

UOGÓLNIONA FUNKCJA GREENA DLA NIESKOŃCZONEGO PASMA PŁYTOWEGO

JAN GRABACKI, GWIDON SZEFER (KRAKÓW)

1. Wstęp

W pracy podamy efektywną konstrukcję funkcji Greena dla nieskończonego pasma płytowego o brzegach swobodnych.

Jak wiadomo, własności funkcji Greena pozwalają w prosty sposób budować rozwiązania (co najmniej formalne) szeregu technicznie ważnych zadań klasycznej teorii płyt.

Przedstawiona metoda konstrukcji stanowi przykład zastosowania teorii ultradystrybucji [2], [3], [6] dostarczającej niezwykle mocnego narzędzia rozwiązywania problemów brzegowych.

Funkcji Greena poszukiwać będziemy nie w klasie funkcji zwykłych, co wymagałoby założeń odpowiedniej regularności i zachowania się w nieskończoności, lecz w klasie funkcji uogólnionych, tzw. ultradystrybucji, dzięki czemu uzyskane rozwiązanie jest ogólniejsze od klasycznego, a ponadto zezwala na zręczne stosowanie szeregu pozbawionych klasycznego sensu operacji. Zaletą metody jest także i to, że obok ogólności zezwala ona na stosunkowo łatwe obliczenie wszystkich nieelementarnych wyrażeń i prostą interpretację fizyczną.

Praca jest fragmentem obszerniejszego studium autorów w zakresie nieklasycznych rozwiązań klasycznej teorii sprężystości.

Niżej podano podstawowe określenia i definicje, z których korzystać będziemy w dalszym ciągu:

\mathcal{D} — przestrzeń funkcji próbnych klasy C^∞ o nośnikach zwartych

$$\mathcal{D} = \bigcup_{\Omega} \mathcal{D}(\Omega),$$

gdzie

$$\mathcal{D}(\Omega) = \{\varphi(x) : \varphi(x) \in C^\infty \wedge \text{supp } \varphi(x) \subset \Omega\},$$

przy czym $\text{supp } \varphi(x)$ — oznacza tutaj nośnik funkcji $\varphi(x)$;

\mathcal{D}^* — przestrzeń sprzężona z przestrzenią funkcji próbnych \mathcal{D} , czyli przestrzeń liniowych, ciągłych funkcyjonałów określonych na \mathcal{D} , dalej nazywana również przestrzenią dystrybucji;

\mathcal{S} — przestrzeń funkcji próbnych «szybko malejących»,

$$\mathcal{S} = \{\varphi(x) : \varphi(x) \in C^\infty \wedge \bigwedge_{m,k} \bigvee_{C_{m,k}} |x^m| |\varphi(x)^{(k)}| \leq C_{m,k}\};$$

\mathcal{S}^* — przestrzeń sprzężona z przestrzenią funkcji próbnych \mathcal{S} , dalej nazywana również przestrzenią dystrybucji temperowanych;

\mathcal{L} — przestrzeń analitycznych funkcji próbnych, całkowitych

$$\mathcal{L} = \bigcup_a \mathcal{L}_a,$$

gdzie

$$\mathcal{L}_a = \{\psi(z): \psi(z) - \text{analit} \wedge \bigwedge_k \bigvee_{C_k} |z^k| |\psi(z)| \leq C_k e^{a|b|}\},$$

\mathcal{L}^* — przestrzeń sprzężona z przestrzenią funkcji próbnych \mathcal{L} , nazywana również przestrzenią ultradystrybucji.

Uogólniony operator Fouriera

$$\mathcal{F}_0 \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \dots e^{izx} dx$$

na mocy twierdzenia Paleya - Wienera odwzorowuje bijektywnie

$$\mathcal{D} \xrightarrow[\mathcal{F}_0]{} \mathcal{L}.$$

Przyjmując definicję uogólnionej transformaty Fouriera dystrybucji

$$\langle \mathcal{F}_0[f], \varphi \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \langle f, \mathcal{F}_0[\varphi] \rangle; \quad \varphi \in \mathcal{D}; \quad \mathcal{F}_0[\varphi] \in \mathcal{L},$$

przestrzeń \mathcal{L}^* można traktować jak przestrzeń \mathcal{F}_0 — obrazu przestrzeni dystrybucji.

