

ZASTOSOWANIE METODY MACIERZY PRZENIESIENIA DO ANALIZY
DYNAMICZNEJ PRĘTÓW CIENKOŚCIENNYCH

EUGENIUSZ ŚWITOŃSKI (GŁIWICE)

Oznaczenia

- η przemieszczenie punktów osi środków zginania w kierunku osi Y ,
 ξ przemieszczenie punktów osi środków zginania w kierunku osi Z ,
 ζ przemieszczenie punktów osi środków zginania w kierunku osi X ,
 φ kąt obrotu przekroju,
 x, y, z główne centralne osie bezwładności przekroju,
 y_α współrzędna środka zginania w kierunku osi Y ,
 z_α współrzędna środka zginania w kierunku osi Z ,
 E moduł sprężystości podłużnej,
 G moduł sprężystości poprzecznej,
 γ ciężar objętościowy materiału, z którego wykonano pręt,
 A powierzchnia przekroju pręta,
 g przyspieszenie ziemskie,
 J_y moment bezwładności przekroju względem osi y , $J_y = \int_A z^2 dA$,
 J_z moment bezwładności przekroju względem osi z , $J_z = \int_A y^2 dA$,
 J_ω wycinkowy moment bezwładności przekroju $J_\omega = \int_A \omega^2 dA$,
 J_s moment bezwładności przekroju przy czystym skręcaniu.

1. Wstęp

Zagadnieniom dynamiki i stateczności prętów cienkościennych o profilu otwartym poświęcono wiele prac. W większości dotyczą one prętów o stałym i charakterystycznym przekroju, dla pewnych szczególnych warunków brzegowych [1, 2, 3, 4].

W przypadku prętów o zmiennym przekroju zagadnienie dynamiki i stateczności sprowadza się do rozwiązania układu równań różniczkowych o współczynnikach funkcyjnych, przy czym funkcje tych współczynników zależą od charakteru zmiany przekroju. Rozwiązanie tego problemu można uzyskać w wyniku pracochłonnych obliczeń stosując jedną z metod przybliżonych [5, 6]. Każdorazowy inny charakter zmiany przekroju wymaga w ogólnym przypadku ponownego rozwiązania.

Zastępując pręt o dowolnie zmiennym przekroju, prętem o przekroju odcinkowo stałym (skokowo zmiennym) i stosując metodę macierzy przeniesienia, możemy otrzymać rozwiązanie powyższego problemu w znacznie prostszej postaci, nadającej się stosunkowo łatwo zaprogramować na elektroniczną maszynę cyfrową [7, 8, 9]. Dodatkową zaletą

metody macierzy przeniesienia jest możliwość każdorazowego określenia granic, w jakich powinno zawierać się rozwiązanie ściśle, a więc można otrzymać rozwiązanie o żądanej dokładności.

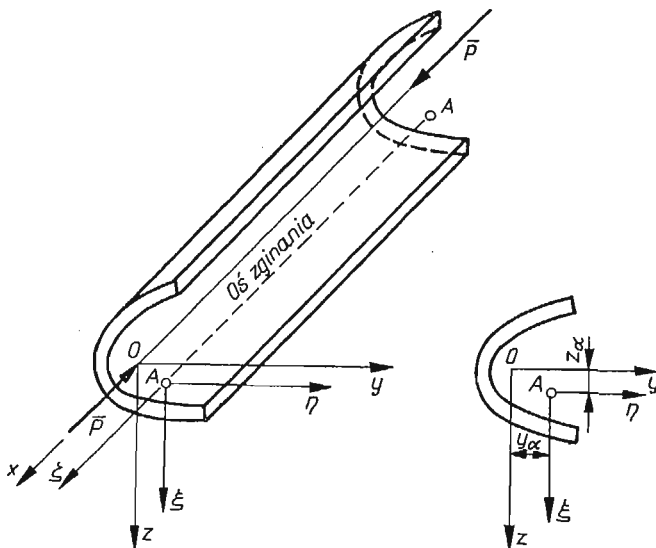
Metoda macierzy przeniesienia polega na określeniu macierzy zwanej *macierzą przeniesienia*, którą otrzymuje się w wyniku iloczynu macierzy przęsła i macierzy przekroju. Macierz przęsła buduje się na podstawie rozwiązania danego problemu dla pręta o stałym przekroju. Natomiast macierz przekroju otrzymuje się z warunków statycznych bądź kinetostatycznych i z warunków nierozdzielności przemieszczeń [10].

Celem pracy jest rozwiązanie zagadnienia drgań swobodnych i stateczności prostych jednoprzęsłowych prętów cienkościennych za pomocą metody macierzy przeniesienia, programując ją na elektroniczną maszynę cyfrową.

