

PRZYKŁADY ULTRADYSTRYBUCYJNYCH ROZWIĄZAŃ PASMA PŁYTOWEGO

JAN GRABACKI, GWIDON SZEFER (KRAKÓW)

1. Wstęp

W pracy przedstawione będą rozwiązania wybranych zadań klasycznej teorii płyt, uzyskane przy użyciu transformacji Fouriera w przestrzeni ultradystrybucji. Transformację tego typu nazywać będziemy dalej \mathcal{F}_0 — transformacją.

Znaczenie teorii dystrybucji w problemach brzegowych mechaniki jest powszechnie znane; uogólnienie rozwiązań na przestrzeń dystrybucji temperowanych i ultradystrybucji niesie ze sobą dalsze korzyści.

W pracy chcemy pokazać, że zastosowanie aparatu ultradystrybucji ma nie tylko cechy zabiegu formalnego i matematycznej elegancji, ale również znamiona zręcznego i wygodnego algorytmu praktycznego. Istotnym elementem stanowiącym o przewadze omawianej metody nad klasyczną transformacją Fouriera jest to, że zastosowany aparat nie wymaga żadnych założeń dotyczących regularności, zachowania w nieskończoności itp. Fizyczne znaczenie tak otrzymanych rozwiązań podkreśla przy tym twierdzenie, które orzeka, że ultradystrybucyjne rozwiązania problemów brzegowych są identyczne z rozwiązaniami klasycznymi, o ile te ostatnie istnieją. Wynika stąd, że nawet wtedy, gdy zadanie można rozwiązać metodami tradycyjnymi, stosowanie ultradystrybucji prowadzi do wyników identycznych. Jeśli zatem uda się pokazać, że operowanie tymi uogólnionymi pojęciami prowadzi poza wspomnianą ogólnością również do wygodnych, łatwych i efektywnych obliczeń — to korzyści wynikające ze stosowania tych środków będą bezsporne. Te ostatnie walory łatwo zademonstrować na prostym przykładzie. Mianowicie, w wielu zadaniach płaskiej teorii sprężystości (tarcze, płyty) przy zastosowaniu transformacji Fouriera napotykamy wyrażenia typu $g(\alpha)h(\alpha x)$, których retransformaty $\mathcal{F}^{-1}[g(\alpha)h(\alpha x)]$ istnieją (w zwykłym sensie), lecz obliczenie których nastęrcza duże trudności rachunkowe (zazwyczaj są to złożone całki nieelementarne). Zastosowanie twierdzenia o splocie mogłoby tu ułatwić obliczenie, ale zazwyczaj bywa tak, że o ile wykonanie operacji $\mathcal{F}^{-1}[g(\alpha)]$ nie sprawia większych trudności (w ostateczności można skorzystać z efektywnych metod przybliżonych) — to retransformata $\mathcal{F}^{-1}[h(\alpha x)]$ nie istnieje. Typowym przykładem takiej sytuacji może być funkcja $h(\alpha x) = \text{ch } \alpha x$, której retransformata nie istnieje nawet w sensie dystrybucji Schwarza (temperowanych). Można jednak pokazać, że retransformata tej funkcji istnieje w przestrzeni ultradystrybucji. Dzięki temu można tu stosować twierdzenie o splocie (uogólnionym), a wynik operacji uzyskuje się łatwiej, niż w przypadku transformacji odwrotnej całego iloczynu.

W pracy niniejszej zetkniemy się z podobnym przypadkiem niejednokrotnie.

