

## OTRZYMYWANIE MACIERZY ELEMENTU PŁYTY ZGINANEJ DLA MODELU MIESZANEGO METODĄ ORTOGONALIZACJI

BOGDAN WOSIEWICZ (POZNAŃ)

### 1. Wstęp

Ogólne sformułowanie modelu mieszanego metody elementów skończonych w oparciu o twierdzenia wariacyjne można znaleźć w pracach PIANA i TONGA [1] oraz HANSTENA [2]. W modelu mieszanym aproksymuje się w elemencie w sposób niezależny zarówno przemieszczenia, jak i naprężenia. W teorii konstrukcji uzyskano szereg interesujących wyników za pomocą tego modelu. Wymienić tu można pracę DUNHAMA i PISTERA [3] dotyczącą zagadnień płaskich, prace HERRMANNA [4] [5], HELLANA [6], BÄCKLUNDA [7], CRISFILDA [8], COOKA [9], BRONA i DHATTA [10], VISSERA [11] oraz CHATTERJEE i SETLURA [12] poświęcone różnym zagadnieniom teorii płyt i różnym elementom, a także artykuły HERRMANNA i CAMPBELLA [13] oraz HERRMANNA i MASONA [14] dotyczące analizy statycznej powłok. W większości cytowanych prac, przy wyprowadzeniu macierzy elementu korzystano z twierdzenia wariacyjnego REISSNERA [15]. Natomiast w pracach [6] i [7] zasadnicze związki wyprowadzono korzystając z metody bezpośredniej.

W pracy niniejszej wyprowadzono macierz elementu w postaci ogólnej dla problemu zginania cienkich płyt izotropowych wychodząc z układu równań różniczkowych zagadnienia i stosując metodę ortogonalizacji [16, 17]. Dalej pokazano zastosowanie otrzymanych wzorów do tworzenia macierzy różnych elementów.

### 2. Zależności podstawowe

Problem zginania cienkich płyt izotropowych można opisać poniższym układem równań różniczkowych cząstkowych (2.1), z których trzy pierwsze wyrażają zależności pomiędzy momentami płytowymi ( $m_x$ ,  $m_y$ ,  $m_{xy}$ ) a krzywiznami ( $w_{,xx}$ ,  $w_{,yy}$ ,  $w_{,xy}$ ), ostatnie jest równaniem równowagi

$$\begin{aligned} w_{,xx} + K(m_x - \nu m_y) &= 0 \\ w_{,yy} + K(m_y - \nu m_x) &= 0 \\ w_{,xy} + K(1 + \nu)m_{xy} &= 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

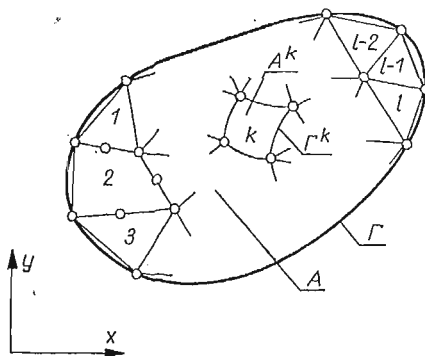
$$m_{x,xx} + m_{y,yy} + 2m_{xy,xy} + q = 0, \quad \text{gdzie } K = \frac{12}{Eh^3}.$$

Przez  $E$ ,  $h$ ,  $\nu$  oznaczono odpowiednio moduł sprężystości, grubość płyty i liczbę Poissona.

Równania (2.1) muszą być tożsamościowo spełnione przez funkcje  $w$ ,  $m_x$ ,  $m_y$ ,  $m_{xy}$  w obszarze płyty  $A$  ograniczonym brzegiem  $\Gamma$ .

Do dalszych rozważań obszar płyty podzielimy na  $l$  podobszarów  $A^k$  o brzegach  $\Gamma^k$ , gdzie  $k = 1, 2, \dots, l$  (rys. 1). Podobszary te nazywane są elementami skończonymi płyty. W każdym elemencie aproksymować będziemy ugięcia ( $w$ ) i momenty płytowe ( $m_x, m_y, m_{xy}$ ) przez poniższe wyrażenia macierzowe (zapisane dla  $k$ -tego elementu):

$$(2.2) \quad \begin{aligned} m_x^k &= \Phi^1 M_x^1 + \Phi^2 M_x^2 + \dots + \Phi^\kappa M_x^\kappa + \dots + \Phi^m M_x^m = [\Phi] \{M_x\} & \kappa &= 1, 2, \dots, m, \\ m_y^k &= \Psi^1 M_y^1 + \Psi^2 M_y^2 + \dots + \Psi^\lambda M_y^\lambda + \dots + \Psi^n M_y^n = [\Psi] \{M_y\} & \lambda &= 1, 2, \dots, n, \\ m_{xy}^k &= X^1 M_{xy}^1 + X^2 M_{xy}^2 + \dots + X^\mu M_{xy}^\mu + \dots + X^r M_{xy}^r = [X] \{M_{xy}\} & \mu &= 1, 2, \dots, r, \\ w^k &= \Omega^1 W^1 + \Omega^2 W^2 + \dots + \Omega^\iota W^\iota + \dots + \Omega^s W^s = [\Omega] \{W\} & \iota &= 1, 2, \dots, s. \end{aligned}$$



Rys. 1.

W wyrażeniach (2.2)  $M_x^\kappa, M_y^\lambda, M_{xy}^\mu, W^\iota$  oznaczają odpowiednio  $m$  parametrów związanych z momentami  $m_x$ ,  $n$  parametrów związanych z momentami  $m_y$ ,  $r$  parametrów związanych z momentami skręcającymi  $m_{xy}$  oraz  $s$  parametrów związanych z ugięciami  $w$  płyty. Parametry te oznaczać mogą np. wartości funkcji momentów i ugięć w wyróżnionych punktach elementu (w węzłach), wartości pochodnych tych funkcji w węzłach itp.

