MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
1, 11 (1973)

# WYZNACZANIE ZMIAN STAŁYCH SPRĘŻYSTOŚCI MATERIAŁU WYSTĘPUJĄCYCH NA GRUBOŚCI MODELU GIPSOWEGO

JÓZEF WRANIK (GLIWICE)

## 1. Wstęp

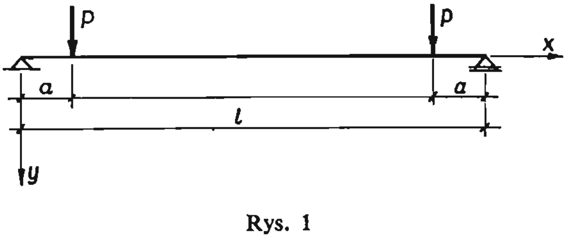
Wartości naprężeń w elementach konstrukcji budowlanych znajdowane na drodze pomiarów odkształceń modeli gipsowych, przy niewystarczającej znajomości cech sprężystych materiału modelowego mogą mieć znaczne błędy. Zauważono to w pracach doświadczalnych na modelach gipsowych swobodnie podpartych tarcz prostokątnych o skokowej zmianie grubości. Wyniki badań znacznie różniły się od wyników otrzymywanych sposobami: analitycznym i elastooptycznym.

W celu wyjaśnienia przyczyny tych rozbieżności przeprowadzono badania zmiany stałych sprężystości $E$ i $\nu$ na grubości płyt gipsowych. Badania wykazały, że płyty gipsowe wykonywane sposobem opisanym w dalszej części pracy są niejednorodne.

Na fakt zmiany modułu sprężystości zwrócono już uwagę w pracach [1] i [2], jednakże zjawisko to nie zostało ujęte ilościowo. W pracy niniejszej podany jest sposób ustalania zmiany modułu sprężystości $E$, zachodzącej wzdłuż wysokości przekroju płyty gipsowej.

## 2. Sposób określania zmiany wartości modułu sprężystości $E$ na grubości elementu modelu gipsowego

Do odlewania płyt gipsowych zastosowano zaczyn o wysokim stosunku wagowym wody do gipsu, a więc zupełnie płynny. Zaczyn ten wylewano na poziomą płytę szklaną. W czasie wiązania opóźnionego przez dodany inhibitor, następuje sedymentacja cząstek.

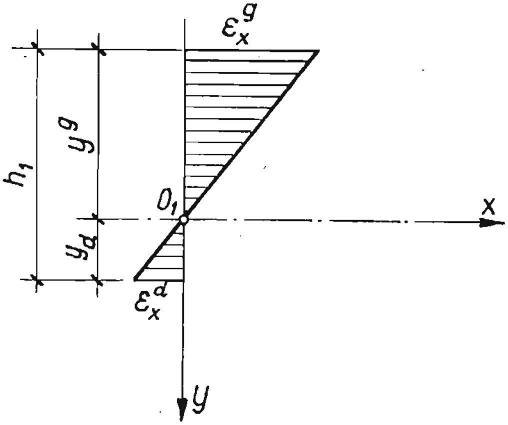



Rys. 1

Sedymentacja ta oraz różne warunki wiązania na powierzchni płyty gipsowej i od strony dna formy powodują, że moduł sprężystości $E$ nie jest jednakowy na całej grubości płyty i zmienia się według pewnej funkcji.

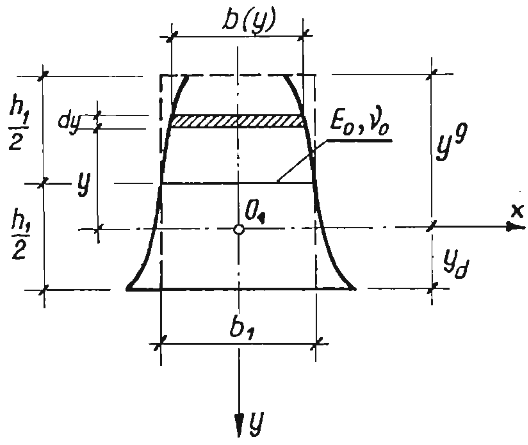
Określenia zróżnicowania modułu sprężystości $E$ na grubości płyty gipsowej dokonamy na wyciętej z tej płyty belce, poddanej czystemu zginaniu momentem $M = Pa$ (rys. 1).