Zagadnienie rozpatrzono w ujęciu liniowo-sprężystym przy założeniach tzw. *technicznej teorii prętów cienkościennych* [4]. Rozwiązanie zagadnienia stateczności otrzymano jako szczególny przypadek rozwiązania zagadnienia drgań swobodnych (gdy $P \rightarrow P_{kr}$ to $\omega_n \rightarrow 0$).

2. Określenie macierzy przęsła

Macierz przęsła określa się na podstawie rozwiązania równań różniczkowych danego problemu dla pręta o stałym przekroju, przy czym musi to być rozwiązanie, w którym



Rys. 1

stałymi całkowania są wartości funkcji w przekroju początkowym oraz wartości proporcjonalne do kilku pierwszych pochodnych tej funkcji również w przekroju początkowym.

Podstawowe równania różniczkowe zagadnienia drgań swobodnych pręta cienkościennego o profilu otwartym i stałym przekroju, obciążonego siłą P działającą centralnie (rys. 1) mają postać [4]:

$$\begin{aligned}
 & EA \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - \frac{\gamma A}{g} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0, \\
 & EJ_z \frac{\partial^4 \eta}{\partial x^4} - \frac{\gamma J_z}{g} \frac{\partial^4 \eta}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\gamma A}{g} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + P \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \frac{\gamma A z_\alpha}{g} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + P z_\alpha \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0, \\
 & EJ_z \frac{\partial^4 \xi}{\partial x^4} - \frac{\gamma J_y}{g} \frac{\partial^4 \xi}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\gamma A}{g} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + P \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - \frac{\gamma A y_\alpha}{g} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - P y_\alpha \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0, \\
 & \frac{\gamma A z_\alpha}{g} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + P z_\alpha \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} - \frac{\gamma A y_\alpha}{g} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - P y_\alpha \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + EJ_\omega \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \\
 & \quad - \frac{\gamma J_\omega}{g} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\gamma A r^2}{g} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - GJ_x \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + Pr^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0,
 \end{aligned}
 \tag{2.1}$$

gdzie

$$r^2 = \frac{J_0}{A} + y_\alpha^2 + z_\alpha^2, \quad J_0 = J_z + J_y.$$

Pierwsze równanie wyrażenia (2.1) przedstawia równanie różniczkowe swobodnych drgań podłużnych pręta i jest niezależne od pozostałych trzech. Rozwiązanie jego można znaleźć w każdym podstawowym podręczniku dotyczącym dynamiki o ciągłym rozkładzie mas. Dalsze więc rozważania dotyczyć będą tylko swobodnych drgań giętno-skrętnych, określonych pozostałymi trzema równaniami różniczkowymi.

Stosując metodę rozdziału zmiennych przedstawioną przez Poissona, możemy w przypadku drgań swobodnych funkcje $\eta(x, t)$, $\xi(x, t)$, $\varphi(x, t)$ wyrazić w następującej postaci:

$$\begin{aligned}
 \eta(x, t) &= \sum_{n=1,2,3} \theta_n(x) \sin \omega_n t, \\
 \xi(x, t) &= \sum_{n=1,2,3} \Psi_n(x) \sin \omega_n t, \\
 \varphi(x, t) &= \sum_{n=1,2,3} \kappa_n(x) \sin \omega_n t,
 \end{aligned}
 \tag{2.2}$$

gdzie ω_n — n -ta częstość kątowa drgań swobodnych pręta.

Podstawiając zależności (2.2) do równań (2.1) otrzymamy

$$\begin{aligned}
 & EJ_z \theta_n^{IV} + \left(\frac{\gamma J_z}{g} \omega_n^2 + P \right) \theta_n'' - \frac{\gamma A}{g} \omega_n^2 \theta_n - \frac{\gamma A z_\alpha}{g} \omega_n^2 \kappa_n + P z_\alpha \kappa_n'' = 0, \\
 & EJ_y \Psi_n^{IV} + \left(\frac{\gamma J_y}{g} \omega_n^2 + P \right) \Psi_n'' - \frac{\gamma A}{g} \omega_n^2 \Psi_n + \frac{\gamma A y_\alpha}{g} \omega_n^2 \kappa_n - P y_\alpha \kappa_n'' = 0, \\
 & EJ_\omega \kappa_n^{IV} + \left(Pr^2 + \frac{\gamma J_\omega}{g} \omega_n^2 - GJ_x \right) \kappa_n'' - \frac{\gamma A r^2}{g} \omega_n^2 \kappa_n - \frac{\gamma A z_\alpha}{g} \omega_n^2 \theta_n + \\
 & \quad + P z_\alpha \theta_n'' + \frac{\gamma A y_\alpha}{g} \omega_n^2 \Psi_n - P y_\alpha \Psi_n'' = 0.
 \end{aligned}
 \tag{2.3}$$