Funkcje  $\Phi^\kappa = \Phi_{(x,y)}^\kappa, \Psi^\lambda = \Psi_{(x,y)}^\lambda, X^\mu = X_{(x,y)}^\mu$  oraz  $\Omega^\iota = \Omega_{(x,y)}^\iota$  określają w jaki sposób  $m_x, m_y, m_{xy}$  oraz  $w$  zależą od współrzędnych  $x, y$  i parametrów węzłowych  $M_x^\kappa, M_y^\lambda, M_{xy}^\mu, W^\iota$ . Funkcje te nazywane są funkcjami kształtu. Sposoby tworzenia funkcji kształtu dla różnych elementów opisane są np. w pracach ZIENKIEWICZA [18], KOLARA i innych [19] itp.

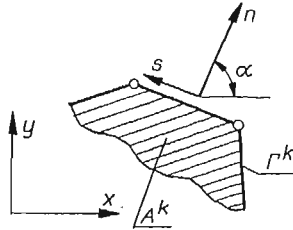
### 3. Macierz elementu

Rozważmy  $k$ -ty element wyodrębniony z badanej płyty. Podstawiając zależności (2.2) do (2.1) otrzymamy

$$(3.1) \quad \begin{aligned} [\Omega_{,xx}] \{W\} + K([\Phi] \{M_x\} - \nu[\Psi] \{M_y\}) &= f_1(x, y, M_x^\kappa, M_y^\lambda, W^\iota), \\ [\Omega_{,yy}] \{W\} + K([\Psi] \{M_y\} - \nu[\Phi] \{M_x\}) &= f_2(x, y, M_x^\kappa, M_y^\lambda, W^\iota), \\ [\Omega_{,xy}] \{W\} + K(1 + \nu)[X] \{M_{xy}\} &= f_3(x, y, M_{xy}^\mu, W^\iota), \\ [\Phi_{,xx}] \{M_x\} + [\Psi_{,yy}] \{M_y\} + 2[X_{,xy}] \{M_{xy}\} + q &= f_4(x, y, M_x^\kappa, M_y^\lambda, M_{xy}^\mu). \end{aligned}$$

Równania (3.1) nie są tożsamościowo równe zero, gdyż funkcje aproksymujące momenty i ugięcia (2.2) są funkcjami przybliżonymi. Dokładność przybliżenia równań (2.1) przez (3.1) zależy od dokładności opisu rzeczywistych momentów i ugięć przez związki (2.2). Funkcje  $f_1, f_2, f_3, f_4$  oznaczają błąd aproksymacji.

W naszym przypadku zminimalizujemy błąd aproksymacji przez ortogonalizację funkcji  $f_1, f_2, f_3, f_4$  z układem funkcji  $\Phi^\alpha, \Psi^\lambda, X^\mu, \Omega^\iota$  (metoda Galerkina). Sposób ten był poprzednio z powodzeniem stosowany w metodzie przemieszczeń metody elementów skończonych. Dla przykładu SZABO i LEE [16] uzyskali na tej drodze macierz sztywności elementu dla zagadnienia płaskiego, a MIKOŁAJCZAK i WOSIEWICZ [17] dla problemu zginania płyt trójwarstwowych.



Rys. 2.

Do równań (3.1) zastosujemy postępowanie Galerkina w postaci przedstawionej przez związki:

$$\begin{aligned}
 \int \int_{A^k} \Phi^\alpha f_1 dA^k &= 0 & \alpha &= 1, 2, \dots, m, \\
 \int \int_{A^k} \Psi^\lambda f_2 dA^k &= 0 & \lambda &= 1, 2, \dots, n, \\
 \int \int_{A^k} X^\mu f_3 dA^k &= 0 & \mu &= 1, 2, \dots, r, \\
 \int \int_{A^k} \Omega^\iota f_4 dA^k &= 0 & \iota &= 1, 2, \dots, s.
 \end{aligned}
 \tag{3.2}$$

Podstawiając (3.1) do (3.2) otrzymamy układ  $(m+n+r+s)$  równań liniowych na wyznaczenie parametrów  $M_x^\alpha, M_y^\lambda, M_{xy}^\mu, W^\iota$ :

$$\begin{aligned}
 \int \int_{A^k} (\Phi^\alpha [\Omega_{,xx}] \{W\} + K\Phi^\alpha [\Phi] \{M_x\} - K\nu\Phi^\alpha [\Psi] \{M_y\}) dA^k &= 0, & \alpha &= 1, 2, \dots, m, \\
 \int \int_{A^k} (\Psi^\lambda [\Omega_{,yy}] \{W\} + K\Psi^\lambda [\Psi] \{M_y\} - K\nu\Psi^\lambda [\Phi] \{M_x\}) dA^k &= 0, & \lambda &= 1, 2, \dots, n, \\
 \int \int_{A^k} (X^\mu [\Omega_{,xy}] \{W\} + K(1+\nu)X^\mu [X] \{M_{xy}\}) dA^k &= 0, & \mu &= 1, 2, \dots, r, \\
 \int \int_{A^k} (\Omega^\iota [\Phi_{,xx}] \{M_x\} + \Omega^\iota [\Psi_{,yy}] \{M_y\} + 2\Omega^\iota [X_{,xy}] \{M_{xy}\} + \Omega^\iota q) dA^k &= 0, & \iota &= 1, 2, \dots, s.
 \end{aligned}
 \tag{3.3}$$

Związki (3.3) przekształcimy korzystając z twierdzenia Greena, które dla funkcji  $P$  i  $Q$  w układzie współrzędnych jak na rys. 2 ma postać

$$\int \int_{A^k} (P_{,y} + Q_{,x}) dA^k = \oint_{\Gamma^k} (P \sin \alpha + Q \cos \alpha) d\Gamma^k.
 \tag{3.4}$$