W przekrojach dostatecznie odległych od strefy przyłożenia sił zachowana jest zasada płaskich przekrojów. Wykres odkształceń $\varepsilon_x$ jest więc liniowy (rys. 2). W związku ze zmianą cech sprężystości na wysokości przekroju poprzecznego belki oś obojętna nie leży w połowie wysokości $h_1$.




Rys. 2

Zmianę modułu sprężystości $E(y)$ gipsu wzdłuż wysokości belki o szerokości $b_1$ można zastąpić w obliczeniach zmianą szerokości $b(y)$ belki o stałej wartości $E_0$ (rys. 3). Porównawczy moduł sprężystości $E_0$ musi mieć wartość dowolnie wybraną spośród rzeczywistych wartości, występujących w przekroju. Do dalszych rozważań wybieramy wartość modułu sprężystości $E_0$ w połowie wysokości przekroju.




Rys. 3

Zależność między modułem sprężystości $E(y)$ a zastępczą szerokością $b(y)$ opisuje wzór

$$b(y) = \frac{b_1}{E_0} E(y). \tag{1.1}$$

Naprężenia występujące w belce o szerokości $b_1$ i zmiennej wartości modułu $E(y)$ równają się

(1.2) $$\sigma_x(y) = \frac{My}{J_1}\cdot\frac{b(y)}{b_1},$$

lub

(1.2a) $$\sigma_x(y) = \frac{My}{J_1}\cdot\frac{E(y)}{E_0},$$

gdzie wprowadzono zastępczy moment bezwładności

(1.3) $$J_1 = \int_{y_d}^{y_g} b(y)y^2dy = \frac{b_1}{E_0}\int_{y_d}^{y_g} E(y)y^2dy.$$

Odkształcenie $\varepsilon_x(y)$ wyraża się następująco

(1.4) $$\varepsilon_x(y) = \frac{\sigma_x(y)}{E(y)} = \frac{My}{J_1}\cdot\frac{E(y)}{E_0}\cdot\frac{1}{E(y)} = \frac{My}{E_0 J_1}.$$

Odkształcenia $\varepsilon_x(y)$ są liniowe i osiągają zero dla $y = 0$. Otrzymać je możemy z pomiarów tensometrycznych, przeprowadzonych dla określonego momentu zginającego $M$. We wzorze (1.4) nieznane są zatem wielkości $E_0$ oraz $J_1$.

Aby je wyznaczyć przeprowadzimy kilka pomiarów belek o coraz mniejszych wysokościach, otrzymywanych przez zdejmowanie zewnętrznych warstw badanej belki.

Z pierwszego pomiaru odkształceń $\varepsilon_{x,1}$ belki o pełnej wysokości $h_1$ otrzymujemy jej rzeczywistą sztywność na zginanie

(1.5) $$E_0 J_1 = \frac{My}{\varepsilon_{x,1}},$$

przy czym $E_0$ i $J_1$ są w dalszym ciągu nieznane. Ponadto ustalamy przy pierwszym pomiarze punkt $(0_1)$ osi obojętnej czyli zerowych odkształceń.

Następnie zdejmujemy cienkie warstwy o jednakowych grubościach $\delta_1$, z góry i z dołu belki. Otrzymujemy w ten sposób belkę o zmienionej wysokości $h_2 = h_1 - 2\delta_1$ i pewnej sztywności $E_0 J_2$.

Dla belki tej dokonujemy pomiaru odkształceń, uzyskując wartości $\varepsilon_{x,2}$ oraz położenie punktu $(0_2)$ o zerowej wartości odkształcenia. Jeżeli punkt $0_2$ nie znajduje się w połowie wysokości $h_2$, ponownie zmniejszamy wysokość belki, mierzymy odkształcenia i ustalamy położenie punktu o zerowej wartości odkształcenia.

Postępujemy tak do chwili, gdy oś obojętna znajdzie się w połowie wysokości belki.