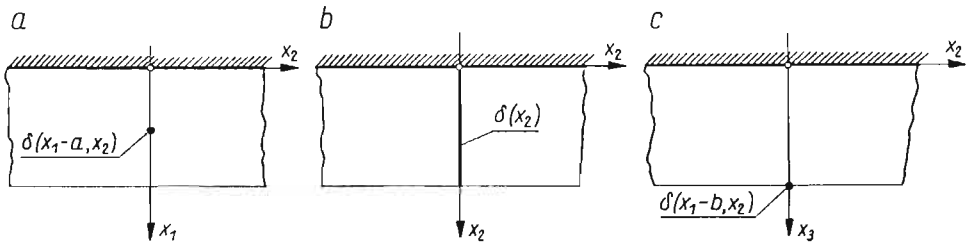
Celowo ograniczyliśmy przy tym temat do takich zadań, które można by rozwiązać metodami klasycznymi, względnie których rozwiązania są wprost znane. Pragniemy tu bowiem podać nie tyle rozwiązania nowych zagadnień, ile zilustrować możliwości i zastosowania teorii ultradystrybucji.

Rozwiązano więc w pracy następujące zadania :

zadanie I — pasmo płytowe z jednym brzegiem utwierdzonym, a drugim swobodnym obciążone siłą skupioną (rys. 2a);

zadanie II — pasmo płytowe jak wyżej, lecz z obciążeniem liniowym (rys. 2b);

zadanie III — pasmo płytowe jak wyżej, obciążone siłą skupioną na brzegu swobodnym (rys. 2c).



Rys. 1

W dalszym ciągu podamy definicje i określenia pojęć użytych w pracy.

\mathcal{D} — przestrzeń funkcji próbnych klasy C_0^∞ o nośnikach zwartych, czyli

$$\mathcal{D} = \bigcup_{\Omega} \mathcal{D}(\Omega),$$

gdzie $\Omega \in \mathbf{R}_1$ oraz

$$\mathcal{D}(\Omega) = \{\varphi(x) : \varphi(x) \in C_0^\infty \wedge \text{supp } \varphi(x) \subset \Omega\},$$

przy czym $\text{supp } \varphi(x)$ oznacza tutaj nośnik funkcji $\varphi(x)$;

\mathcal{D}^* — przestrzeń sprzężona z przestrzenią funkcji próbnych \mathcal{D} , czyli przestrzeń ciągłych funkcjonalów liniowych określonych na \mathcal{D} , dalej nazywana również przestrzenią dystrybucji;

\mathcal{S} — przestrzeń funkcji próbnych «szybko malejących»

$$\mathcal{S} = \{\varphi(x) : \varphi(x) \in C^\infty \wedge \bigwedge_{m,k} \bigvee_{C_{m,k}} |x^m| |\varphi(x)^{(k)}| \leq C_{m,k}\};$$

\mathcal{S}^* — przestrzeń sprzężona z przestrzenią funkcji próbnych \mathcal{S} , dalej nazywaną również przestrzenią «dystrybucji temperowanych»;

\mathcal{L} — przestrzeń analitycznych funkcji próbnych i całkowych

$$\mathcal{L} = \bigcup_a \mathcal{L}_a,$$

gdzie

$$\mathcal{L}_a = \left\{ \psi(z) : \psi(z) \text{ analit} \wedge \bigwedge_k \bigvee_{C_k} |z^k| |\psi(z)| \leq C_k e^{a|\beta|} \right\},$$

$$\beta = \text{Im } z, \quad a \in \mathbf{R}_1;$$

\mathcal{L}^* — przestrzeń sprzężona z przestrzenią funkcji próbnych \mathcal{L} , nazywana również przestrzenią ultradystrybucji.

Elementy którejkolwiek z określonych wyżej przestrzeni sprzężonych (bez bliższego określenia o którą z nich chodzi) noszą wspólną nazwę funkcji uogólnionych.