Otrzymamy ostatecznie układ  $(m+n+r+s)$  równań w postaci:

$$\begin{aligned}
 & K \int \int_{A^k} \Phi^\alpha [\Phi] \{M_x\} dA^k - K\nu \int \int_{A^k} \Phi^\alpha [\Psi] \{M_y\} dA^k - \int \int_{A^k} \Phi_{,x}^\alpha [\Omega_{,x}] \{W\} dA^k = \\
 & \quad - \oint_{\Gamma^k} \Phi^\alpha w_{,n} \cos^2 \alpha d\Gamma^k + \oint_{\Gamma^k} \Phi^\alpha w_{,s} \sin \alpha \cos \alpha d\Gamma^k, \quad \alpha = 1, 2, \dots, m, \\
 & - K\nu \int \int_{A^k} \Psi^\lambda [\Phi] \{M_x\} dA^k + K \int \int_{A^k} \Psi^\lambda [\Psi] \{M_y\} dA^k - \int \int_{A^k} \Psi_{,y}^\lambda [\Omega_{,y}] \{W\} dA^k = \\
 & \quad - \oint_{\Gamma^k} \Psi^\lambda w_{,n} \sin^2 \alpha d\Gamma^k - \oint_{\Gamma^k} \Psi^\lambda w_{,s} \sin \alpha \cos \alpha d\Gamma^k, \quad \lambda = 1, 2, \dots, n, \\
 & 2K \int \int_{A^k} X^\mu [X] \{M_{xy}\} dA^k - \int \int_{A^k} (X_{,x}^\mu [\Omega_{,y}] + X_{,y}^\mu [\Omega_{,x}]) \{W\} dA^k = \\
 & \quad - \oint_{\Gamma^k} X^\mu (2w_{,n} \sin \alpha \cos \alpha + w_{,s} \cos 2\alpha) d\Gamma^k, \quad \mu = 1, 2, \dots, r, \\
 & - \int \int_{A^k} \Omega_{,x}^i [\Phi_{,x}] \{M_x\} dA^k - \int \int_{A^k} \Omega_{,x}^i [\Psi_{,y}] \{M_y\} dA^k - \int \int_{A^k} (\Omega_{,x}^i [X_{,y}] + \\
 & + \Omega_{,y}^i [X_{,x}]) \{M_{xy}\} dA^k + \int \int_{A^k} \Omega^i q dA^k = - \oint_{\Gamma^k} \Omega^i (m_{,n,n} + m_{,n,s}) d\Gamma^k, \quad i = 1, 2, \dots, s.
 \end{aligned}
 \tag{3.5}$$

Układ (3.5) można zapisać w postaci macierzowej typowej dla metody elementów skończonych

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \mathbf{0} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & \mathbf{0} & k_{24} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ W \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ p_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}
 \end{aligned}
 \tag{3.6}$$

Macierz współczynników przy niewiadomych parametrach węzłowych  $M_x^\alpha$ ,  $M_y^\lambda$ ,  $M_{xy}^\mu$ ,  $W^i$  jest poszukiwaną macierzą elementu.

Poszczególne wyrazy podmacierzy  $k_{ij}$ ,  $p_4$ ,  $b_i$  ( $i, j = 1, 2, 3, 4$ ) z zależności (3.6) należy wyznaczyć ze wzorów:

$$\begin{aligned}
 & k_{11}^{ij} = K \int \int_{A^k} \Phi^i \Phi^j dA^k, \quad i, j = 1, 2, \dots, m, \\
 & k_{12}^{ij} = -K\nu \int \int_{A^k} \Phi^i \Psi^j dA^k, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n, \\
 & k_{21}^{ij} = -K\nu \int \int_{A^k} \Psi^i \Phi^j dA^k, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, m, \\
 & k_{22}^{ij} = K \int \int_{A^k} \Psi^i \Psi^j dA^k, \quad i, j = 1, 2, \dots, n, \\
 & k_{33}^{ij} = 2K(1+\nu) \int \int_{A^k} X^i X^j dA^k, \quad i, j = 1, 2, \dots, r, \\
 & k_{14}^{ij} = - \int \int_{A^k} \Phi_{,x}^i \Omega_{,x}^j dA^k, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, s, \\
 & k_{24}^{ij} = - \int \int_{A^k} \Psi_{,y}^i \Omega_{,y}^j dA^k, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, s, \\
 & k_{34}^{ij} = - \int \int_{A^k} (X_{,x}^i \Omega_{,y}^j + X_{,y}^i \Omega_{,x}^j) dA^k, \quad i = 1, 2, \dots, r, \quad j = 1, 2, \dots, s, \\
 & k_{41}^{ij} = - \int \int_{A^k} \Omega_{,x}^i \Phi_{,x}^j dA^k, \quad i = 1, 2, \dots, s, \quad j = 1, 2, \dots, m, \\
 & k_{42}^{ij} = - \int \int_{A^k} \Omega_{,y}^i \Psi_{,y}^j dA^k, \quad i = 1, 2, \dots, s, \quad j = 1, 2, \dots, n, \\
 & k_{43}^{ij} = - \int \int_{A^k} (\Omega_{,x}^i X_{,y}^j + \Omega_{,y}^i X_{,x}^j) dA^k, \quad i = 1, 2, \dots, s, \quad j = 1, 2, \dots, r, \\
 & k_{13}^{ij} = k_{23}^{ij} = k_{31}^{ij} = k_{32}^{ij} = k_{44}^{ij} = 0,
 \end{aligned}
 \tag{3.7}$$

$$\begin{aligned}
 (3.8) \quad p_4^i &= \int_{A^k} \Omega^i q dA^k, \quad i = 1, 2, \dots, s, \\
 b_1^i &= \oint_{\Gamma^k} \Phi^i (w_{,n} \cos^2 \alpha - w_{,s} \sin \alpha \cos \alpha) d\Gamma^k, \quad i = 1, 2, \dots, m, \\
 b_2^i &= \oint_{\Gamma^k} \Psi^i (w_{,n} \sin^2 \alpha + w_{,s} \sin \alpha \cos \alpha) d\Gamma^k, \quad i = 1, 2, \dots, n, \\
 (3.9) \quad b_3^i &= \oint_{\Gamma^k} X^i (2w_{,n} \sin \alpha \cos \alpha + w_{,s} \cos 2\alpha) d\Gamma^k, \quad i = 1, 2, \dots, r, \\
 b_4^i &= \oint_{\Gamma^k} \Omega^i (m_{n,n} + m_{n,s}) d\Gamma^k, \quad i = 1, 2, \dots, s.
 \end{aligned}$$