Wszelkie operacje na elementach wprowadzonych wyżej przestrzeni funkcji uogólnionych¹⁾ rozumieć należy dystrybucyjnie — w szczególności różniczkowanie jest operacją uogólnioną w sensie Sobolewa,

$$\langle f^{(1)}, \varphi \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \langle f, -\varphi^{(1)} \rangle.$$

Ponieważ tradycyjnie przyjęto oznaczać parametr transformacji Fouriera przez α — w dalszym ciągu używamy oznaczenia

$$\mathcal{F}_0 = \int_{-\infty}^{\infty} \dots e^{iax} dx,$$

$$\mathcal{F}_0^{-1} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dots e^{-iax} d\alpha, \quad \alpha \in \mathbf{Z},$$

skąd wynika równoważność

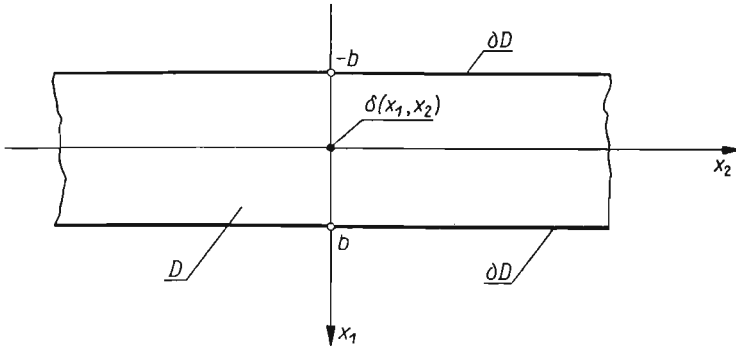
$$\mathcal{L} \underset{z}{\equiv} \mathcal{L} \underset{\alpha}{\equiv} \mathcal{L}^* \underset{z}{\equiv} \mathcal{L}^* \underset{\alpha}{\equiv} \mathcal{L}^*.$$

Używamy również tradycyjnego oznaczenia $\mathcal{F}_0[f] = \tilde{f}$.

¹⁾ przez funkcję uogólnioną rozumie się tutaj element \mathcal{S}^* lub \mathcal{D}^* lub \mathcal{L}^*

2. Sformułowanie i rozwiązanie zadania

Pasmo płytowe traktuje się jak rozmaitość różniczkowalną w E_2 określoną następująco (rys. 1):



Rys. 1

$$D = \{x_1, x_2: x_1 \in (-b, b) \wedge x_2 \in (-\infty, \infty)\};$$

$$\partial D = \{x_1, x_2: |x_1| = b \wedge x_2 \in (-\infty, \infty)\}.$$

Znalezienie funkcji Greena sprowadza się do rozwiązania problemu brzegowego

$$(2.1) \quad \nabla^2 \nabla^2 w = \delta(x_1, x_2)$$

(przy przyjęciu sztywności płytowej $K = 1$);

$$(2.2) \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \nu \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \Big|_{\partial D} = 0,$$

$$\frac{\partial^3 w}{\partial x_1^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x_1 \partial x_2^2} \Big|_{\partial D} = 0,$$

gdzie $\delta(x_1, x_2) = \delta(x_1) \times \delta(x_2)$ — dystrybucja δ — Diraca (iloczyn tensorowy).

W celu rozwiązania zadania zakładamy, że $w \in \mathcal{L}^*$. Z założenia tego wynika, że operator $\nabla^2 \nabla^2$ działa w przestrzeni ultradystrybucji, czyli różniczkowanie należy rozumieć w sensie Sobolewa.

Działając na (2.1) oraz (2.2) operatorem \mathcal{F}_0 względem zmiennej x_2 otrzymujemy

$$(2.3) \quad [d^2 - \alpha^2]^2 \tilde{w} = \delta(x_1) \cdot 1(\alpha),$$

$$(2.4) \quad \tilde{w}^{(2)} - \alpha^2 \nu \tilde{w} \Big|_{\partial D} = 0,$$

$$\tilde{w}^{(3)} - \alpha^2 (2-\nu) \tilde{w}^{(1)} \Big|_{\partial D} = 0,$$

gdzie

$$[d^2 - \alpha^2]^2 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d^4}{dx_1^4} - 2\alpha^2 \frac{d^2}{dx_1^2} + \alpha^4,$$

$$1(\alpha) = H(\alpha) + H(-\alpha),$$

$H(\alpha)$ — funkcjonal Heaviside'a.