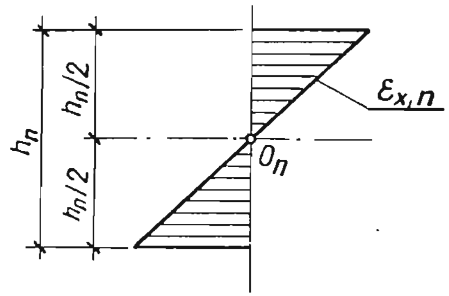
Załóżmy w dalszym ciągu, że w ostatnim $n$-tym pomiarze wykres odkształceń przedstawia się, jak na rys. 4, tzn. odkształcenia osiągają wartość zerową w połowie zredukowanej wysokości $(h_n)$ belki. Możemy wówczas obliczyć wartość momentu bezwładności $J_n$, jak dla belki prostokątnej o stałej wartości $E_0$

(1.6) $$J_n = \frac{h_n^3 b_1}{12},$$

a następnie ze wzoru (1.4) obliczyć

$$E_0 = \frac{My}{\varepsilon_{x,n} J_n} = \frac{M}{\varepsilon^g_{x,n} J_n} \cdot \frac{h_n}{2}, \tag{1.7}$$

gdzie $M$ — moment zginający, jakim obciążono belkę o wysokości zredukowanej z wartości $h_1$ do $h_n$, $\varepsilon^g_{x,n}$ — zmierzone odkształcenie w odległości $y^g = \frac{h_n}{2}$ od środka, odpowiadające momentowi $M$.

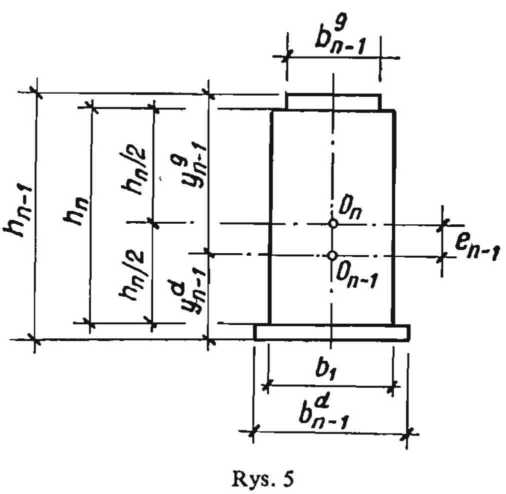



Rys. 4

Ze wzoru (1.7) obliczyć możemy moduł $E_0$, a tym samym dla poprzedzającego $(n-1)$-szego pomiaru, możemy obliczyć $J_{n-1}$ według wzoru

$$J_{n-1} = \frac{1}{E_0} \frac{My^g_{n-1}}{\varepsilon^g_{x,n-1}} = \frac{1}{E_0} \cdot \frac{My^d_{n-1}}{\varepsilon^d_{x,n-1}}. \tag{1.8}$$

Wielkości ze wskaźnikami $g$ lub $d$ dotyczą odpowiednio górnych i dolnych skrajnych włókien belki.




Rys. 5

Jeżeli ciągłą funkcję $b(y)$ przedstawioną na rys. 3 zastąpimy wykresem zmieniającym się w sposób skokowy (rys. 5 i 6), wtedy przekrój belki użytej do $(n-1)$-szego pomiaru obliczymy z dwu następujących warunków:

a) moment statyczny przekroju belki względem osi przechodzącej przez punkt $0_{n-1}$ jest równy zeru,

b) moment bezwładności przekroju belki względem punktu $0_{n-1}$ jest równy obliczonemu ze wzoru (1.8) momentowi bezwładności $J_{n-1}$.

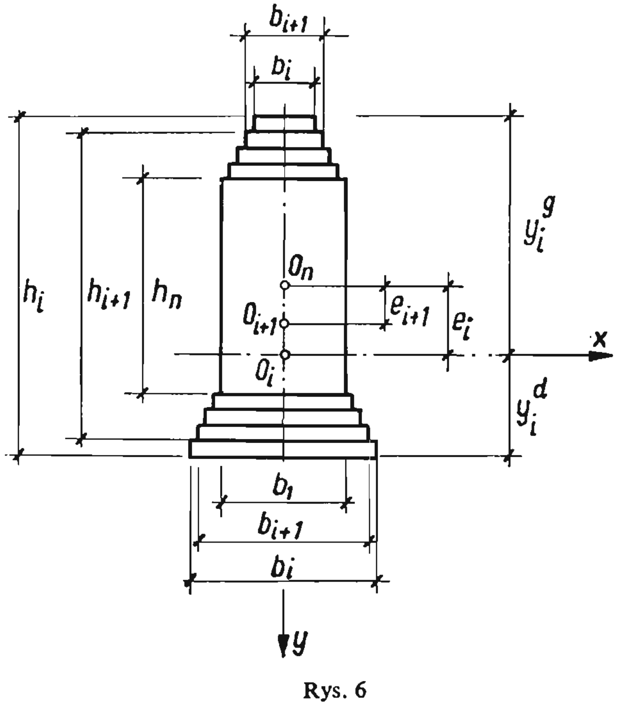
Z obu warunków otrzymujemy układ równań (1.9).