Otrzymane ogólne formuły na poszczególne wyrazy macierzy elementu pozwalają na wyznaczenie macierzy dowolnego elementu, jeżeli funkcje kształtu są określone. Nadto wyrażenia te służyć mogą jako podstawa do napisania procedury dla EMC na budowanie macierzy elementu.

Macierz globalną uzyskuje się przez sumowanie wyrażen (3.6) po wszystkich elementach.

Na koniec zauważymy, że przekształcenie (3.4) nakłada na wybór funkcji kształtu  $\Omega^i$ ,  $\Phi^x$ ,  $\Psi^\lambda$ ,  $X^\mu$  pewne ograniczenia. Mianowicie, funkcje  $\Omega^i$  winny być ciągłe wraz z pochodnymi drugiego rzędu w obszarze elementu  $A^k$  oraz ciągłe wraz z pochodnymi pierwszego rzędu na brzegu  $\Gamma^k$ . Funkcje  $\Phi^x$ ,  $\Psi^\lambda$ ,  $X^\mu$  winny być ciągłe wraz z pochodnymi pierwszego rzędu w  $A^k$  oraz ciągłe na brzegu  $\Gamma^k$ . Dalsza uwaga dotyczy całek po konturze elementu. W macierzy globalnej całki te sumowane są z analogicznymi całkami dla sąsiednich elementów. Suma będzie równa zeru w przypadku doboru «odpowiednio gładkich» funkcji kształtu, to znaczy zapewniających ciągłość przemieszczeń i ich pochodnych oraz naprężeń (momentów) pomiędzy elementami [16, 17]. W praktyce korzysta się często także z funkcji kształtu, które takiej ciągłości nie zapewniają [5, 7].

Poniżej pokażemy zastosowanie wyprowadzonych formuł do tworzenia macierzy różnych elementów.

#### 4. Element o stałych momentach i inne elementy trójkątne

HERRMANN [5] i HELLAN [6] wyprowadzili macierz elementu trójkątnego uzależniając ugięcia w elemencie od ugięć wierzchołków trójkąta, a momenty od momentów normalnych do boków trójkąta w jego środku. Przyjęcie takich parametrów węzłowych zapewnia liniową zmienność ugięć i stałe wartości momentów wewnątrz elementu.

HERRMANN korzystał z twierdzenia wariacyjnego REISSNERA, HELLAN natomiast z metody bezpośredniej. W pracy [7] BÄCKLUND wykazał, że otrzymane macierze są identyczne.

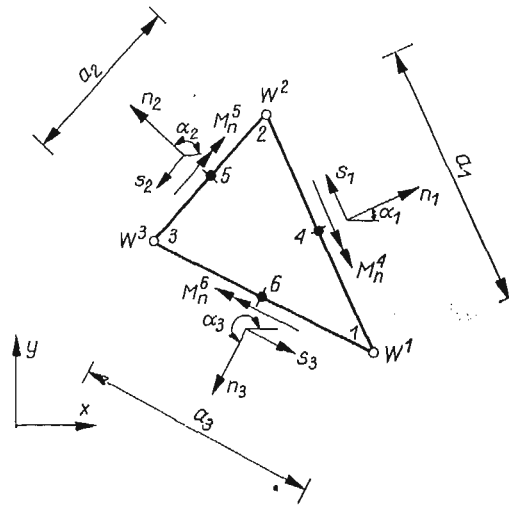
Korzystając z wyprowadzonych wzorów i przyjmując funkcje kształtu jak w [5] wyznaczmy poszczególne wyrazy macierzy elementu, które okazują się identyczne z otrzymanymi przez HERRMANN i HELLANA. Na rys. 3 pokazano rozważany element. Przyjmując, że momenty  $m_x$ ,  $m_y$ ,  $m_{xy}$  są stałe w elemencie można wyznaczyć momenty normalne do brzegów korzystając z poniższego wyrażenia:

$$(4.1) \quad \begin{Bmatrix} M_n^4 \\ M_n^5 \\ M_n^6 \end{Bmatrix} = [A] \begin{Bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha_1 & \sin^2 \alpha_1 & \sin 2\alpha_1 \\ \cos^2 \alpha_2 & \sin^2 \alpha_2 & \sin 2\alpha_2 \\ \cos^2 \alpha_3 & \sin^2 \alpha_3 & \sin 2\alpha_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_{xy} \end{Bmatrix}.$$

Przez odwrócenie (4.1.) wyrazimy momenty płytowe wewnątrz elementu przez momenty normalne do brzegów

$$(4.2) \quad \begin{Bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_{xy} \end{Bmatrix} = [B] \begin{Bmatrix} M_n^4 \\ M_n^5 \\ M_n^6 \end{Bmatrix}, \quad [B] = [A]^{-1}.$$

W ten sposób określiliśmy funkcje kształtu  $\Phi^\kappa$ ,  $\Psi^\lambda$ ,  $X^\mu$ .



Rys. 3.