Zadaniu (2.1), (2.2) odpowiada więc w przestrzeni \mathcal{F}_0 — obrazu zadanie (2.3), (2.4) co oznacza, że \tilde{w} jest elementem przestrzeni $\mathcal{D}'_T \times \mathcal{L}^*$; tutaj \mathcal{D}'_T — przestrzeń dystrybucji

transponowana. Rozwiązaniem równania (2.3) będzie funkcja ultradystrybucyjna zależna (dystrybucyjnie) od parametru α (ściśle biorąc przez \tilde{w} rozumieć należy rodzinę rozwiązań ze względu na α), gdzie α -argument \mathcal{F}_0 -transformacji. Do jego wyznaczenia wykorzystamy twierdzenie [2], [6], na mocy którego rozwiązaniem równania

$$L^m[f] = \delta(x_1), \quad x_1 \in \mathbf{R}_1,$$

w którym

$$L^m \stackrel{\text{def}}{=} a_m \frac{d^m}{dx_1^m} + \dots + a_1 \frac{d}{dx_1} + a_0,$$

jest funkcja $f = f_0 H(x_1)$, gdzie f_0 — rozwiązanie równania jednorodnego $L^m[f] = 0$ spełniające warunki początkowe

$$f_0(0) = f_0^{(1)}(0) = \dots = f_0^{(m-2)}(0) = 0,$$

$$f_0^{(m-1)}(0) = \frac{1}{a_m}.$$

Korzystamy ponadto z twierdzenia [2], [6], zgodnie z którym ultradystrybucyjne rozwiązania równań różniczkowych liniowych o stałych współczynnikach są (z dokładnością do mnożnika $i = \sqrt{-1}$) identyczne z rozwiązaniami klasycznymi. Przyjmując więc

$$\tilde{w}_0 = C_1 \operatorname{ch} \alpha x_1 + C_2 \alpha x_1 \operatorname{ch} \alpha x_1 + C_3 \operatorname{sh} \alpha x_1 + C_4 \alpha x_1 \operatorname{sh} \alpha x_1$$

oraz wykorzystując warunki:

$$\tilde{w}_0(0) = \tilde{w}_0^{(1)}(0) = \tilde{w}_0^{(2)}(0) = 0; \quad \tilde{w}_0^{(3)}(0) = 1,$$

otrzymuje się

$$C_1 = C_4 = 0, \quad C_2 = \frac{1}{2\alpha^3}, \quad C_3 = -\frac{1}{2\alpha^3},$$

a stąd

$$(2.5) \quad \tilde{w}_0 = \frac{1}{4\alpha^3} \operatorname{sgn} x_1 (\alpha x_1 \operatorname{ch} \alpha x_1 - \operatorname{sh} \alpha x_1).$$

Aby spełnić warunki (2.4), do rozwiązania (2.5) dodajemy rozwiązanie równania jednorodnego. Jest zatem

$$(2.6) \quad \tilde{w} = \frac{1}{4\alpha^3} \operatorname{sgn} x_1 (\alpha x_1 \operatorname{ch} \alpha x_1 - \operatorname{sh} \alpha x_1) + A(\alpha) \operatorname{ch} \alpha x_1 + B(\alpha) \alpha x_1 \operatorname{ch} \alpha x_1 + \\ + C(\alpha) \operatorname{sh} \alpha x_1 + D(\alpha) \alpha x_1 \operatorname{sh} \alpha x_1,$$

przy czym stałe $A(\alpha)$, $B(\alpha)$, $C(\alpha)$, $D(\alpha)$, wyznaczyć należy z warunków (2.4).

Wykonując niezbędne przekształcenia otrzymujemy układ równań, którego rozwiązanie daje wynik

$$(2.7) \quad B = C = 0, \\ A = \frac{-1}{4\alpha^3} \frac{(1+\nu)^2 \operatorname{sh}^2 \beta - 4 \operatorname{ch}^2 \beta - (1-\nu)^2 \beta^2}{(1-\nu)[(3+\nu) \operatorname{sh} \beta \operatorname{ch} \beta - \beta(1-\nu)]}, \\ D = \frac{-1}{4\alpha^3} \frac{(1+\nu) \operatorname{sh}^2 \beta + 2 \operatorname{ch}^2 \beta}{(3+\nu) \operatorname{sh} \beta \operatorname{ch} \beta - \beta(1-\nu)},$$

gdzie $\beta = \alpha b$.

Ostatecznie więc rozwiązanie zadania (2.3), (2.4) ma postać

$$(2.8) \quad \tilde{w} = \frac{1}{4\alpha^3} \left\{ \left[\frac{1 + \alpha x_1}{2} e^{-\alpha x_1} - \frac{1 - \alpha x_1}{2} e^{\alpha x_1} \right] \operatorname{sgn} x_1 - \frac{(1 + \nu)^2 \operatorname{sh}^2 \beta - 4 \operatorname{ch}^2 \beta - (1 - \nu)^2 \beta^2}{(1 - \nu)[(3 + \nu) \operatorname{sh} \beta \operatorname{ch} \beta - \beta(1 - \nu)]} \operatorname{ch} \alpha x_1 - \frac{(1 + \nu) \operatorname{sh}^2 \beta + 2 \operatorname{ch}^2 \beta}{(3 + \nu) \operatorname{sh} \beta \operatorname{ch} \beta - \beta(1 - \nu)} \alpha x_1 \operatorname{sh} \alpha x_1 \right\}.$$