$$\left(y^g_{n-1}-\frac{1}{2}\delta_{n-1}\right)b^g_{n-1}-\left(y^d_{n-1}-\frac{1}{2}\delta_{n-1}\right)b^d_{n-1} = -\frac{1}{\delta_{n-1}}F_n\cdot e_{n-1}, \tag{1.9a}$$

$$\left[\frac{\delta^2_{n-1}}{12}+\left(y^g_{n-1}-\frac{1}{2}\delta_{n-1}\right)^2\right]b^g_{n-1}+\left[\frac{\delta^2_{n-1}}{12}+\left(y^d_{n-1}-\frac{1}{2}\delta_{n-1}\right)^2\right]b^d_{n-1} = (J_{n-1}-J_n-F_n\cdot e^2_{n-1})\frac{1}{\delta_{n-1}}, \tag{1.9b}$$

gdzie $F_n = b_1\cdot h_n$

Z układu równań (1.9) obliczyć można $b^g_{n-1}$ i $b^d_{n-1}$.




Rys. 6

Wartości odkształceń belki użytej do $i$-tego pomiaru pozwolą obliczyć wartości $b^g_i$ i $b^d_i$ według wzorów (1.10).

Otrzymany w ten sposób $i$-ty zastępczy przekrój przedstawiono na rys. 6. Występujące we wzorach (10) wielkości $J_{i+1}$, $F_{i+1}$ otrzymano z obliczeń belki dla $(i+1)$-szego pomiaru.

$$\left(y^g_i-\frac{1}{2}\delta_i\right)b^g_i-\left(y^d_i-\frac{1}{2}\delta_i\right)b^d_i = -F_{i+1}(e_i-e_{i+1})\frac{1}{\delta_i}, \tag{1.10a}$$

$$\text{(1.10b)} \quad \left[\frac{\delta_i^2}{12}+\left(y_i^g-\frac{1}{2}\delta_i\right)^2\right]b_i^g+\left[\frac{\delta_i^2}{12}+\left(y_i^d-\frac{1}{2}\delta_i\right)^2\right]b_i^d =$$

$$= [J_i-J_{i+1}-F_{i+1}(e_i-e_{i+1})^2]\frac{1}{\delta_i},$$

gdzie $J_i = \frac{1}{E_0}\cdot\frac{My_i^g}{\varepsilon_{x,i}^g}$ — moment bezwładności przekroju belki dla $i$-tego pomiaru,

$J_{i+1} = \frac{1}{E_0}\cdot\frac{My_{i+1}^g}{\varepsilon_{x,i+1}^g}$ — moment bezwładności przekroju, belki dla $(i+1)$-szego pomiaru,

$\delta_i$ — grubości kolejno zdejmowanych warstw,

$F_{i+1}$ — pole przekroju poprzecznego belki dla $(i+1)$-szego pomiaru.

Przejścia od szerokości zastępczej $b(y)$ do modułu sprężystości $E(y)$ dokonujemy za pomocą wzoru (1.1).

Zmiany wartości współczynnika Poissona $\nu$ określamy na podstawie kolejnych pomiarów odkształceń jako

$$\text{(1.11)} \quad \nu_i^g = \frac{\varepsilon_{z,i}^g}{\varepsilon_{x,i}^g}, \qquad \nu_i^d = \frac{\varepsilon_{z,i}^d}{\varepsilon_{x,i}^d},$$

gdzie $\varepsilon_{z,i}^g$, $\varepsilon_{z,i}^d$ — odkształcenia mierzone w kierunku prostopadłym do płaszczyzny $x$, $y$ na górnej i dolnej powierzchni belki.