Mają one postać

$$(4.3) \quad \Phi^\kappa = B_{1\kappa}, \quad \Psi^\lambda = B_{2\lambda}, \quad X^\mu = B_{3\mu}, \quad \text{gdzie } \kappa, \lambda, \mu = 1, 2, 3.$$

Parametry węzłowe spełniają relację

$$(4.4) \quad M_x^\kappa = M_y^\kappa = M_{xy}^\kappa = M_n^{\kappa+3}.$$

Przyjmując, że ugięcie wewnątrz elementu można opisać wielomianem

$$(4.5) \quad w = a_1 + a_2 x + a_3 y,$$

funkcje kształtu  $\Omega^i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) otrzymać można przez podstawienie do (4.5) współrzędnych wierzchołków trójkąta i odwrócenie tak otrzymanej zależności macierzowej

$$(4.6) \quad \begin{Bmatrix} W^1 \\ W^2 \\ W^3 \end{Bmatrix} = [C] \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix}.$$

Po odwróceniu otrzymamy

$$(4.7) \quad \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = [D] \begin{Bmatrix} W^1 \\ W^2 \\ W^3 \end{Bmatrix}, \quad [D] = [C]^{-1},$$

a funkcje kształtu mają postać

$$(4.8) \quad \Omega^i = D_{1i} + D_{2i}x + D_{3i}y, \quad i = 1, 2, 3.$$

Dla przykładu  $\Omega^1$  wyraża się poniższym wzorem

$$\Omega^1 = \frac{1}{2\Delta} [(x_2y_3 - x_3y_2) + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y].$$

Przyjęte funkcje kształtu (4.8) nie zapewniają ciągłości  $w_{,n}$  pomiędzy dwoma elementami. Zachowana jest ciągłość pochodnej stycznej. Przy tworzeniu macierzy elementu pominiemy całki liniowe zawierające  $w_{,n}$  jako nieokreślone, natomiast całki z  $w_{,s}$  włączymy do macierzy elementu.

Wobec (4.4) zmniejszy się wymiar macierzy elementu, momenty płytowe zależą bowiem od trzech tych samych parametrów. Stąd w wyrażeniu (3.6) należy zsumować pewne wyrazy.

Przepiszemy (3.6) w postaci:

$$(4.9) \quad \begin{bmatrix} G & H \\ H^T & \mathbf{O} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_n \\ W \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{O} \\ p \end{Bmatrix},$$

gdzie  $[M_n \ W]^T = [M_n^4 \ M_n^5 \ M_n^6 \ W^1 \ W^2 \ W^3]^T$ .

Poszczególne wyrazy (4.9) będą sumami odpowiednich wyrazów (3.6):

$$(4.10) \quad G^{ij} = K \left\{ \int_{A^k} \Phi^i \Phi^j dA^k + \int_{A^k} \Psi^i \Psi^j dA^k + 2(1+\nu) \int \int_{A^k} X^i X^j dA_{\frac{k}{2}}^k + \right. \\ \left. - \nu \left( \int \int_{A_{\frac{k}{2}}^k} \Phi^i \Psi^j dA_{\frac{k}{2}}^k + \int \int_{A^k} \Phi^j \Psi^i dA_{\frac{k}{2}}^k \right) \right\}, \quad i, j = 1, 2, 3,$$

$$(4.11) \quad H^{ij} = - \left\{ \int \int_{A_{\frac{k}{2}}^k} \Phi_{,x}^i \Omega_{,x}^j dA_{\frac{k}{2}}^k + \int \int_{A^k} \Psi_{,y}^i \Omega_{,y}^j dA^k + \int \int_{A^k} (X_{,x}^i \Omega_{,y}^j + X_{,y}^i \Omega_{,x}^j) dA^k + \right. \\ \left. + \oint_{\Gamma^k} \Phi^i \Omega_{,s}^j \sin \alpha \cos \alpha d\Gamma^k - \oint_{\Gamma^k} \Psi^i \Omega_{,s}^j \sin \alpha \cos \alpha d\Gamma^k - \oint_{\Gamma^k} X^i \Omega_{,s}^j \cos 2\alpha d\Gamma^k \right\},$$

$$i, j = 1, 2, 3.$$

Ponadto w wyrażeniach (4.11) pozostaną tylko całki liniowe ponieważ funkcje  $\Phi^x$ ,  $\Psi^y$ ,  $X^x$  są stałe, a w całkach powierzchniowych występują ich pochodne.

Wykorzystując (4.3) i biorąc pod uwagę, że

$$\int \int_{A^k} \Phi^i \Phi^j dA_{\frac{k}{2}}^k = \int \int_{A^k} B_{1i} B_{1j} dA^k = B_{1i} B_{1j} \int \int_{A^k} dA^k = \Delta^k B_{1i} B_{1j} \text{ itd.},$$

gdzie  $\Delta^k$  oznacza pole elementu, otrzymamy wyrażenie na  $G^{ij}$  w postaci identycznej, jak w [5]

$$(4.12) \quad G^{ij} = K \Delta^k [B_{1i} B_{1j} + B_{2i} B_{2j} + 2(1+\nu) B_{3i} B_{3j} - \nu (B_{1i} B_{2j} + B_{1j} B_{2i})].$$

Wyrażenie (4.11) przekształcimy korzystając z zależności

$$\Omega_{,s}^i = -\Omega_{,x}^i \sin \alpha + \Omega_{,y}^i \cos \alpha, \quad i = 1, 2, 3,$$

gdzie  $\Omega_{,x}^i = D_{2i}$ ,  $\Omega_{,y}^i = D_{3i}$  oraz biorąc pod uwagę, że

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma^k} \Phi^i \Omega_{,s}^j \sin \alpha \cos \alpha d\Gamma^k &= \oint_{\Gamma^k} B_{1i} (-D_{2j} \sin \alpha + D_{3j} \cos \alpha) \sin \alpha \cos \alpha d\Gamma^k = \\ &= \sum_{k=1}^3 B_{1i} (-D_{2j} \sin \alpha_k + D_{3j} \cos \alpha_k) \sin \alpha_k \cos \alpha_k a_k. \end{aligned}$$