Wykonując transformację odwrotną, otrzymamy

$$(2.9) \quad w = \mathcal{F}_0^{-1}[\tilde{w}] = \mathcal{F}_0^{-1}[\tilde{w}_0] - \mathcal{F}_0^{-1}[\Phi_1 \operatorname{ch} \alpha x_1] - \mathcal{F}_0^{-1}[\Phi_2 \alpha x_1 \operatorname{sh} \alpha x_1],$$

gdzie dla zwięzłości oznaczono

$$(2.10) \quad \Phi_1 = \frac{1}{4\alpha^3} \frac{(1 + \nu)^2 \operatorname{sh}^2 \beta - 4 \operatorname{ch}^2 \beta - (1 - \nu)^2 \beta^2}{(1 - \nu)[(3 + \nu) \operatorname{sh} \beta \operatorname{ch} \beta - \beta(1 - \nu)]},$$

$$\Phi_2 = \frac{1}{4\alpha^3} \frac{(1 + \nu) \operatorname{sh}^2 \beta + 2 \operatorname{ch}^2 \beta}{(3 + \nu) \operatorname{sh} \beta \operatorname{ch} \beta - \beta(1 - \nu)}.$$

Pierwszy składnik można napisać w postaci

$$\mathcal{F}_0^{-1}[\tilde{w}_0] = \mathcal{F}_0^{-1} \left[\frac{1}{8\alpha^3} e^{-\alpha x_1} \right] + \mathcal{F}_0^{-1} \left[\frac{x_1}{8\alpha^2} e^{-\alpha x_1} \right] - \mathcal{F}_0^{-1} \left[\frac{1}{8\alpha^3} e^{\alpha x_1} \right] + \mathcal{F}_0^{-1} \left[\frac{x_1}{8\alpha^2} e^{\alpha x_1} \right],$$

a następnie

$$(2.11) \quad \mathcal{F}_0^{-1}[\tilde{w}_0] = \mathcal{F}_0^{-1} \left[\frac{1}{8\alpha^3} \right] * \mathcal{F}_0^{-1}[e^{-\alpha x_1}] + \mathcal{F}_0^{-1} \left[\frac{x_1}{8\alpha^2} \right] * \mathcal{F}_0^{-1}[e^{-\alpha x_1}] - \mathcal{F}_0^{-1} \left[\frac{1}{8\alpha^3} \right] * \mathcal{F}_0^{-1}[e^{\alpha x_1}] + \mathcal{F}_0^{-1} \left[\frac{x_1}{8\alpha^2} \right] * \mathcal{F}_0^{-1}[e^{\alpha x_1}].$$

Wykorzystując twierdzenie o splocie [2], [1] dostaniemy dla poszczególnych retransformat wyrażenia [4]

$$(2.12) \quad \mathcal{F}_0^{-1} \left[\frac{1}{8\alpha^3} e^{-\alpha x_1} \right] = \frac{1}{16\pi} [c_0 z^2 - c_1 z^2 \ln |z|] * \delta(z - ix_1),$$

$$\mathcal{F}_0^{-1} \left[\frac{1}{8\alpha^3} e^{\alpha x_1} \right] = \frac{1}{16\pi} [c_0 z^2 - c_1 z^2 \ln |z|] * \delta(z + ix_1),$$

$$\mathcal{F}_0^{-1} \left[\frac{x_1}{8\alpha^2} e^{-\alpha x_1} \right] = \frac{1}{16\pi} x_1 |z| * \delta(z - ix_1),$$

$$\mathcal{F}_0^{-1} \left[\frac{x_1}{8\alpha^2} e^{\alpha x_1} \right] = \frac{1}{16\pi} x_1 |z| * \delta(z + ix_1),$$

gdzie

$$c_1 = \frac{2(-1)^3}{2!} \cos 2 \frac{\pi}{2} = 1,$$

$$c_0 = 1.$$

Funkcjonały δ są tu retransformatami odpowiednich funkcji wykładniczych.

