omawiamy charakter deterministyczny zjawiska, jest więc oczywiste, że czynimy założenia eliminujące wpływy losowe.

Losowość konstrukcji $\bar{k}$ jest jednak nieunikniona i wywołana między innymi przez obróbkę, montaż, eksploatację i obciążenia będące przyczyną drgań wymuszonych. Współczynniki bezwładności charakteryzują materialną przestrzeń fizykalną, w której istnieją różne siły hamujące ruch konstrukcji $\bar{k}$ przy działaniu sił sprężystych zgodnych z prawem Hooke'a.

4. Oscylatory harmoniczne o n stopniach swobody

Przyjmujemy oznaczenia: $0x_1, \dots x_n$ — układ ortokartezjański n-wymiarowy,

$$\bar{x}_1 = [x_1 \dots, x_n]_1 = [x_j]_1, \quad j = 1, \dots, n$$

— ciąg jednowskaźnikowy wartości przemieszczeń w kierunkach osi przyjętego układu odniesienia,

$$\bar{x}_2 = [x_2, \dots, x_n]_2 = [\dot{x}_j]_2$$

— ciąg jednowskaźnikowy wartości kątów obrotu dookoła poszczególnych osi przyjętego układu odniesienia,

$$\dot{\bar{x}}_1 = [\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n]_1 = [\dot{x}_j]_1$$

— ciąg jednowskaźnikowy wartości prędkości postępowych,

$$\dot{\bar{x}}_2 = [\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n]_2 = [\dot{x}_j]_2$$

— ciąg jednowskaźnikowy wartości prędkości obrotowych,

$$\ddot{\bar{x}}_1 = [\ddot{x}_1, \ldots, \ddot{x}_n]_2 = [\ddot{x}_j]_2$$

— ciąg jednowskaźnikowy wartości przyspieszeń liniowych, w ruchach postępowych

$$\ddot{\bar{x}}_2 = [\ddot{x}_1, \ldots, \ddot{x}_n]_2 = [\ddot{x}_j]_2$$

— ciąg jednowskaźnikowy wartości przyspieszeń kątowych w ruchach obrotowych
t — czas absolutny,

$$^2\bar{m}_1 = \begin{bmatrix} m_{11} & \ldots & m_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ m_{n1} & \ldots & m_{nn} \end{bmatrix}_1 = [m_{j_1 j_2}]_1,$$

$j_1, j_2 = 1, \ldots, n$

— ciąg dwuwskaźnikowy współczynników bezwładności (mas) w ruchach postępowych,

$$^2\bar{m}_2 = \begin{bmatrix} m_{11} & \ldots & m_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ m_{n1} & \ldots & m_{nn} \end{bmatrix}_2 = [m_{j_1 j_2}]_2$$

— ciąg dwuwskaźnikowy współczynników bezwładności (momentów bezwładności) w ruchach obrotowych względem odpowiednich osi obrotu,

$$^2\bar{r}_1 = [r_{j_1 j_2}]_1,$$
$$^2\bar{r}_2 = [r_{j_1 j_2}]_2$$

— ciągi dwuwskaźnikowe współczynników tłumienia w ruchach postępowych i obrotowych,

$$^2\bar{s}_1 = [s_{j_1 j_2}]_1,$$
$$^2\bar{s}_2 = [s_{j_1 j_2}]_2$$

— ciągi dwuwskaźnikowe współczynników sprężystości w ruchach postępowych i obrotowych,

$$\bar{f}_1(t) = [f_1(t), \ldots, f_n(t)]_1 = [f_j(t)]_1$$

— ciąg jednowskaźnikowy sił wymuszających w ruchach postępowych,

$$\bar{f}_2(t) = [f_1(t), \ldots, f_n(t)]_2 = [f_j(t)]_2$$

— ciąg jednowskaźnikowy momentów wymuszających w ruchach obrotowych.