Wprowadźmy do równań (2.3) następujące oznaczenia:

$$\begin{aligned} a_1 &= EJ_x, & a_2 &= \left(\frac{\gamma J_z}{g} \omega_n^2 + P \right), & a_3 &= -\frac{\gamma A}{g} \omega_n^2, \\ a_4 &= -\frac{\gamma A z_\alpha}{g} \omega_n^2, & a_5 &= P z_\alpha, \\ b_1 &= EJ_y, & b_2 &= \left(\frac{\gamma J_y}{g} \omega_n^2 + P \right), & b_3 &= -\frac{\gamma A}{g} \omega_n^2, \\ b_4 &= \frac{\gamma A y_\alpha}{g} \omega_n^2, & b_5 &= -P y_\alpha, \\ c_1 &= EJ_\omega, & c_2 &= \left(Pr^2 + \frac{\gamma J_\omega}{g} \omega_n^2 - GJ_x \right), & c_3 &= -\frac{\gamma Ar^2}{g} \omega_n^2, \\ c_4 &= -\frac{\gamma A z_\alpha}{g} \omega_n^2, & c_5 &= P z_\alpha, & c_6 &= \frac{\gamma A y_\alpha}{g} \omega_n^2, & c_7 &= -P y_\alpha. \end{aligned}$$

Wówczas równania (2.3) przyjmą postać

$$(2.4) \quad \begin{aligned} a_1 \theta_n^{IV} + a_2 \theta_n'' + a_3 \theta_n + a_4 \varkappa_n + a_5 \varkappa_n'' &= 0, \\ b_1 \Psi_n^{IV} + b_2 \Psi_n'' + b_3 \Psi_n + b_4 \varkappa_n + b_5 \varkappa_n'' &= 0, \\ c_1 \varkappa_n^{IV} + c_2 \varkappa_n'' + c_3 \varkappa_n + c_4 \theta_n + c_5 \theta_n'' + c_6 \Psi_n + c_7 \Psi_n'' &= 0. \end{aligned}$$

Rozwiązanie w postaci zamkniętej, np. transformacji Laplace'a, równań różniczkowych (2.4) prowadzi do bardzo pracochłonnych obliczeń i jest z praktycznego punktu widzenia niemalże nieosiągalne. Dlatego, podobnie jak w pracach [11, 12, 13], do rozwiązania równań (2.4) zastosowano rozwinięcie funkcji θ_n , Ψ_n , \varkappa_n w szeregi potęgowe w postaci

$$(2.5) \quad \begin{aligned} \theta_n &= \theta_0^s + \theta_1^s x + \theta_2^s x^2 + \theta_3^s x^3 + \dots + \theta_r^s x^r, \\ \Psi_n &= \Psi_0^s + \Psi_1^s x + \Psi_2^s x^2 + \Psi_3^s x^3 + \dots + \Psi_r^s x^r, \\ \varkappa_n &= \varkappa_0^s + \varkappa_1^s x + \varkappa_2^s x^2 + \varkappa_3^s x^3 + \dots + \varkappa_r^s x^r. \end{aligned}$$

Pierwsze cztery współczynniki każdego z szeregów są wartościami brzegowymi odpowiednich funkcji θ_n , Ψ_n , \varkappa_n dla $x = 0$, pomnożonymi przez liczbę jeden, dwa lub sześć.

Wstawiając funkcje (2.5) do równań różniczkowych (2.4) i przyrównując odpowiednie współczynniki do zera otrzymamy następujące wzory rekurencyjne:

$$(2.6) \quad \begin{aligned} \theta_r^s &= a_2(r) \theta_{r-2}^s + a_3(r) \theta_{r-4}^s + a_4(r) \varkappa_{r-4}^s + a_5(r) \varkappa_{r-2}^s, \\ \Psi_r^s &= b_2(r) \Psi_{r-2}^s + b_3(r) \Psi_{r-4}^s + b_4(r) \varkappa_{r-4}^s + b_5(r) \varkappa_{r-2}^s, \\ \varkappa_r^s &= c_2(r) \varkappa_{r-2}^s + c_3(r) \varkappa_{r-4}^s + c_4(r) \theta_{r-4}^s + c_5(r) \theta_{r-2}^s + c_6(r) \Psi_{r-4}^s + c_7(r) \Psi_{r-2}^s, \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned} a_2(r) &= -\frac{a_2}{r(r-1)a_1}, & a_3(r) &= -\frac{a_3}{r(r-1)(r-2)(r-3)a_1}, \\ a_4(r) &= -\frac{a_4}{r(r-1)(r-2)(r-3)a_1}, & a_5(r) &= -\frac{a_5}{r(r-1)a_1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b_2(r) &= -\frac{b_2}{r(r-1)b_1}, & b_3(r) &= -\frac{b_3}{r(r-1)(r-2)(r-3)b_1}, \\
 b_4(r) &= -\frac{b_4}{r(r-1)(r-2)(r-3)b_1}, & b_5(r) &= -\frac{b_5}{r(r-1)b_1}, \\
 c_2(r) &= -\frac{c_2}{r(r-1)c_1}, & c_3(r) &= -\frac{c_3}{r(r-1)(r-2)(r-3)c_1}, \\
 c_4(r) &= -\frac{c_4}{r(r-1)(r-2)(r-3)c_1}, & c_5(r) &= -\frac{c_5}{r(r-1)c_1}, \\
 c_6(r) &= -\frac{c_6}{r(r-1)(r-2)(r-3)c_1}, & c_7(r) &= -\frac{c_7}{r(r-1)c_1}.
 \end{aligned}$$

Po dokonaniu przekształceń otrzymamy następujące wyrażenia na funkcje θ_n , Ψ_n , κ_n i ich pochodne:

$$(2.7) \quad \begin{bmatrix} \theta_n \\ \theta'_n \\ \theta''_n \\ \theta'''_n \\ \Psi_n \\ \Psi'_n \\ \Psi''_n \\ \Psi'''_n \\ \kappa_n \\ \kappa'_n \\ \kappa''_n \\ \kappa'''_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 & s_2 & s_3 & s_4 & s_5 & s_6 & s_7 & s_8 & s_9 & s_{10} & s_{11} & s_{12} \\ s'_1 & s'_2 & s'_3 & s'_4 & s'_5 & s'_6 & s'_7 & s'_8 & s'_9 & s'_{10} & s'_{11} & s'_{12} \\ s''_1 & s''_2 & s''_3 & s''_4 & s''_5 & s''_6 & s''_7 & s''_8 & s''_9 & s''_{10} & s''_{11} & s''_{12} \\ s'''_1 & s'''_2 & s'''_3 & s'''_4 & s'''_5 & s'''_6 & s'''_7 & s'''_8 & s'''_9 & s'''_{10} & s'''_{11} & s'''_{12} \\ s_{13} & s_{14} & s_{15} & s_{16} & s_{17} & s_{18} & s_{19} & s_{20} & s_{21} & s_{22} & s_{23} & s_{24} \\ s'_{13} & s'_{14} & s'_{15} & s'_{16} & s'_{17} & s'_{18} & s'_{19} & s'_{20} & s'_{21} & s'_{22} & s'_{23} & s'_{24} \\ s''_{13} & s''_{14} & s''_{15} & s''_{16} & s''_{17} & s''_{18} & s''_{19} & s''_{20} & s''_{21} & s''_{22} & s''_{23} & s''_{24} \\ s'''_{13} & s'''_{14} & s'''_{15} & s'''_{16} & s'''_{17} & s'''_{18} & s'''_{19} & s'''_{20} & s'''_{21} & s'''_{22} & s'''_{23} & s'''_{24} \\ s_{25} & s_{26} & s_{27} & s_{28} & s_{29} & s_{30} & s_{31} & s_{32} & s_{33} & s_{34} & s_{35} & s_{36} \\ s'_{25} & s'_{26} & s'_{27} & s'_{28} & s'_{29} & s'_{30} & s'_{31} & s'_{32} & s'_{33} & s'_{34} & s'_{35} & s'_{36} \\ s''_{25} & s''_{26} & s''_{27} & s''_{28} & s''_{29} & s''_{30} & s''_{31} & s''_{32} & s''_{33} & s''_{34} & s''_{35} & s''_{36} \\ s'''_{25} & s'''_{26} & s'''_{27} & s'''_{28} & s'''_{29} & s'''_{30} & s'''_{31} & s'''_{32} & s'''_{33} & s'''_{34} & s'''_{35} & s'''_{36} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_0^s \\ \theta_1^s \\ \theta_2^s \\ \theta_3^s \\ \Psi_0^s \\ \Psi_1^s \\ \Psi_2^s \\ \Psi_3^s \\ \kappa_0^s \\ \kappa_1^s \\ \kappa_2^s \\ \kappa_3^s \end{bmatrix},$$

gdzie $(\)' = \frac{d}{dx}$.