Definiując uogólniony operator Fouriera

$$\mathcal{F}_0 \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \dots e^{i\alpha x} dx,$$

$$\mathcal{F}_0^{-1} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dots e^{-i\alpha x} d\alpha,$$

gdzie $\alpha \in \mathbf{Z}$ (przestrzeń zespolona), można dowieść, że przestrzeń \mathcal{L} jest \mathcal{F}_0 — obrazem przestrzeni \mathcal{D} , czyli

$$\mathcal{F}_0[\mathcal{D}] = \mathcal{L} \text{ lub inaczej } \mathcal{D} \xrightarrow[\mathcal{F}_0]{} \mathcal{L}.$$

Przekształcenie Fouriera w przestrzeni dystrybucji określa definicja

$$\langle \mathcal{F}_0[f], \varphi \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \langle f, \mathcal{F}_0[\varphi] \rangle,$$

operacja \mathcal{F}_0 jest więc bijektywnym odwzorowaniem

$$\mathcal{F}_0[\mathcal{D}^*] = \mathcal{L}^* \text{ lub } \mathcal{D}^* \xrightarrow[\mathcal{F}_0]{} \mathcal{L}^*.$$

Każda dystrybucja ma więc swoją \mathcal{F}_0 — transformatę, która jest ultradystrybucją.

Różniczkowanie

$$\frac{d^k}{dx} kf = f_{(x)}^{(k)}, \quad k \text{ — liczba naturalna,}$$

rozumieć należy w przestrzeni funkcji uogólnionych w sensie Sobolewa jako operację

$$\langle f_{(x)}^{(k)}, \varphi(x) \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \langle f(x), (-1)^k \varphi_{(x)}^{(k)} \rangle.$$

2. Zadanie I

Pasma płytowe traktuje się jak rozmaitość różniczkowalną w E_2 określoną następująco:

$$D = \{x_1, x_2 : x_1 \in (0, b) \wedge x_2 \in (-\infty, +\infty)\},$$

$$\Gamma_1 = \{x_1, x_2 : x_1 = b \wedge x_2 \in (-\infty, +\infty)\},$$

$$\Gamma_0 = \{x_1, x_2 : x_1 = 0 \wedge x_2 \in (-\infty, +\infty)\}.$$

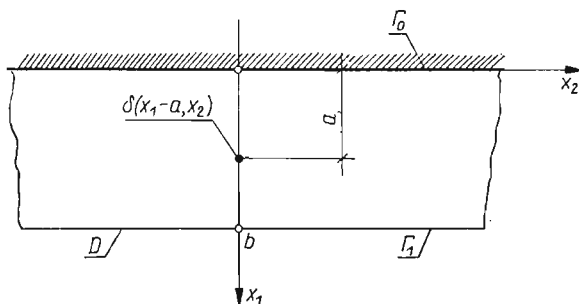
Formalnie zadanie sprowadza się do rozwiązania problemu brzegowego

$$(2.1) \quad \nabla^2 \nabla^2 w = \delta(x_1 - a, x_2)$$

(przyjęto sztywność płyty $K = 1$),

$$(2.2) \quad \begin{aligned} w \Big|_{r_0} = \frac{\partial w}{\partial x_1} \Big|_{r_0} &= 0, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \Big|_{r_1} &= 0, \\ \frac{\partial^3 w}{\partial x_1^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x_1 \partial x_2^2} \Big|_{r_1} &= 0. \end{aligned}$$

Tutaj $w(x_1, x_2)$ jest ugięciem powierzchni środkowej płyty, ν — liczbą Poissona, a $\delta(x_1 - a, x_2) = \delta(x_1 - a) \times \delta(x_2)$ jest dystrybucją δ Diraca (iloczyn tensorowy).