Uwzględniając w dalszym ciągu własności splotu z — funkcjonałem i traktując otrzymane retransformaty jak analityczne funkcjonały zdefiniowane na przestrzeni funkcji próbnych \mathcal{L} , czyli

$$\int_{\Gamma} f(z) \varphi(z) dz,$$

gdzie Γ — droga całkowania w płaszczyźnie zespolonej rozciągająca się od $+\infty$ do $-\infty$ oraz przyjmując, że $\text{Im } z = x_1$, a droga całkowania określona jest prostą

$$\arg z = \frac{\pi}{4}, \quad z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

otrzymamy (z dokładnością do mnożnika i)

$$(2.13) \quad \mathcal{F}_0^{-1}[\tilde{w}_0] = \frac{1}{16\pi} r^2 \ln r^2 = \frac{1}{16\pi} (x_1^2 + x_2^2) \ln (x_1^2 + x_2^2).$$

Uzyskany rezultat pozostaje w zgodzie z faktem, że przestrzeń dystrybucji temperowanych \mathcal{S}^* jest podprzestrzenią właściwą przestrzeni \mathcal{L}^* . Należy poza tym zauważyć, że występujący w równaniu (2.1) operator biharmoniczny działa w przestrzeni $\mathcal{S}^* \cap \mathcal{L}^*$. Ponieważ przestrzeń \mathcal{S}^* jest zamknięta ze względu na różniczkowanie, więc i w tym kontekście otrzymany wynik jest poprawny.

Znalezienie retransformat pozostałych dwóch składników (2.9) nastęrcza znacznie więcej trudności. Można je obejść przez łączne zastosowanie twierdzenia o splocie i metody KRYŁOWA [5] przybliżonego obliczania całek Fouriera. W tym celu biorąc

$$(2.14) \quad \begin{aligned} \mathcal{F}_0^{-1}[\Phi_1 \text{ch } \alpha x_1] &= \mathcal{F}_0^{-1}[\Phi_1] \times \mathcal{F}_0^{-1}[\text{ch } \alpha x_1], \\ \mathcal{F}_0^{-1}[\Phi_2 \alpha x_1 \text{sh } \alpha x_1] &= x_1 \mathcal{F}_0^{-1}[\alpha \Phi_2] \times \mathcal{F}_0^{-1}[\text{sh } \alpha x_1] \end{aligned}$$

zauważymy, że wystarczy skupić uwagę na obliczeniu retransformat funkcji Φ_1 i $\alpha \Phi_2$, bowiem transformacje odwrotne funkcji hiperbolicznych daje się z łatwością wyznaczyć podobnie jak w (2.12)

$$(2.15) \quad \mathcal{F}_0^{-1}[\text{ch } \alpha x_1] = \delta(z + ix_1) + \delta(z - ix_1), \quad \mathcal{F}_0^{-1}[\text{sh } \alpha x_1] = \delta(z + ix_1) - \delta(z - ix_1).$$

Dla zastosowania metody Kryłowa funkcje Φ_1 oraz $\alpha \Phi_2$ przekształcamy do postaci

$$(2.16) \quad \Phi_1 = \frac{\bar{\Phi}_1}{(1 + \alpha)^2}, \quad \alpha \Phi_2 = \frac{\bar{\Phi}_2}{(1 + \alpha)^2},$$

gdzie

$$(2.17) \quad \begin{aligned} \bar{\Phi}_1 &= \frac{[(1 + \nu)^2 \text{sh}^2 \beta - 4 \text{ch}^2 \beta - (1 - \nu)^2 \beta^2] (1 + \alpha)^2}{4 \alpha^3 (1 - \nu) [(3 + \nu) \text{sh} \beta \text{ch} \beta - \beta (1 - \nu)]}, \\ \bar{\Phi}_2 &= \frac{[(1 + \nu) \text{sh}^2 \beta + 2 \text{ch}^2 \beta] (1 + \alpha)^2}{4 \alpha^2 [(3 + \nu) \text{sh} \beta \text{ch} \beta - \beta (1 - \nu)]}. \end{aligned}$$

Dzięki temu, aproksymując funkcje $\bar{\Phi}_1$ oraz $\bar{\Phi}_2$ wielomianami Legendre'a możemy napisać

$$(2.18) \quad \begin{aligned} \mathcal{F}_0^{-1}[\Phi_1] &= \frac{1}{4\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \bar{\Phi}_1(\alpha_k b) \sum_{l=0}^{n-1} A_{lk} \int_0^\infty \cos \alpha z (1+\alpha)^{-l-2} d\alpha, \\ \mathcal{F}_0^{-1}[\alpha\Phi_2] &= \frac{1}{4\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \bar{\Phi}_2(\alpha_k b) \sum_{l=0}^{n-1} A_{lk} \int_0^\infty \sin \alpha z (1+\alpha)^{-l-2} d\alpha. \end{aligned}$$

Należy tutaj zaznaczyć, że w oryginale [5] procedura Kryłowa dotyczy zwykłej transformacji Fouriera. Jednakże dystrybucja temperowana istnieje jako ultradystrybucja (droga całkowania może być przesunięta do dowolnej prostej $\text{Im } z = \text{const}$), adaptacja metody sprowadza się więc do formalnego zastąpienia zmiennej rzeczywistej x zmienną zespoloną z .