Macierz kwadratową utworzoną ze współczynników $s_1 - s_{36}$ nazywamy macierzą przęśłą. Poszczególne elementy macierzy przęśłą są określone przez następujące funkcje:

$$(2.8) \quad \begin{aligned}
 s_1 &= 1 + \sum_{r=1}^m A_{2r}^1 x^{2r}, & s_2 &= x + \sum_{r=2}^m A_{2r+1}^1 x^{2r+1}, & s_3 &= x^2 + \sum_{r=2}^m A_{2r}^2 x^{2r}, \\
 s_4 &= x^3 + \sum_{r=2}^m A_{2r+1}^2 x^{2r+1}, & s_5 &= \sum_{r=2}^m A_{2r}^3 x^{2r}, & s_6 &= \sum_{r=2}^m A_{2r+1}^3 x^{2r+1}, \\
 s_7 &= \sum_{r=2}^m A_{2r}^4 x^{2r}, & s_8 &= \sum_{r=2}^m A_{2r+1}^4 x^{2r+1}, & s_9 &= \sum_{r=2}^m A_{2r}^5 x^{2r},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(2.8) \quad & s_{10} = \sum_{r=2}^m A_{2r+1}^5 x^{2r+1}, \quad s_{11} = \sum_{r=2}^m A_{2r}^6 x^{2r}, \quad s_{12} = \sum_{r=2}^m A_{2r+1}^6 x^{2r+1}, \\
& [c.d.] \\
& s_{13} = \sum_{r=2}^m B_{2r}^1 x^{2r}, \quad s_{14} = \sum_{r=2}^m B_{2r+1}^1 x^{2r+1}, \quad s_{15} = \sum_{r=2}^m B_{2r}^2 x^{2r}, \\
& s_{16} = \sum_{r=2}^m B_{2r+1}^2 x^{2r+1}, \quad s_{17} = 1 + \sum_{r=2}^m B_{2r}^3 x^{2r}, \quad s_{18} = x + \sum_{r=2}^m B_{2r+1}^3 x^{2r+1}, \\
& s_{19} = x^2 + \sum_{r=2}^m B_{2r}^4 x^{2r}, \quad s_{20} = x^3 + \sum_{r=2}^m B_{2r+1}^4 x^{2r+1}, \quad s_{21} = \sum_{r=2}^m B_{2r}^5 x^{2r}, \\
& s_{22} = \sum_{r=2}^m B_{2r+1}^5 x^{2r+1}, \quad s_{23} = \sum_{r=2}^m B_{2r}^6 x^{2r}, \quad s_{24} = \sum_{r=2}^m B_{2r+1}^6 x^{2r+1}, \\
& s_{25} = \sum_{r=2}^m C_{2r}^1 x^{2r}, \quad s_{26} = \sum_{r=2}^m C_{2r+1}^1 x^{2r+1}, \quad s_{27} = \sum_{r=2}^m C_{2r}^2 x^{2r}, \\
& s_{28} = \sum_{r=2}^m C_{2r+1}^2 x^{2r+1}, \quad s_{29} = \sum_{r=2}^m C_{2r}^3 x^{2r}, \quad s_{30} = \sum_{r=2}^m C_{2r+1}^3 x^{2r+1}, \\
& s_{31} = \sum_{r=2}^m C_{2r}^4 x^{2r}, \quad s_{32} = \sum_{r=2}^m C_{2r+1}^4 x^{2r+1}, \quad s_{33} = 1 + \sum_{r=2}^m C_{2r}^5 x^{2r}, \\
& s_{34} = x + \sum_{r=2}^m C_{2r+1}^5 x^{2r+1}, \quad s_{35} = x^2 + \sum_{r=2}^m C_{2r}^6 x^{2r}, \quad s_{36} = x^3 + \sum_{r=2}^m C_{2r+1}^6 x^{2r+1}.
\end{aligned}$$

Funkcje (2.8) zostały wyprowadzone na podstawie zależności (2.5) i (2.6).