Rys. 2

W celu rozwiązania zadania zakładamy, że w jest elementem przestrzeni ultradystrybucji (konsekwencją tego założenia jest, że różniczkowanie przepisane operatorami w równaniach (2.1) oraz (2.2) rozumieć teraz należy w sensie Sobolewa). Wykonując na równaniu (2.1) oraz na warunkach brzegowych (2.2), \mathcal{F}_0 — operację względem zmiennej x_2 , otrzymujemy równoważny problem w przestrzeni \mathcal{F}_0 — obrazu.

$$(2.3) \quad [d^2 - \alpha^2]^2 \tilde{w} = \delta(x_1 - a);$$

$$\tilde{w}|_{r_0} = \tilde{w}^{(1)}|_{r_0} = 0,$$

$$(2.4) \quad \tilde{w}^{(2)} - \nu \alpha^2 \tilde{w}|_{r_1} = 0,$$

$$\tilde{w}^{(3)} - (2 - \nu) \alpha^2 \tilde{w}^{(1)}|_{r_1} = 0.$$

$$\text{Tutaj} \quad [d^2 - \alpha^2]^2 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d^4}{dx_1^4} - 2\alpha^2 \frac{d^2}{dx_1^2} + \alpha^4,$$

$$\tilde{w} = \mathcal{F}_0[w], \quad \tilde{w}(x_1, \alpha) \in \mathcal{L}_{x_1}^* \times \mathcal{D}_\alpha^*;$$

oznaczono tu ponadto

$\mathcal{L}_{x_1}^*$ — przestrzeń ultradystrybucji ze względu na zmienną x_1 ;

\mathcal{D}_α^* — przestrzeń dystrybucji ze względu na zmienną α .

Rozwiązaniem problemu (2.3), (2.4) będzie więc rodzina ultradystrybucji zależnych dystrybucyjnie od parametru α .

Poszukując tego rozwiązania wykorzystano następujące twierdzenia [7, 2]:

- (a) rozwiązania ultradystrybucyjne liniowych równań różniczkowych zwyczajnych są (z dokładnością do stałego czynnika) identyczne z rozwiązaniami klasycznymi;
- (b) rozwiązaniem równania $L^n(u) = \delta(x)$, w którym

$$L^n = a_n \frac{d^n}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{d}{dx} + a_0$$

jest funkcja $u = h(x)H(x)$, gdzie $H(x)$ — funkcja Heaviside'a, $h(x)$ — spełnia równanie jednorodne $L^n[h] = 0$ oraz warunki początkowe

$$h|_{x=0} = h^{(1)}|_{x=0} = \dots = h^{(n-2)}|_{x=0} = 0, \quad h^{(n-1)}|_{x=0} = 1/a_n.$$

Rozwiązanie to wyznaczone jest z dokładnością do dowolnej całki ogólnej równania jednorodnego $L^n[u] = 0$.

Wykorzystując przytoczone twierdzenie przyjmiemy

$$(2.5) \quad \tilde{w}_1(x_1, \alpha) = A \operatorname{ch} \alpha x_1 + B \alpha x_1 \operatorname{ch} \alpha x_1 + C \operatorname{sh} \alpha x_1 + D \alpha x_1 \operatorname{sh} \alpha x_1,$$

a stałe $A(\alpha)$, $B(\alpha)$, $C(\alpha)$, $D(\alpha)$ wyznaczmy z równań

$$\begin{aligned} \tilde{w}_1|_{x_1=a} = \tilde{w}_1^{(1)}|_{x_1=a} = w_1^{(2)}|_{x_1=a} = 0, \\ \tilde{w}_1^{(3)}|_{x_1=a} = 1, \end{aligned}$$

otrzymując przy oznaczeniu $\lambda = \alpha a$

$$A = -\frac{1}{2\alpha^3} [\lambda \operatorname{ch} \lambda - \operatorname{sh} \lambda],$$

$$B = \frac{1}{2\alpha^3} \operatorname{ch} \lambda,$$

$$C = -\frac{1}{2\alpha^3} [\operatorname{ch} \lambda - \lambda \operatorname{sh} \lambda],$$