We wzorach (2.17) $\bar{\Phi}_1(\alpha_k b)$ oraz $\bar{\Phi}_2(\alpha_k b)$ oznaczają wartości funkcji odpowiednio $\bar{\Phi}_1$ oraz $\bar{\Phi}_2$ w węzłach interpolacji, zaś A_{lk} są stabelaryzowanymi współczynnikami, n oznacza ilość węzłów interpolacji, która może być przyjęta dowolnie w zależności od założonej z góry dokładności.

Przyjmując $n = 9$, a następnie wykonując całkowanie przez części otrzymujemy

$$(2.19) \quad \begin{aligned} \mathcal{F}_0^{-1}[\Phi_1] &= \frac{1}{b} \left\{ B_0 + \frac{1}{2} B_1 + \frac{1}{3} B_2 + \frac{1}{4} B_3 + \frac{1}{5} B_4 + \frac{1}{6} B_5 + \frac{1}{7} B_6 + \frac{1}{8} B_7 + \frac{1}{9} B_8 + \right. \\ &+ \frac{1}{10} B_9 - \frac{z^2}{b^2} \left[\frac{1}{6} B_2 + \frac{1}{24} B_3 + \frac{1}{60} B_4 + \frac{1}{120} B_5 + \frac{1}{210} B_6 + \frac{1}{336} B_7 + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{540} B_8 + \frac{1}{720} B_9 \right] + \frac{z^4}{b^4} \left[\frac{1}{120} B_4 + \frac{1}{720} B_5 + \frac{1}{2520} B_6 + \frac{1}{6720} B_7 + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{15120} B_8 + \frac{1}{30240} B_9 \right] + \frac{z^6}{b^6} \left[\frac{1}{5040} B_6 + \frac{1}{40320} B_7 + \frac{1}{181440} B_8 + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{604880} B_9 \right] + \frac{z^8}{b^8} \left[\frac{1}{362880} B_8 + \frac{1}{3628800} B_9 \right] + \left[\sin \frac{z}{b} \text{ci} \frac{z}{b} - \right. \\ &- \left. \cos \frac{z}{b} \text{si} \frac{z}{b} \right] \left[-\frac{z}{b} B_0 + \frac{z^3}{b^3} B_2 \frac{1}{6} + \frac{z^5}{b^5} \frac{1}{120} B_4 + \frac{z^7}{b^7} \frac{1}{5040} B_6 - \frac{z^9}{b^9} \times \right. \\ &\times \left. \frac{1}{362880} B_8 \right] + \left[\sin \frac{z}{b} \text{si} \frac{z}{b} + \cos \frac{z}{b} \text{ci} \frac{z}{b} \right] \left[\frac{z^2}{b^2} \frac{1}{2} B_1 - \frac{z^4}{b^4} \frac{1}{24} B_3 + \right. \\ &+ \left. \frac{z^6}{b^6} \frac{1}{720} B_5 - \frac{z^8}{b^8} \frac{1}{40320} B_7 + \frac{z^{10}}{b^{10}} \frac{1}{362880} B_9 \right] \left. \right\}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2.19) \quad \mathcal{F}_0^{-1}[\alpha\Phi_2] = & \frac{1}{b} \left\{ \frac{z}{b} \left[\frac{1}{2} B_1 + \frac{1}{6} B_2 + \frac{1}{12} B_3 + \frac{1}{20} B_4 + \frac{1}{30} B_5 + \frac{1}{42} B_6 + \frac{1}{56} B_7 + \right. \right. \\
 [c.d.] & \left. \left. + \frac{1}{72} B_8 + \frac{1}{90} B_9 \right] - \frac{z^3}{b^3} \left[\frac{1}{24} B_3 + \frac{1}{120} B_4 + \frac{1}{360} B_5 + \frac{1}{840} B_6 + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{1}{1680} B_7 + \frac{1}{3024} B_8 + \frac{1}{5040} B_9 \right] + \frac{z^5}{b^5} \left[\frac{1}{720} B_5 + \frac{1}{5040} B_6 + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{1}{20160} B_7 + \frac{1}{60480} B_8 + \frac{1}{151200} B_9 \right] - \frac{z^7}{b^7} \left[\frac{1}{40320} B_7 + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{1}{362880} B_8 + \frac{1}{1814400} B_9 \right] + \frac{z^9}{b^9} \frac{1}{3628800} B_9 + \left[\sin \frac{z}{b} \operatorname{ci} \frac{z}{b} - \cos \frac{z}{b} \times \right. \\
 & \left. \times \operatorname{si} \frac{z}{b} \right] \left[-\frac{z^2}{b^2} \frac{1}{2} B_1 + \frac{z^4}{b^4} \frac{1}{24} B_3 - \frac{z^6}{b^6} \frac{1}{720} B_5 + \frac{z^8}{b^8} \frac{1}{40320} B_7 - \right. \\
 & \left. - \frac{z^{10}}{b^{10}} \frac{1}{3628800} B_9 \right] + \left[\sin \frac{z}{b} \operatorname{si} \frac{z}{b} + \cos \frac{z}{b} \operatorname{ci} \frac{z}{b} \right] \cdot \left[-\frac{z}{b} B_0 + \frac{z^2}{b^2} B_2 \frac{1}{6} - \right. \\
 & \left. - \frac{z^5}{b^5} \frac{1}{120} B_4 + \frac{z^7}{b^7} \frac{1}{5040} B_6 - \frac{z^9}{b^9} \frac{1}{3628800} B_8 \right] \left. \right\}.
 \end{aligned}$$