Współczynniki $A_{2r}^k, A_{2r+1}^k, B_{2r}^k, B_{2r+1}^k, C_{2r}^k, C_{2r+1}^k$, dla $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ i $r = 2, 3, 4, 5, \dots, m$ obliczone na podstawie wzorów rekurencyjnych (2.6) wyrażają się w postaci

$$\begin{aligned}
(2.9) \quad & A_{2r}^k = a_2(2r)A_{2r-2}^k + a_3(2r)A_{2r-4}^k + a_4(2r)C_{2r-4}^k + a_5(2r)C_{2r-2}^k, \\
& A_{2r+1}^k = a_2(2r+1)A_{2r-1}^k + a_3(2r+1)A_{2r-3}^k + a_4(2r+1)C_{2r-3}^k + a_5(2r+1)C_{2r-1}^k, \\
& B_{2r}^k = b_2(2r)B_{2r-2}^k + b_3(2r)B_{2r-4}^k + b_4(2r)C_{2r-4}^k + b_5(2r)C_{2r-2}^k, \\
& B_{2r+1}^k = b_2(2r+1)B_{2r-1}^k + b_3(2r+1)B_{2r-3}^k + b_4(2r+1)C_{2r-3}^k + b_5(2r+1)C_{2r-1}^k, \\
& C_{2r}^k = c_2(2r)C_{2r-2}^k + c_3(2r)C_{2r-4}^k + c_5(2r)A_{2r-2}^k + c_6(2r)B_{2r-4}^k + c_7(2r)B_{2r-2}^k, \\
& C_{2r+1}^k = c_2(2r+1)C_{2r-1}^k + c_3(2r+1)C_{2r-3}^k + c_5(2r+1)A_{2r-1}^k \\
& \quad + c_6(2r+1)B_{2r-3}^k + c_7(2r+1)B_{2r-1}^k.
\end{aligned}$$

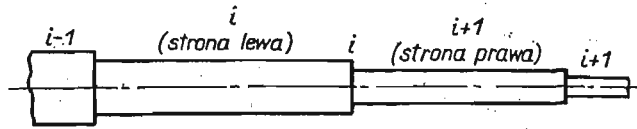
Dla $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ i $r = 0, 1$ współczynniki $A_{2r}^k, A_{2r+1}^k, B_{2r}^k, B_{2r+1}^k, C_{2r}^k, C_{2r+1}^k$ są równe zeru z wyjątkiem następujących:

$$\begin{aligned}
A_0^1 = 1, \quad A_1^1 = 1, \quad A_2^2 = 1, \quad A_3^2 = 1, \quad B_0^3 = 1, \quad B_1^3 = 1, \quad B_2^4 = 1, \quad B_3^4 = 1, \\
C_0^5 = 1, \quad C_1^5 = 1, \quad C_2^6 = 1, \quad C_3^6 = 1.
\end{aligned}$$

3. Określenie macierzy przekroju i macierzy przeniesienia

Macierz przekroju ułożymy dla pręta, którego główne centralne osie bezwładności przekroju poszczególnych odcinków leżą w jednej płaszczyźnie, a oś pręta jest linią prostą.

Wykorzystując warunki statyczne i warunki nierozdzielności przemieszczeń otrzymamy zależności pomiędzy wartościami funkcji $\theta_n, \Psi_n, \kappa_n$ oraz ich pochodnymi z lewej i prawej strony miejsca (rys. 2), w którym następuje skokowa zmiana przekroju.



Rys. 2

Na podstawie tych zależności otrzymamy następującą postać macierzy przekroju

$$(3.1) \quad F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & w_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \frac{J_{z1}}{J_{zp}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} \frac{J_{z1}}{J_{zp}} & 0 & 0 & 0 & 0 & w_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & w_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \frac{J_{y1}}{J_{yp}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} \frac{J_{y1}}{J_{yp}} & w_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{J_{s1}}{J_{sp}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \frac{J_{\omega 1}}{J_{\omega p}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} \frac{J_{\omega 1}}{J_{\omega p}} \end{bmatrix}$$

gdzie $w_1 = -(z_{\alpha p} - z_{\alpha l}), w_2 = (y_{\alpha p} - y_{\alpha l}), w_3 = \frac{Pz_{\alpha}}{EJ_{zp}} \cdot \frac{J_{s1}}{J_{sp}} - \frac{Pz_{\alpha l}}{EJ_{zp}}, w_4 = \frac{Py_{\alpha l}}{EJ_{yp}} - \frac{Py_{\alpha p}}{EJ_{yp}} \cdot \frac{J_{s1}}{J_{sp}}$

Symbole z indeksem „l” dotyczą lewej strony pręta, natomiast symbole z indeksem „p” prawej strony.

Jeżeli przez D_i oznaczymy macierz przesła i -tego, a przez F_i macierz przekroju i -tego (skokowa zmiana), wówczas macierz przeniesienia H dla danego pręta o podziale na W odcinków wyrazi się w postaci

$$(3.2) \quad H = D_W F_{W-1} D_{W-1} F_{W-2} \dots F_1 D_1 \dots F_1 D_1$$

4. Określenie częstości drgań swobodnych i siły krytycznej

Częstości drgań swobodnych określimy przyrównując odpowiedni minor macierzy przeniesienia H (3.2), tzw. wyznacznik charakterystyczny, do zera. Wartości własne tego wyznacznika są częstotliwościami drgań swobodnych. Postać wyznacznika charakterystycznego zależy od warunków brzegowych.