### 3. Przykład liczbowy wyznaczania zmiany modułu sprężystości $E$ w płycie gipsowej

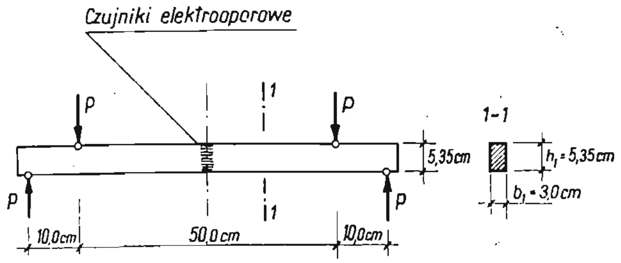
Dla ilustracji omówionego sposobu przeprowadzono pomiary na belce wyciętej z płyty gipsowej, przechowywanej w suchym pomieszczeniu przez okres około 6 miesięcy.

Płyty gipsowe wykonano z zaczynu gipsowego o stosunku wagowym $w:g = 0{,}6$ z dodatkiem cytrynianu sodowego w ilości 0,04%. Składniki te wymieszano za pomocą mieszarki elektrycznej i wlewano przez sito o oczkach 1 mm$^2$ do formy otwartej górą, ułożonej poziomo na płycie szklanej. Około pół godziny po napełnieniu formy, kiedy woda stojąca na powierzchni zaczynała gwałtownie wsiąkać w płytę, rozbierano formę, a płytę po paru godzinach przenoszono do suchego pomieszczenia. Na skutek powstawania menisku wypukłego w wypełnionej po brzegi zaczynem formie oraz pęcznienia zaczynu gipsowego w czasie wiązania, płyty uzyskiwały grubości większe od wysokości formy. Płyty miały grubość 5,35 cm.

Pomiarów odkształceń $\varepsilon_x$ belki gipsowej wyciętej z płyty dokonywano dla trzech różnych wartości momentu zginającego. Dla każdej wartości momentu zginającego wykonywano trzy serie odczytów. Uzyskano w ten sposób 9 serii odczytów, z których obliczono średnią wartość odkształcenia w każdym punkcie pomiarowym.

W celu ustalenia zmian modułu $E(y)$ oraz współczynnika Poissona $\nu(y)$ przeprowadzono metodą tensometrii elektrooporowej pomiary na belce gipsowej przedstawionej na rys. 7.

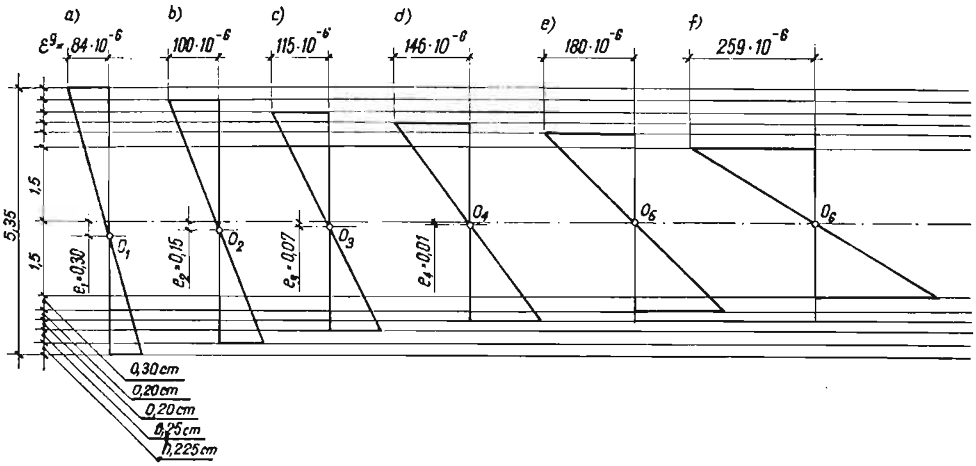
Na każdej z bocznych ścian belki naklejono wzdłuż pionowej osi symetrii 9 czujników, na jej górnej zaś i dolnej powierzchni po dwa czujniki, prostopadle względem siebie usytuowane. Czujniki na bocznych ścianach służyły do kontroli prostoliniości przebiegu odkształceń.




Rys. 7

Wyniki pomiarów odkształceń dla przekroju w stanie początkowym przedstawiono na wykresie (rys. 8a).