Otrzymamy ostatecznie wyrażenie identyczne, jak w pracy [5]

$$(4.13) \quad H^{ij} = \sum_{k=1}^3 a_k P_{kj} F_{ki},$$

gdzie

$$P_{kj} = -D_{2j} \sin \alpha_k + D_{3j} \cos \alpha_k,$$

$$F_{ki} = \sum_{l=1}^3 E_{kl} B_{li},$$

$$E_{i1} = -E_{i2} = -\sin \alpha_i \cos \alpha_i,$$

$$E_{i3} = \cos 2\alpha_i.$$

Należy tutaj zaznaczyć, że za pomocą elementu trójkątnego o stałych momentach uzyskano szereg dobrych rezultatów w analizie statycznej płyt [5, 6, 7], pomimo że funkcje kształtu nie spełniają kryteriów ciągłości.

Zupełnie podobnie uzyskać można macierze dla innych elementów trójkątnych. Poniżej krótko naszkicowano kilka takich elementów.

Na początek rozpatrzmy element trójkątny (rys. 4) o stałych momentach, którego ugięcia opisane są zupełnym wielomianem stopnia drugiego

$$(4.14) \quad w = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 x^2 + a_5 xy + a_6 y^2.$$

Funkcje kształtu dla ugięcia otrzymamy przyjmując jako parametry węzłowe ugięcia w sześciu punktach elementu (rys. 4).

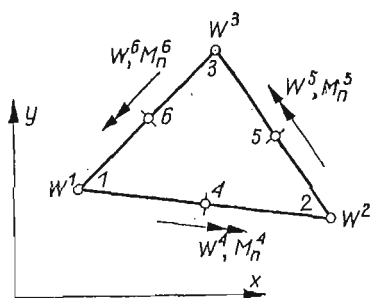
Wyrażenie (4.12) pozostaje nadal ważne, gdyż funkcje  $\Phi^*$ ,  $\Psi^\lambda$ ,  $X^\mu$  są identyczne, jak poprzednio. Jednakże całki liniowe w (4.11) nie są teraz łatwe do obliczenia, gdyż po zróżniczkowaniu pozostają jeszcze człony liniowe. Przez całkowanie numeryczne można w konkretnych przypadkach ominąć te trudności.

Inne, bardziej złożone elementy trójkątne dla modelu mieszanego proponują BRON i DHATT [10]. Element nazywany przez nich T11 powstaje przez przyjęcie jako parametrów węzłowych ugięć i momentów w wierzchołkach trójkąta. Stąd  $\Phi^*$ ,  $\Psi^\lambda$ ,  $X^\mu$ ,  $\Omega^i$  opisane są wielomianami stopnia pierwszego. W elemencie T22 dla funkcji kształtu przyjęto zupełny wielomian stopnia drugiego, zarówno dla momentów, jak i ugięć.

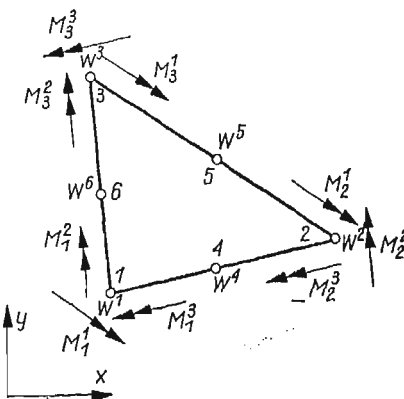
VISSER w pracy [11] wprowadził element trójkątny o liniowo zmiennych momentach i parabolicznie zmiennych ugięciach. Ugięcia uzależnione są w sposób typowy od sześciu



parametrów (jak w T22), natomiast momenty płytowe od dziewięciu momentów normalnych, do linii równoległych do boków trójkąta (rys. 5). Wyniki uzyskane za pomocą tego elementu są szczególnie dobre [11].



Rys. 4.



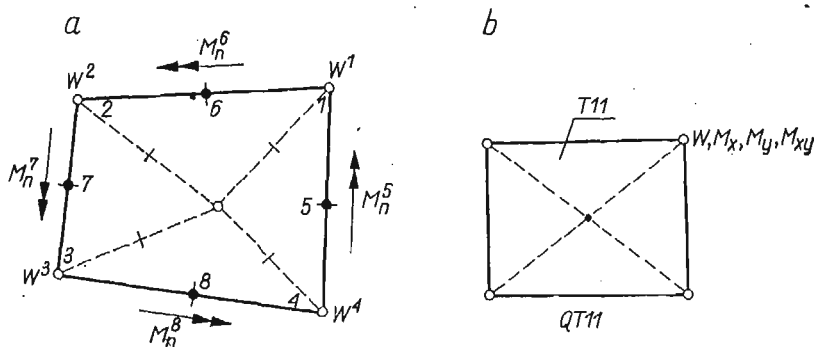
Rys. 5.

Oczywiste jest, że można tworzyć elementy jeszcze bardziej złożone, podobnie jak dla metody przemieszczeń, uzyskując ciągłość nawet drugich pochodnych funkcji  $\Phi^*$ ,  $\Psi^*$ ,  $X^*$ ,  $\Omega^*$  [20].

Macierze tych elementów można także uzyskać za pomocą związków (3.6).