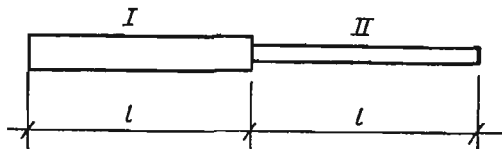
Zagadnienie drgań swobodnych rozwiązano dla pręta obciążonego siłą P działającą centralnie. Jeżeli wielkość siły P obciążającej pręt będzie dążyć do wielkości krytycznej, to częstotliwości drgań swobodnych będą dążyć do zera.

W związku z powyższym otrzymane rozwiązanie dla zagadnienia drgań swobodnych można wykorzystać do określenia obciążenia krytycznego tego pręta, wstawiając tam $\omega_n = 0$. Wówczas wartościami własnymi wyznacznika charakterystycznego będą wartości obciążenia krytycznego.

Całość obliczeń została zaprogramowana w języku ODRA-ALGOL na elektroniczną maszynę cyfrową ODRA-1204.

5. Przykłady liczbowe

Dla ilustracji przedstawionego rozwiązania obliczono częstotliwości drgań swobodnych i siły krytyczne dla pręta składającego się z dwóch odcinków o stałym przekroju (rys. 3).



Rys. 3

Odcinek I ma przekrój przedstawiony na rys. 4a, a odcinek II przekrój przedstawiony na rys. 4b.

Obliczenia przeprowadzono dla długości odcinków $l = 200$ cm, $l = 400$ cm, $l = 600$ cm.

Rozpatrzono następujące warunki brzegowe:

$$(5.1) \quad \begin{array}{ll} x = 0 & \eta = 0, \xi = 0, \varphi = 0, \\ & \eta' = 0, \xi' = 0, \varphi' = 0; \end{array} \quad \begin{array}{ll} x = l & \eta = 0, \xi = 0, \varphi = 0, \\ & \eta' = 0, \xi' = 0, \varphi' = 0; \end{array}$$

$$(5.2) \quad \begin{array}{ll} x = 0 & \eta = 0, \xi = 0, \varphi = 0, \\ & \eta' = 0, \xi' = 0, \varphi' = 0; \end{array} \quad \begin{array}{ll} x = l & \eta = 0, \xi = 0, \varphi = 0 \\ & \eta'' = 0, \xi'' = 0, \varphi'' = 0. \end{array}$$

Wartości obciążenia krytycznego obliczane na podstawie przedstawionego rozwiązania porównano z wartościami obciążenia krytycznego obliczanego przy zastosowaniu transformacji Laplace'a do wyznaczania macierzy przęśła [14]. Otrzymano

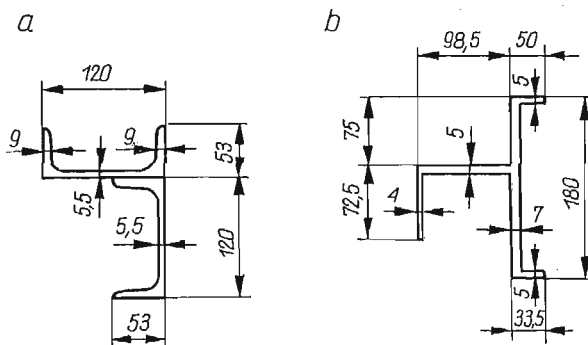
a) dla przekrojów podanych na rys. 4 i warunków brzegowych (5.1):

$$l = 200 \text{ cm}, \quad l = 400 \text{ cm}, \quad l = 600 \text{ cm},$$

$$\omega_{\min} 35,5s^{-1}, \quad 9,9s^{-1}, \quad 3,6s^{-1},$$

$$P_{\min} 776 \text{ kN}, \quad 381 \text{ kN}, \quad 195 \text{ kN},$$

$$P_{\min}^L 776 \text{ kN}, \quad 381 \text{ kN} \quad 195 \text{ kN};$$



Rys. 4

b) dla przekrojów podanych na rys. 4 i warunków brzegowych (5.2):

$$l = 200 \text{ cm}, \quad l = 400 \text{ cm}, \quad l = 600 \text{ cm},$$

$$\omega_{\min} 26,1s^{-1}, \quad 7,9s^{-1}, \quad 3,6s^{-1},$$

$$P_{\min} 536 \text{ kN}, \quad 213 \text{ kN}, \quad 103 \text{ kN},$$

$$P_{\min}^L 536 \text{ kN}, \quad 213 \text{ kN}, \quad 102 \text{ kN},$$

gdzie P_{\min}^L — macierz przęsta obliczona według [14].