Następnie zdjęto z góry i z dołu warstwę o grubości $\delta_1 = 2{,}25$ mm, naklejono ponownie czujniki i dokonano pomiarów odkształceń, uzyskując ich wykres (rys. 8b). Dla następnych kolejno zdejmowanych warstw o grubościach $\delta_i = 2{,}5$ mm, 2 mm i 2 mm dokonano pomiarów i sporządzono wykresy odkształceń. Przedstawiono to na rysunkach 8c, 8d i 8e.




Rys. 8

Przy piątym pomiarze odkształcenia osiągnęły wartość zerową w połowie wysokości belki. Dla kontroli przeprowadzono jeszcze pomiar szósty, którego wyniki pokrywały się z wynikami pomiaru piątego.

Na podstawie pomiaru piątego obliczono

$$J_5 = \frac{3{,}6^3 \cdot 3}{12} = 11{,}65 \text{ cm}^4 \quad \text{według (1.7)},$$

$$E_0 = \frac{100 \cdot 1{,}8}{11{,}65} \cdot \frac{1}{180 \cdot 10^{-6}} = 85{,}8 \cdot 10^3 \text{ kG/cm}^2,$$

$$F_5 = 3{,}6 \cdot 3 = 10{,}8 \text{ cm}^2.$$

Wartość momentu bezwładności $J_4$ w pomiarze czwartym obliczono na podstawie znalezionych wartości $J_5$, $E_0$ i $F_5$ ze wzoru (1.8)

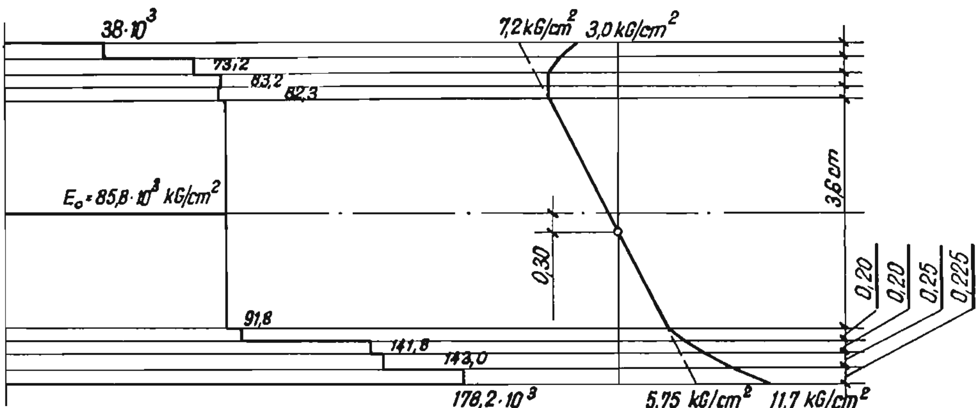
$$J_4 = \frac{1}{85{,}5 \cdot 10^3} \cdot \frac{100 \cdot 2{,}01}{146 \cdot 10^{-6}} = 16{,}05 \text{ cm}^4.$$

Na podstawie wzorów (1.10a) i (1.10b) otrzymano układ równań

$$\begin{aligned} 1{,}91 b_4^g - 1{,}89 b_4^d &= -0{,}54, \\ 3{,}65 b_4^g - 3{,}58 b_4^d &= 22{,}0, \end{aligned}$$

z których obliczono $b_4^g = 2{,}88$ cm; $b_4^d = 3{,}21$ cm; $F_4 = 12{,}02$ cm$^2$.

Wartości $J_4$, $b_4$ i $F_4$ stanowią podstawę do obliczania wartości $J_3$, $b_3^g$, $b_3^d$ i $F_3$.




a) Wykres modułu E po grubości płyty gipsowej

b) Wykres naprężeń $\sigma_x$

Rys. 9

Otrzymuje się $J_3 = 23{,}0$ cm$^4$ oraz układ równań

$$\begin{aligned} 2{,}17 b_3^g - 2{,}03 b_3^d &= -3{,}61, \\ 4{,}71 b_3^g - 4{,}12 b_3^d &= 34{,}4, \end{aligned}$$

z których obliczono $b_3^g = 2{,}91$ cm; $b_3^d = 4{,}96$ cm; $F_3 = 13{,}60$ cm$^2$.