### 5. Elementy prostokątne

Najprostszy sposób tworzenia elementów prostokątnych (czworokątnych) polega na połączeniu dwóch lub czterech elementów trójkątnych i wyeliminowaniu z otrzymanej w ten sposób macierzy elementu wszystkich parametrów wewnętrznych. Na rys. 6 poka-



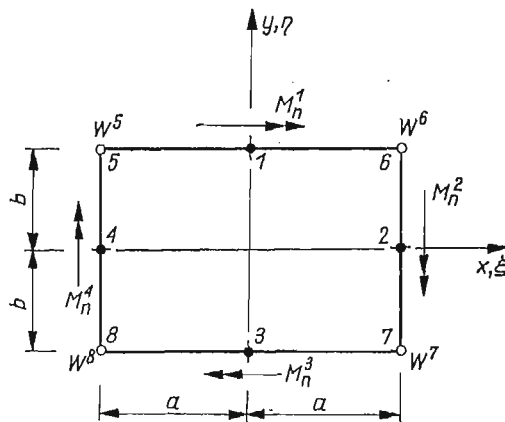
Rys. 6.

zono element czworokątny HERRMANNA [5] i element prostokątny QT11 BRONA i DHATTA [10].

Alternatywnie można wyznaczyć macierze elementów prostokątnych przez określenie wyrażeń aproksymujących  $w$ ,  $m_x$ ,  $m_y$ ,  $m_{xy}$  i wykorzystanie związków (3.6).

Pokażemy to na przykładzie elementu prostokątnego o liniowo zmiennych momentach  $m_x$  i  $m_y$ , stałym, zależnym od ugięć wierzchołków elementu momencie skręcającym  $m_{xy}$  oraz ugięciach opisanych wielomianem

$$(5.1) \quad w = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 xy.$$



Rys. 7.

Element ten zaproponował BÄCKLUND w pracy [7] (rys. 7). Wyrażenia aproksymujące mają postać [7]:

$$(5.2) \quad m_x = \frac{1}{4b} [(1 + \xi)(1 - \xi)] \begin{Bmatrix} M_n^2 \\ M_n^4 \end{Bmatrix},$$

$$m_y = \frac{1}{4a} [(1 + \eta)(1 - \eta)] \begin{Bmatrix} M_n^1 \\ M_n^3 \end{Bmatrix},$$

$$m_{xy} = \frac{1}{4K(1 + \nu)ab} [1 - 1 \quad 1 \quad -1] \begin{Bmatrix} W^5 \\ W^6 \\ W^7 \\ W^8 \end{Bmatrix},$$

$$w = \frac{1}{4} [(1 - \xi + \eta - \xi\eta)(1 + \xi + \eta + \xi\eta)(1 + \xi - \eta - \xi\eta)(1 - \xi - \eta + \xi\eta)] \begin{Bmatrix} W^5 \\ W^6 \\ W^7 \\ W^8 \end{Bmatrix},$$

gdzie  $\xi = x/a$ ,  $\eta = y/b$ .

Ponieważ związki (5.2) określają w sposób jednoznaczny funkcje kształtu, możemy bez trudności określić współczynniki macierzy elementu. Z uwagi na to, że ugięcia i momenty skręcające uzależnione są od tych samych parametrów — ugięć wierzchołków — macierz elementu będzie miała teraz wymiar  $8 \times 8$  i postać

$$(5.3) \quad \left[ \frac{G}{H^T} \mid \frac{H}{L} \right] = \left[ \begin{array}{cc|ccc} k_{11} & k_{12} & & k_{14} & \\ k_{21} & k_{22} & & k_{24} & \\ \hline k_{41} & k_{42} & k_{33} + k_{34} + k_{43} & & \end{array} \right].$$

Ponadto funkcje  $X^u$  są teraz stałe w elemencie stąd  $k_{34}^{ij} = k_{43}^{ij} = 0$ .

Poniżej przykładowo wyznaczymy kilka wyrazów tej macierzy. Całą macierz nieco w innej postaci można znaleźć w cytowanej pracy BÄCKLUNDA [7]

$$\begin{aligned} k_{11}^1 &= K \int \int_{A^k} \Phi^1 \Phi^1 dA^k = K \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \Phi^1 \Phi^1 ab d\xi d\eta = \\ &= Kab \int_{-1}^1 d\xi \int_{-1}^1 \frac{1}{4b} (1+\xi) \frac{1}{4b} (1+\xi) d\xi = \frac{Ka}{3b}, \\ k_{14}^{23} &= - \int \int_{A^k} \Phi_{,x}^2 \Omega_{,x}^3 dA^k - \oint_{\Gamma^k} \Omega_{,s}^3 \sin \alpha \cos \alpha d\Gamma^k = \\ &= -ab \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left( -\frac{1}{4ab} \right) \frac{1}{4a} (1-\eta) d\xi d\eta = \frac{1}{4a}. \end{aligned}$$

Podobnie, jak dla elementów trójkątnych można tworzyć elementy prostokątne o bardziej skomplikowanej budowie.

## 6. Podsumowanie

Na zakończenie należy zwrócić uwagę, że wyrażenie (3.6) ma postać ogólniejszą od analogicznych równań tego typu uzyskanych metodami wariacyjnymi. Postać funkcjonału Reissnera dla metody elementów skończonych zależy bowiem od charakteru ciągłości funkcji  $w$ ,  $m_x$ ,  $m_y$ ,  $m_{xy}$  pomiędzy elementami [1].

Metoda ortogonalizacyjna okazuje się dobrym narzędziem budowania macierzy elementu dla modelu mieszanego metody elementów skończonych i można ją wykorzystać do innych problemów (pręty, tarcze, powłoki).

Otrzymane wzory są niezależne od kształtu elementu i pozwalają na łatwe i szybkie wyznaczenie poszczególnych wyrazów macierzy dla konkretnych elementów. Wzory nadają się do napisania uniwersalnej procedury dla EMC na tworzenie macierzy elementu.