6. Wnioski

Analizując przedstawiony algorytm obliczeń i przykłady liczbowe, można wyciągnąć następujące wnioski.

1. Zastosowany w pracy sposób rozwiązania pozwala określić częstotliwości drgań swobodnych i obciążenia krytyczne dla prętów cienkościennych o profilu otwartym i zmiennym przekroju przy dowolnych warunkach brzegowych.

2. Całość bardzo dobrze nadaje się do zaprogramowania i przeprowadzenia obliczeń na elektronicznej maszynie cyfrowej.

3. Porównanie wartości obciążenia krytycznego obliczonego na podstawie rozwiązania zagadnienia drgań swobodnych (40 wyrazów szeregu potęgowego) z wartościami obciążenia krytycznego, obliczonego przy wykorzystaniu transformacji Laplace'a, wskazuje na wystarczającą zbieżność przyjętych funkcji przemieszczeń.

Literatura cytowana w tekście

1. T. PEKÓZ, G. WINTER, *Torsional-flexural buckling of thin-walled sections under eccentric load*, J. Struct. Div. Proc. Amer. Soc. Civil Eng., 1969.
2. J. RUTECKI, *Cienkościenne konstrukcje nośne*, PWN, Warszawa 1969.
3. В. Л. КУЗЬМИН, П. А. ЛУКАШ, Э. Е. МИЛЕЁВСКИЙ, *Расчёт конструкции из тонкостенных стержней и оболочек*, ГИЗЛСА, Москва 1960.
4. В. З. ВЛАСОВ, *Тонкостенные упругие стержни*, Москва 1959.
5. С. М. МУЛИН, *Исследование пространственной устойчивости тонкостенных стержней при нецентральной сжатии с двухосным эксцентризмом*, Науч. Труды Омский Инст. Инж. Трансп., 1969.
6. Г. Ш. ПОДОЛЬСКИЙ, *Применение вариационного метода Бубнова-Галеркина к деформационному расчёту нецентрально сжатых тонкостенных стержней*, Сб. трудов, Москва 1965.
7. Ф. П. ЛУКИЯНОВ, *Деформационный расчёт и устойчивость плоской формы изгиба ступенчатых тонкостенных стержней*, Труды Новочеркасского Политехн. Института, 1969.
8. В. А. ШМАТКОВ, *О расчёте тонкостенных стержней ступенчатого переменного сечения*, Изд. Вышш. Учебн. Завед. Строит. и Архит., 4 (1965).
9. В. А. ИВОВИЧ, *Переходные матрицы в динамике упругих систем*, Киев 1969.
10. А. Р. РЖАНИЦЫН, *Расчёт тонкостенных стержней ступенчатого переменного сечения*, Исследования по теории сооруж., Вып. V (1951).
11. О. МАТЕЈА, *Problemy statyki i dynamiki płyt pierścieniowych oraz powłok obrotowych*, Zeszyty Naukowe WSI w Opolu, 4 (1972).
12. F. НАМАЮСИ, *On torsion of I-beam with a web of variable height*, Mem. Fac. Eng. Hokkaido Univ., 2, 11 (1961).
13. L. H. N. LEE, *Non-uniform torsion of plate girders*, Proc. ASCE, 449, 80 (1954) 1—28.
14. E. ŚWITOŃSKI, *Stateczność prętów cienkościennych o profilu otwartym i stałym przekroju*, Zesz. Nauk. Politechniki Śląskiej, Mechanika, 40 (1970).

Резюме

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА МАТРИЦ ПЕРЕНОСА ДЛЯ ДИНАМИЧЕСКОГО АНАЛИЗА ТОНКОСТЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ

В работе представлен метод решения задачи о свободных колебаниях и устойчивости тонкостенных стержней открытого профиля и переменного сечения для произвольных краевых условий.

Для решения применялся метод матриц переноса, который программировался на ЭЦВМ.

В завершении работы приводятся примеры расчетов, указывающие на хорошую сходимость принятых функций.

Summary

APPLIANCE OF THE TRANSFER MATRIX METHOD TO THE DYNAMIC ANALYSIS OF THIN-WALLED RODS

In the paper the problem of a proper vibration and stability of thin-walled rods with the open shape and variable section for arbitrary boundary conditions was presented. For solving the transfer matrix programmed on digital computer was applied. At the end, numerical examples are presented and the results show a good convergence of the assumed functions.

POLITECHNIKA ŚLĄSKA

Praca została złożona w redakcji dnia 27 marca 1974 r.