Tutaj $B_k = \sum_{l=0}^9 A_{lk} \bar{\Phi}_{(1)2}(\alpha_1 b)$, przy oznaczeniu $\bar{\Phi}_{(1)2} = \bar{\Phi}_1 \vee \bar{\Phi}_2$.

Wzory (2.14) z uwzględnieniem (2.15) i (2.19) dają łącznie postać poszukiwanych retransformat.

Uwzględniając jak poprzednio własności splotu z δ -funkcjonałem i wybierając tę samą co poprzednio drogę całkowania otrzymamy w efekcie funkcję zmiennych rzeczywistych x_1, x_2 jako wynik ostateczny.

Suma (2.13) oraz (2.14) przy uwzględnieniu (2.15) i (2.19) jest poszukiwaną funkcją Greena dla nieskończonego pasma płytowego, postawione więc na wstępie zadanie uznać należy za rozwiązane.

Zauważmy, że wyrażenie (2.13) jest znanym rozwiązaniem podstawowym operatora biharmonicznego, zgodnie więc z określeniem funkcji Greena stanowi jej część osobliwą. Wzory (2.14), (2.15) dają jej część regularną.

3. Zakończenie

Jak wynika z przytoczonych rozwiązań, zastosowanie elementów teorii ultradystrybucji okazało się trafnym i zręcznym sposobem konstrukcji rozwiązania problemu (2.1), (2.2). Nasuwa się pytanie czy stosowanie tego aparatu było konieczne?

By w pełni udzielić odpowiedzi zauważmy, że retransformaty poszczególnych członów wyrażenia (2.8) nie istnieją w zwykłym sensie, a nawet jako dystrybucje. Można je znaleźć jedynie w przestrzeni \mathcal{D}'^* , a więc istnieją tylko jako ultradystrybucje. Uogólniona w sensie

przestrzeni \mathcal{L}^* postać funkcji Greena ma, jak to pokazano [wzory (2.13), (2.14), (2.15) i (2.18)] kształt

$$(3.1) \quad w = \frac{1}{16\pi} [c_0 z^2 - z^2 \ln |z|] * [\delta(z - ix_1) + \delta(z + ix_1)] + \frac{1}{16\pi} x_1 |z| * [\delta(z - ix_1) + \delta(z + ix_1)] - \frac{1}{8\pi} \left\{ \left[\sum_{k=0}^{n-1} B_k \mathcal{J}_{k-2}^c \right] * [\delta(z + ix_1) + \delta(z - ix_1)] + \left[\sum_{k=0}^{n-1} B_k \mathcal{J}_{k-2}^s \right] * [\delta(z + ix_1) - \delta(z - ix_1)] \right\},$$

gdzie $\mathcal{J}_{k-2}^c, \mathcal{J}_{k-2}^s$ są odpowiednimi całkami w (2.18). Odsiewające własności δ -funkcjonału pozwalają stąd otrzymać rzeczywistą postać funkcji Greena

$$(3.2) \quad w = \frac{1}{16\pi} [(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2] \ln [(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2] + R(x_1, x_2, \xi_1, \xi_2),$$

gdzie część regularna $R(x_1, x_2, \xi_1, \xi_2)$ określona jest związkami (2.19) przy podstawieniu

$$\text{Im } z = x_1; \quad \arg z = \frac{\pi}{4} \quad \text{oraz} \quad x_1 \equiv x_1 - \xi_1; \quad x_2 \equiv x_2 - \xi_2.$$

Warto w tym miejscu jeszcze pokazać, że otrzymane rozwiązanie spełnia warunki równowagi. W tym celu wykorzystamy następującą własność \mathcal{F}_0 — transformacji:

$$\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-\alpha x} dx \right]_{\alpha=0} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \mathcal{F}_0[f]_{\alpha=0}.$$

Spełnienie warunków równowagi oznacza, że zachodzi równość

$$(3.3) \quad \bigwedge_{\Omega \subset D} \int_{\partial\Omega} Q_n|_{\partial\Omega} d[\partial\Omega] + \int_{\Omega} \delta(x_1, x_2) d\Omega = 0,$$

gdzie Q_n oznacza siłę poprzeczną.