Stosownie do oznaczeń przekształcenie

$$\bar{P}_1(t, \bar{x}_1(t), \dot{\bar{x}}_1, {}^2\bar{m}_1, {}^2\bar{r}_1, {}^2\bar{s}_1, \bar{f}_1(t)) = \bar{0},$$

gdzie $\bar{P}_1 = [P_1, \ldots, P_n]_1 = [P_j]_1$
w postaci (a):

$$^2\bar{m}_1 \cdot \ddot{\bar{x}}_1 + {}^2\bar{r}_1 \cdot \dot{\bar{x}}_1 + {}^2\bar{s}_1 \cdot \bar{x}_1 = \bar{f}_1(t)$$

będziemy nazywali równaniem oscylatora harmonicznego postępowego wymuszonego w ośrodku z oporami i o n stopniach swobody wyrażonych ciągiem jednowskaźnikowym zmiennych $\bar{x}_1$;

w postaci (b)

$$ {}^2\overline{m}_1 \cdot \ddot{\overline{x}}_1 + {}^2\overline{r}_1 \cdot \dot{\overline{x}}_1 + {}^2\overline{s}_1 \cdot \overline{x}_1 = \overline{0} $$

— nazwiemy równaniem n-wymiarowego oscylatora harmonicznego postępowego swobodnego w ośrodku z oporami;

w postaci (c)

$$ {}^2\overline{m}_1 \cdot \ddot{\overline{x}}_1 + {}^2\overline{s}_1 \cdot \overline{x}_1 = \overline{0} $$

— nazywamy równaniem n-wymiarowego oscylatora harmonicznego postępowego swobodnego.

Korzystając z pracy [1, 2] napiszemy powyższe równania za pomocą ciągów zerowskaźnikowych (utożsamianych ze skalarami) podając przy tym regułę mnożenia «macierzowego» ciągów dwuwskaźnikowych przez ciągi jednowskaźnikowe.

$$ \begin{cases} m_{111}\ddot{x}_{11} + \ldots + m_{1n1}\ddot{x}_{n1} + r_{111}\dot{x}_{11} + \ldots + r_{1n1}\dot{x}_{n1} + s_{111}x_{11} + \ldots + s_{1n1}x_{n1} = f_{11}(t), \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ m_{n11}\ddot{x}_{11} + \ldots + m_{nn1}\ddot{x}_{n1} + r_{n11}\dot{x}_{11} + \ldots + r_{nn1}\dot{x}_{n1} + s_{n11}x_{11} + \ldots + s_{nn1}x_{n1} = f_{n1}(t); \end{cases} $$

$$ \begin{cases} m_{111}\ddot{x}_{11} + \ldots + m_{1n1}\ddot{x}_{n1} + r_{111}\dot{x}_{11} + \ldots + r_{1n1}\dot{x}_{n1} + s_{111}x_{11} + \ldots + s_{1n1}x_{n1} = 0, \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ m_{n11}\ddot{x}_{11} + \ldots + m_{nn1}\ddot{x}_{n1} + r_{n11}\dot{x}_{11} + \ldots + r_{nn1}\dot{x}_{n1} + s_{n11}x_{11} + \ldots + s_{nn1}x_{n1} = 0; \end{cases} $$

$$ \begin{cases} m_{111}\ddot{x}_{11} + \ldots + m_{1n1}\ddot{x}_{n1} + s_{111}x_{11} + \ldots + s_{1n1}x_{n1} = 0, \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ m_{n11}\ddot{x}_{11} + \ldots + m_{nn1}\ddot{x}_{n1} + s_{n11}x_{11} + \ldots + s_{nn1}x_{n1} = 0. \end{cases} $$

Są to układy równań liniowych o współczynnikach stałych. Stanowią one uogólnienie równania oscylatora postępowego o jednym stopniu swobody. Można je otrzymać z drugiego prawa Newtona układów mechanicznych wielokrotnych postępowych jako systemów wielkich lub za pomocą wielowskaźnikowych równań Lagrange'a drugiego rodzaju [8].