$$D = -\frac{1}{2\alpha^3} \operatorname{sh} \lambda.$$

Zatem rozwiązanie problemu (2.3), (2.4) będzie miało postać

$$(2.7) \quad \tilde{w} = \frac{1}{4\alpha^3} \{ (\operatorname{sh} \lambda - \lambda \operatorname{ch} \lambda) \operatorname{ch} \alpha x_1 + (\operatorname{ch} \lambda) \alpha x_1 \operatorname{ch} \alpha x_1 + \\ + (\lambda \operatorname{sh} \lambda - \operatorname{ch} \lambda) \operatorname{sh} \alpha x_1 - (\operatorname{sh} \lambda) \alpha x_1 \operatorname{sh} \alpha x_1 \} [H(x_1 - a) - H(a - x_1)] + \\ + C_1 \operatorname{ch} \alpha x_1 + C_2 \alpha x_1 \operatorname{ch} \alpha x_1 + C_3 \operatorname{sh} \alpha x_1 + C_4 \alpha x_1 \operatorname{sh} \alpha x_1.$$

Wyrażenie

$$\tilde{w}_0 = C_1 \operatorname{ch} \alpha x_1 + C_2 \alpha x_1 \operatorname{ch} \alpha x_1 + C_3 \operatorname{sh} \alpha x_1 + C_4 \alpha x_1 \operatorname{sh} \alpha x_1$$

oznacza tutaj (zgodnie z twierdzeniem) całkę ogólną równania

$$[d^2 - \alpha^2]^2 \tilde{w}_0 = 0.$$

Wyznaczając stałe C_1, C_2, C_3, C_4 z warunków (2.4) otrzymuje się przy oznaczeniach

$$(2.8) \quad \begin{aligned} \varphi_1(\alpha) &= \operatorname{sh} \lambda - \lambda \operatorname{ch} \lambda, \\ \varphi_2(\alpha) &= \lambda \operatorname{sh} \lambda, \\ \varphi_3(\alpha) &= (1-\nu)(\kappa-\lambda)(\operatorname{ch} \lambda \operatorname{ch} \kappa - \operatorname{sh} \lambda \operatorname{sh} \kappa) + (1+\nu)(\operatorname{ch} \lambda \operatorname{sh} \kappa - \operatorname{sh} \lambda \operatorname{ch} \kappa), \\ \varphi_4(\alpha) &= (\lambda-\kappa)(1-\nu)(\operatorname{ch} \lambda \operatorname{sh} \kappa - \operatorname{sh} \lambda \operatorname{ch} \kappa) - 2 \operatorname{sh} \lambda \operatorname{sh} \kappa + 2 \operatorname{ch} \lambda \operatorname{ch} \kappa, \end{aligned}$$