## Literatura cytowana w tekście

1. T. H. H. PIAN, P. TONG, *Basis of finite element methods for solid continua*, Int. J. Num. Meth. Eng., 1 (1969), 3—28.
2. O. E. HANSTEN, *Finite element methods as applications of variational principles*, roz. 15 *Finite element methods in stress analysis*, (ed. I. HOLAND, K. BELL), TAPPIR, Thronheim, Norway, 1970.
3. R. S. DUNHAM, K. S. PISTER, *A finite element application of the Hallinger — Reissner variational theorem*, 2nd Conference on Matrix Method in Structural Mechanics, Wright-Patterson Air Force Base, Ohio 1968.
4. L. R. HERRMANN, *A bending analysis for plates*, Proc. Conf. on Matrix Method in Structural Mechanics, AFFDL-TR-66-80, 1965.
5. L. R. HERRMANN, *Finite-element bending analysis of plates*, J. Eng. Mech. Div., 93 (1967) 13—26]
6. K. HELLAN, *Analysis of elastic plates in flexure by a simplified finite element method*, Acta Politechnica Scandinavica, Civil Eng. Series 46, Thronheim 1967.

7. J. BÄCKLUND, *Mixed finite element analysis of plates in bending*, Chalmers Tekniska Högskola, Inst. f. byggnadsstatik, Publ. 71: 4, Göteborg 1972.
8. M. A. CRISFILD, dyskusja do pracy [5], J. Eng. Mech. Div., 94 (1968) 706—707.
9. R. D. COOK, dyskusja do pracy [5], J. Eng. Mech. Div., 94 (1969) 859—898.
10. J. BRON, G. DHATT, *Mixed quadrilateral element for bending*, AIAA Journal, 10 (1972) 1359—1361.
11. W. VISSER, *A refined mixed-type plate bending element*, AIAA Journal, 7 (1968) 1801—1803.
12. A. CHATTERJEE, A. V. SETLUR, *A mixed finite element formulation for plate problems*, Int. J. Num. Meth. Eng., 4 (1972) 67—84.
13. L. R. HERRMANN, D. M. CAMPBELL, *A finite-element analysis for thin shells*, AIAA Journal, 6 (1968) 1842—1847.
14. L. R. HERRMANN, W. E. MASON, *Mixed formulation for finite element shell analysis*, University of California.
15. E. REISSNER, *On variational theorem in elasticity*, J. Math. Physics, 29 (1950) 90—95.
16. B. A. SZABO, G. C. LEE, *Derevation of stiffness matrices for problems in plane elasticity by Galerkin's method*, Int. J. Num. Meth. Eng., 1 (1969) 301—310.
17. H. MIKOŁAJCZAK, B. WOSIEWICZ, *Macierz sztywności elementu zginanej płyty trójwarstwowej*, Mech. Teoret. Stos., 11 (1973) 473—485.
18. O. C. ZIENKIEWICZ, *Metoda elementów skończonych*, Arkady, Warszawa 1972.
19. V. KOLAR, J. KRAROVICHIL, M. ZLAMAL, A. ŽENIŠEK, *Technical, phisical and mathematical principles of the finite element methods*, Rozpr. ČSAV, 81 (1971).
20. A. ŽENIŠEK *Některé typy prvků a náhradních funkci v metode konečných prvku*, Staveb. Časopis, 18 (1970) 48—62.

## Р е з ю м е

ПОСТРОЕНИЕ МАТРИЦЫ ЖЕСТКОСТИ ЭЛЕМЕНТА ИЗГИБАЕМОЙ ПЛИТЫ  
ДЛЯ СМЕШАННОЙ МОДЕЛИ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА БУБНОВА-ГАЛЕРКИНА

Методом Бубнова-Галеркина ([16, 17]) выводятся общие выражения на матрицу элемента применительно к анализу изгиба тонких изотропных плит с помощью смешанного метода конечных элементов. Область плиты разделяется на элементы, для каждого элемента прогибы  $w$  и моменты  $m_x$ ,  $m_y$ ,  $m_{xy}$  аппроксимировались с помощью зависимостей (2.2). После подстановки (2.2) в дифференциальные уравнения задачи (2.1), и последующей ортогонализации полученных таким образом выражений на ошибку аппроксимации  $f_1, f_2, f_3, f_4$  относительно системы функций вида  $\Phi^\alpha, \Psi^\lambda, X^\mu, \Omega^i$ , согласно зависимости (3.2), получена система уравнений (3.5). Матрица коэффициентов, при неизвестных является искомой матрицей элемента.

Применение полученных формул показано на примере треугольного элемента с постоянными моментами (Геррманн [5], Геллан [6]) и прямоугольного элемента с линейно изменяющимися моментами  $m_x$  и  $m_y$  и с постоянными  $m_{xy}$  (Баклунд [7]). Проведен краткий обзор различного вида элементов.

## S u m m a r y

DETERMINATION OF THE ELEMENT MATRIX OF A PLATE OF BENDING, FOR A MIXED  
MODEL BY THE ORTHOGONALIZATION METHOD

The method of orthogonalization [16, 17] is used to derive a general expression for the element matrix used in bending problems of thin isotropic plates solved by means of the mixed finite element model. The plate is divided into elements. In each of the elements deflections  $w$  and moments  $m_x$ ,  $m_y$ ,  $m_{xy}$  are approximated by Eqs. (2.2). Inserting Eqs. (2.2) into the differential Eqs. (2.1) and orthogonalizing the expressions obtained for  $f_1, f_2, f_3, f_4$  with the functions  $\Phi^\alpha, \Psi^\lambda, X^\mu, \Omega^i$ , we obtain the set of Eqs. (3.5). The matrix of coefficients at the unknowns is the element matrix sought for.

The method is illustrated by the example of a triangular with constant moments (Herrmann [5], Hellan [6]) and of a rectangular element with linearly variable moments  $m_x$ ,  $m_y$  and constant  $m_{xy}$  (Bäcklund [7]). Short review of various elements is presented.

INSTYTUT BUDOWNICTWA WODNO-MELIORACYJNEGO AKADEMII ROLNICZEJ, POZNAŃ

*Praca została złożona w Redakcji dnia 3 grudnia 1973 r.*

---