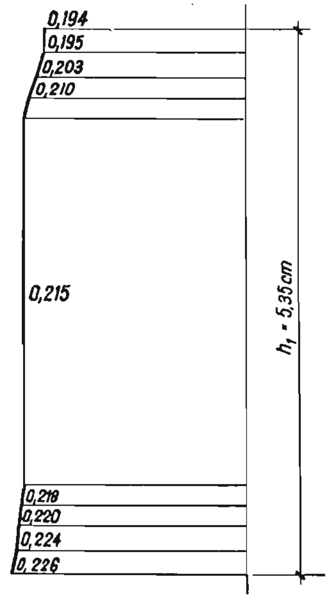
W podobny sposób obliczono pozostałe wartości:

$$\begin{aligned} b_2^g &= 2{,}56 \text{ cm}; \quad & b_2^d &= 5{,}00 \text{ cm}, \\ b_1^g &= 1{,}33 \text{ cm}; \quad & b_1^d &= 6{,}23 \text{ cm}. \end{aligned}$$

Na podstawie wartości $b_i^g$ i $b_i^d$ obliczono według (1.1) odpowiednie wartości rzeczywistych modułów sprężystości podłużnej $E_i^g$ i $E_i^d$.

Wykres zmiany modułu $E$ w badanej płycie na jej grubości przedstawiono na rys. 9a. Odpowiada temu wykres $\sigma_x$ w rozpatrywanej belce o zmiennym module sprężystości $E(y)$, przedstawiony na rys. 9b, dla $M = 100$ kGcm.

Na rys. 10 przedstawiono wykres zmiany współczynnika Poissona $\nu(y)$.




Rys. 10

Na podstawie przeprowadzonych badań można stwierdzić, że po zdjęciu zewnętrznych warstw płyty gipsowej, otrzymuje się płytę o strukturze zbliżonej do jednorodnej. W wykonywanym doświadczeniu aby otrzymać płytę jednorodną trzeba było z płyty o grubości 5,35 cm zdjąć z każdej strony warstwę grubości ok. 0,88 cm.

Orientacyjnie można przyjąć, że płyty gipsowe przeznaczone na elementy modelu jednorodnego powinno się wykonać o grubości około 1,5-krotnie większej od wymaganej grubości elementów modelu gipsowego. Wniosek ten dotyczy płyt o znacznych grubościach.

**Literatura cytowana w tekście**

1. W. Starosolski, A. Ajdukiewicz, J. Denkiewicz, *Współczynnik sprężystości i odkształcenia graniczne przy zginaniu w zależności od inhibitorów i ilości wody zarobowej dla gipsu modelowego*, Cement, Wapno, Gips, 6 (1965).
2. W. Starosolski, A. Ajdukiewicz, J. Denkiewicz, *Badanie własności gipsu jako materiału do modelowania konstrukcji*, Archiwum Inżynierii Lądowej, **8**, 1 (1967).

Резюме

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ИЗМЕНЕНИЙ УПРУГИХ ПОСТОЯННЫХ МАТЕРИАЛА ПО ТОЛЩИНЕ ГИПСОВОЙ МОДЕЛИ

В работе рассмотрено опытное определение упругих постоянных $E$ и $\nu$ в толще гипсовой пластинки, получаемой путем сливания жидкого гипсового раствора на горизонтальную стеклянную пластину. Структура получаемого таким образом гипса неоднородна.

Предлагается метод определения упругих постоянных $E$ и $\nu$ по толщине пластинки, состоящий в измерении деформаций изгиба балки, вырезанной из этой пластинки.

Summary

## DETERMINATION OF CHANGES OF ELASTIC MATERIAL CONSTANTS OCCURING ACROSS THE THICKNESS OF A PLASTER MODEL

The paper is dealing with experimental determination of elastic constants $E$ and $\nu$ in a plaster plate produced by pouring the liquid plaster paste over a horizontal glass panel. The structure of such a plate is non-homogeneous. On the basis of strain measurements of a plaster beam cut out of such a plate and subjected to bending, the variation of elastic moduli $E$ and $\nu$ across the thickness of the plaster plate can be determined.

**POLITECHNIKA ŚLĄSKA**

*Praca została złożona w Redakcji dnia 3 maja 1972* r.