gdzie $\kappa = \alpha b$, wielkości

$$(2.9) \quad \begin{aligned} C_1 &= \frac{\varphi_1}{4\alpha^3}, \\ C_2 &= \frac{1}{4\alpha^3} \left\{ \frac{\varphi_3[(1+\nu)\operatorname{sh} \kappa - (1-\nu)\kappa \operatorname{ch} \kappa] - \varphi_4[2\operatorname{ch} \kappa + (1-\nu)\kappa \operatorname{sh} \kappa]}{2(1-\nu)\operatorname{ch}^2 \kappa + (1-\nu^2)\operatorname{sh}^2 \kappa + 2(1+\nu) + (1-\nu)^2 \kappa^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\varphi_2[2(1-\nu)\operatorname{ch}^2 \kappa + (1-\nu^2)\operatorname{sh}^2 \kappa] + \varphi_1(1-\nu)[(3+\nu)\operatorname{sh} \kappa \operatorname{ch} \kappa - \kappa(1-\nu)]}{2(1-\nu)\operatorname{ch}^2 \kappa + (1-\nu^2)\operatorname{sh}^2 \kappa + 2(1+\nu) + (1-\nu)^2 \kappa^2} \right\}, \\ C_3 &= \frac{-1}{4\alpha^3} \left\{ \frac{\varphi_3[(1+\nu)\operatorname{sh} \kappa - (1-\nu)\kappa \operatorname{ch} \kappa] - \varphi_4[2\operatorname{ch} \kappa + (1-\nu)\kappa \operatorname{sh} \kappa] - \right. \\ &\quad \left. - \varphi_2[2(1+\nu) - \kappa^2(1-\nu^2)]}{2(1-\nu)\operatorname{ch}^2 \kappa + (1-\nu^2)\operatorname{sh}^2 \kappa + 2(1+\nu) + (1-\nu)^2 \kappa^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\varphi_1(1-\nu)[(3+\nu)\operatorname{sh} \kappa \operatorname{ch} \kappa - (1-\nu)\kappa]}{2(1-\nu)\operatorname{ch}^2 \kappa + (1-\nu^2)\operatorname{sh}^2 \kappa + 2(1+\nu) + (1-\nu)^2 \kappa^2} \right\}, \\ C_4 &= \frac{-1}{4\alpha^3} \left\{ \frac{\varphi_3 \operatorname{ch} \kappa + \varphi_4 \operatorname{sh} \kappa + \varphi_1}{2\operatorname{ch}^2 \kappa + (1+\nu)\operatorname{sh}^2 \kappa} - C_2 \frac{(3+\nu)\operatorname{sh} \kappa \operatorname{ch} \kappa + (1-\nu)\kappa}{2\operatorname{ch}^2 \kappa + (1-\nu)\operatorname{sh}^2 \kappa} \right\}. \end{aligned}$$

W ten sposób uzyskano rozwiązania dla transformaty.

Aby efektywnie znaleźć funkcję $w(x_1, x_2)$ należy na wyrażeniu (2.7) wykonać transformację odwrotną \mathcal{F}_0^{-1} .

Ze względu na złożoną budowę stałych C_1, \dots, C_0 , wykonanie tej operacji jest uciążliwe. Pomocna jest tutaj przybliżona procedura KRYŁOWA [6] obliczania całek Fouriera. Pozwala ona, z dowolną w zasadzie dokładnością, wyznaczyć poszukiwaną funkcję.

Zauważmy przed tym, że wyrażenie

$$(2.10) \quad \begin{aligned} \tilde{w}_1 &= \frac{1}{4\alpha^3} \{ (\operatorname{sh} \lambda - \lambda \operatorname{ch} \lambda) \operatorname{ch} \alpha x_1 + \operatorname{ch} \lambda \alpha x_1 \operatorname{ch} \alpha x_1 + \\ &\quad + (\lambda \operatorname{sh} \lambda - \operatorname{ch} \lambda) \operatorname{sh} \alpha x_1 - \operatorname{sh} \lambda \alpha x_1 \} [H(x_1 - a) - H(a - x_1)] \end{aligned}$$

po prostych przekształceniach może być doprowadzone do postaci

$$(2.11) \quad \tilde{w}_1 = \frac{1}{4\alpha^3} \{ \operatorname{sh} \alpha(a - x_1) - \alpha(a - x_1) \operatorname{ch} \alpha(a - x_1) \} [H(x_1 - a) - H(a - x_1)].$$

Retransformatę tej funkcji wyznaczyć można w sposób ścisły. Mianowicie, zapisując najpierw

$$\mathcal{F}_0^{-1}[\tilde{w}_1] = \mathcal{F}_0^{-1}\left[\frac{1}{8\alpha^3}e^{-\alpha(a-x_1)}\right] + \mathcal{F}_0^{-1}\left[\frac{a-x_1}{8\alpha^2}e^{-\alpha(a-x_1)}\right] - \\ - \mathcal{F}_0^{-1}\left[\frac{1}{8\alpha^3}e^{\alpha(a-x_1)}\right] + \mathcal{F}_0^{-1}\left[\frac{a-x_1}{8\alpha^2}e^{\alpha(a-x_1)}\right],$$

a następnie wykorzystując twierdzenie o splocie i przyjmując oznaczenie $a-x_1 = \xi_1$, można znaleźć [5] retransformaty składników