Jako kontur całkowania wybrać można (bez szkody dla ogólności) kontur $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, gdzie

$$\Gamma_1 = \{x_2 \in (-\infty, \infty); x_1 = 0_+\},$$

$$\Gamma_2 = \{x_2 \in (-\infty, \infty); x_1 = 0_-\}.$$

Warunek (3.3) przybiera wtedy postać

$$\int_{\Gamma_1} Q_1(0_+, x_2) dx_2 + \int_{\Gamma_2} Q_1(0_-, x_2) dx_2 + 1 = 0;$$

uwzględniając związek

$$Q_1 = -\frac{\partial}{\partial x_1} \nabla^2 w$$

otrzymamy po transformacji

$$\tilde{Q}_1 = -\tilde{w}^{(3)} + \alpha^2 \tilde{w}^{(1)}.$$

Stąd po podstawieniu (2.8)

$$\tilde{Q}_1 = \frac{1}{2} \text{sgn } x_1 \text{ch } \alpha x_1 - \frac{1}{2} \frac{(1+\nu) \text{sh}^2 ab + 2\text{ch}^2 ab}{(3+\nu) \text{sh } ab \text{ch } ab - ab(1-\nu)} \text{sh } \alpha x_1,$$

a po przejściu do granicy $\alpha \rightarrow 0$, $x_1 \rightarrow 0_{\pm}$,

$$\tilde{Q}_1 \Big|_{\substack{\alpha=0 \\ x_1=0_+}} = -\frac{1}{2}; \quad \tilde{Q}_1 \Big|_{\substack{\alpha=0 \\ x_1=0_-}} = -\frac{1}{2}.$$

Warunek równowagi przybiera teraz postać

$$\int_{\Gamma_1} Q_1 \Big|_{x_1=0_+} dx_2 + \int_{\Gamma_2} Q_1 \Big|_{x_1=0_-} dx_2 + 1 = -1 + 1 = 0.$$

Uzyskane rozwiązanie (3.2) spełnia więc warunek równowagi, co zamierzano pokazać.

Literatura cytowana w tekście

1. Р. Эдвардс, *Функциональный анализ, теория и приложения*, Изд. Мир, Москва 1969.
2. Я. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов, *Обобщенные функции*, вып. 1. *Обобщенные функции и действия над ними*, Гос. Издат. Физ.-Мат. лит., Москва 1961.
3. Я. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов, *Обобщенные функции*, вып. 2. *Пространства основных и обобщенных функций*, Гос. Издат. Физ.-Мат. лит. Москва 1961.
4. S. G. KREJN i in., *Analiza funkcyjonalna*, PWN, Warszawa 1967.
5. В. Я. Крылов, Л. Г. Кругликова, *Справочная книга по численному гармоническому анализу*, Изд. Наука и Техн., Минск 1968
6. A. ZEMANIAN, *Teoria dystrybucji i analiza transformat*, PWN, Warszawa 1969.

Резюме

ОБОБЩЁННАЯ ФУНКЦИЯ ГРИНА ДЛЯ БЕСКОНЕЧНОЙ ПОЛОСЫ

В работе дан метод конструкции обобщённых функций Грина для бесконечной полосы со свободными краями. Решение получено путем применения обобщённых функции (так называемых «ультра-распределений»). На этой основе удалось значительно ослабить предположения о регулярности решения, расширить возможности введения многих операций, не имеющих классического смысла и др. Данный метод оказывается эффективным, а окончательные вычисления, после применения метода Крылова — элементарны. Работа является примером применения ультра-распределений к граничным задачам теории упругости.

Summary

GENERALIZED GREEN'S FUNCTION FOR AN INFINITE PLATE STRIP

In the paper is constructed the generalized Green function for an infinite plate strip with free edges. The solution is found by means of ultradistributions what makes it possible to weaken the assumptions, to increase the possibility of performing certain operations which are not applicable in the classical sense, and to make the considerations more compact. It should be stressed that the method presented is effective, and the final results — after application of the Krylov method of approximate evaluation of Fourier integrals — are elementary.

The paper represents an example of application of the theory of ultradistributions to the boundary value problems of elasticity.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 3 maja 1972 r.