W przypadku $n = 3$ mamy oscylator harmoniczny postępowy o trzech «postępowych» stopniach swobody w przestrzeni ortokartezjańskiej trójwymiarowej. Interpretujemy go za pomocą:

1) trzech prostopadłych sprężynek postępowych, z których każda jest podatna tylko na odkształcenie liniowe kierunku jednej osi, gdy ruch jest swobodny;

2) trzech prostopadłych tłumików postępowych, z których każdy przedstawia siłę oporu w ruchu postępowym wzdłuż danej osi;

3) pary trzech prostopadłych sprężynek postępowych i trzech tłumików postępowych, gdy występują siły sprężyste i siły oporu.

Zauważmy, że w przypadku szczególnym układ — ciąg równań sprowadza się do ciągu jednowskaźnikowego równań:

$$ \begin{aligned} m_{11}\ddot{x}_{11} + r_{11}\dot{x}_{11} + s_{11}x_{11} &= f_{11}(t), \\ &\vdots \\ m_{n1}\ddot{x}_{n1} + r_{n1}\dot{x}_{n1} + s_{n1}x_{n1} &= f_{n1}(t). \end{aligned} $$

Otrzymujemy wtedy tak zwane drgania rozprzężone, podczas gdy w przypadku ogólnym są one sprzężone. Mogą również wystąpić różne inne przypadki «sprzężenia częściowego».

Stosownie do oznaczeń, przekształcenie

$$\bar{P}_2[(t, \bar{x}_2(t), \dot{\bar{x}}_2, \ddot{\bar{x}}_2, {}^2\bar{m}_2, {}^2\bar{r}_2, {}^2\bar{s}_2, \bar{f}_2(t)] = \bar{0},$$

gdzie $\bar{P}_2 = [P_1, \ldots, P_n]_2$,

w postaci (d)

$${}^2\bar{m}_2 \cdot \ddot{\bar{x}}_2 + {}^2\bar{r}_2 \cdot \dot{\bar{x}}_2 + {}^2\bar{s}_2 \cdot \bar{x}_2 = \bar{f}_2(t),$$

będziemy nazywali równaniem oscylatora harmonicznego obrotowego wymuszonego w ośrodku z oporami i o n stopniach swobody, wyrażonych ciągiem jednowskaźnikowym zmiennych $\bar{x}_2$;

w postaci (e)

$${}^2\bar{m}_2 \cdot \ddot{\bar{x}}_2 + {}^2\bar{r}_2 \cdot \dot{\bar{x}}_2 + {}^2\bar{s}_2 \cdot \bar{x}_2 = \bar{0},$$

nazwiemy równaniem n-wymiarowego oscylatora harmonicznego obrotowego swobodnego w ośrodku z oporami;

w postaci (f)

$${}^2\bar{m}_2 \cdot \ddot{\bar{x}}_2 + {}^2\bar{s}_2 \cdot \bar{x}_2 = \bar{0},$$

nazywamy równaniem n-wymiarowego oscylatora harmonicznego obrotowego swobodnego

Korzystając z prac [1, 2] napiszemy powyższe równania za pomocą ciągów zerowskaźnikowych podając przy tym regułę mnożenia «macierzowego» ciągów dwuwskaźnikowych przez ciągi jednowskaźnikowe.

Równania te stanowią uogólnienie równania oscylatora obrotowego o jednym stopniu swobody. Można je otrzymać z drugiego prawa Newtona układów mechanicznych wielokrotnych obrotowych jako systemów wielkich [9] lub za pomocą wielowskaźnikowych równań Lagrange'a drugiego rodzaju [8].

W przypadku $n = 3$ otrzymamy oscylator harmoniczny obrotowy o trzech «obrotowych» stopniach swobody w przestrzeni ortokartezjańskiej trójwymiarowej. Interpretujemy go za pomocą:

1) trzech prostopadłych sprężynek obrotowych, z których każda jest podatna tylko na odkształcenia kątowe w ruchu dookoła jednej osi, gdy ruch jest swobodny;

2) trzech prostopadłych tłumików obrotowych, z których każdy przedstawia moment oporu w ruchu obrotowym dookoła danej osi;

3) pary trzech prostopadłych sprężynek obrotowych i trzech tłumików obrotowych, gdy występują momenty sprężyste i momenty oporu.

Także i tu mogą wystąpić drgania sprzężone, częściowo sprzężone i rozprzężone.

Literatura cytowana w tekście

1. R. KRZYWIEC, *Wielociągi*, Praca doktorska.
2. R. KRZYWIEC, *Ciągi wielowskaźnikowe*, Zagadnienia Drgań Nieliniowych, 1971.
3. M. T. HUBER, *Stereomechanika Techniczna*, (1951).
4. R. KRZYWIEC, *O formalizowaniu pojęcia układu*, Arch. Bud. Masz., (1971).
5. R. KRZYWIEC, *O wielowskaźnikowym uogólnieniu prawa Hooke'a układów stereomechanicznych wielokrotnych jako systemów wielkich*, Zesz. Nauk. Polit. Częst., (1972).

6. L. S. PONTRIAGIN, *Równania różniczkowe zwyczajne*, Warszawa 1964.
7. W. W. STIEPANOW, *Równania różniczkowe*, Warszawa 1956.
8. R. KRZYWIEC, *Wielowskaźnikowe równania Lagrange'a drugiego rodzaju układów mechanicznych wielokrotnych jako systemów wielkich*, Zagadnienia Drgań Nieliniowych, 1971.
9. R. KRZYWIEC, *Wielowskaźnikowe uogólnione prawo dynamiki układów wielokrotnych — wielkich systemów mechanicznych*, Zesz. Nauk. Polit. Częst., 1972.

Резюме

О МОДЕЛИРОВАНИИ С ПОМОЩЬЮ БОЛЬШОЙ СИСТЕМЫ БИОСЦИЛЛЯТОРОВ МНОГОПОДШИПНИКОВОГО ВАЛА СО МНОГИМИ ДИСКАМИ. ЧАСТЬ I. ОБЩИЕ ЗАМЕЧАНИЯ. ОСЦИЛЛЯТОРЫ СО МНОГИМИ ИНДЕКСАМИ

В первой части работы о моделировании упругого, многоподшипникового, нагруженного многими дисками вала представлены:

(1) Общие рассуждения относительно построения дифференциальных уравнений движения.

(2) Линейные осцилляторы (поступательного и вращательного движения) со многими индексами, с помощью которых, во второй части работы, вводятся биосцилляторы со многими индексами предназначенные для моделирования вала.

Работа написана на языке многократных последовательностей, т. е. последовательностей со многими индексами при использовании их алгебры и элементов анализа взятых из диссертации автора.

Summary

MODELLING OF A MULTI-SPAN SHAFT WITH SEVERAL DISKS BY MEANS OF A GREAT SYSTEM OF BI-OSCILLATORS. PART I. GENERAL REMARKS. MULTI-INDICIAL OSCILLATORS

Part one of the paper on shaft modelling (elastic shaft with several supports and loaded by several disks) presents:

(1) General considerations concerning the method of constructing the differential equations of motion;

(2) Multi-indicial linear oscillators (progressive and rotational), which will be used (in the second part of the paper) to introduce multi-indicial bi-oscillators for shaft modelling.

The paper is formulated in the multi-series language, i.e. in the language of multi-indicial series and the corresponding algebra and elements of analysis as presented in author's doctoral dissertation.

Praca została złożona w Redakcji dnia 29 lipca 1972 r.; w wersji ostatecznej dnia 20 lutego 1974 r.