$$\mathcal{F}_0^{-1}\left[\frac{1}{8\alpha^3}e^{-\alpha\xi_1}\right] = \frac{1}{16\pi} [c_0 z^2 \cdot \ln|z|] \ast \delta(z - i\xi_1), \\ \mathcal{F}_0^{-1}\left[\frac{1}{8\alpha^3}e^{\alpha\xi_1}\right] = \frac{1}{16\pi} [c_0 z^2 - c_1 z^2 \cdot \ln|z|] \ast \delta(z + i\xi_1), \\ \mathcal{F}_0^{-1}\left[\frac{\xi_1}{8\alpha^2}e^{-\alpha\xi_1}\right] = \frac{1}{16\pi} \xi_1 |z| \ast \delta(z - i\xi_1), \\ \mathcal{F}_0^{-1}\left[\frac{\xi_1}{8\alpha^2}e^{\alpha\xi_1}\right] = \frac{1}{16\pi} \xi_1 |z| \ast \delta(z + i\xi_1),$$

gdzie $c_0 = 1$, $c_1 = \frac{2(-1)^3}{2!} \cos 2\frac{\pi}{2} = 1$. Funkcjonały δ są tutaj retransformatami odpowiednich funkcji wykładniczych.

Uwzględniając w dalszym ciągu własności spłotu z δ -funkcjonałem i traktując otrzymane retransformaty jak analityczne funkcyjonały zdefiniowane na przestrzeni funkcji próbnych \mathcal{L} , a więc jak całki

$$\int_{\Gamma} f(z) \varphi(z) \alpha z; \quad \varphi(z) \in \mathcal{L}$$

(tutaj Γ jest drogą całkowania w płaszczyźnie zespolonej rozciągającą się od $-\infty$ do $+\infty$) oraz przyjmując $\text{Im} z = \xi_1$ otrzymamy drogę całkowania określoną prostą $\psi = \arg z = \frac{\pi}{4}$; $z = r(\cos \psi + i \sin \psi)$ otrzymamy (z dokładnością do mnożnika i)

$$\mathcal{F}_0^{-1}[\tilde{w}_1] = \frac{1}{16\pi} r^2 \ln r^2 = \frac{1}{16\pi} (\xi_1^2 + x_2^2) \ln (\xi_1^2 + x_2^2).$$

Po podstawieniu w miejsce ξ_1 różnicy $a-x_1$

$$(2.12) \quad \mathcal{F}_0^{-1}[\tilde{w}_1] = \frac{1}{16\pi} [(a-x_1)^2 + x_2^2] \ln [(a-x_1)^2 + x_2^2].$$

Tak więc pozostaje do wyznaczenia retransformata funkcji $\tilde{w}_0(\alpha_1, x_1)$.

Stosując twierdzenie o splocie można napisać

$$\mathcal{F}_0^{-1}[\tilde{w}_0] = \mathcal{F}_0^{-1}[C_1(\alpha) \text{ch } \alpha x_1] + \mathcal{F}_0^{-1}[C_2(\alpha) \alpha x_1] \ast \mathcal{F}_0^{-1}[\text{ch } \alpha x_1] + \\ + \mathcal{F}_0^{-1}[C_3(\alpha)] \ast \mathcal{F}_0^{-1}[\text{sh } \alpha x_1] + \mathcal{F}_0^{-1}[C_4(\alpha) \alpha x_1] \ast \mathcal{F}_0^{-1}[\text{sh } \alpha x_1].$$

Retransformatę stanowiącą pierwszy składnik sumy można znaleźć w sposób ścisły. Zauważmy w tym celu, że wyrażenie $C_1(\alpha)\text{ch}\alpha x_1$ można przekształcić do postaci

$$C_1(\alpha)\text{ch}\alpha x_1 = \frac{1}{4\alpha^3} (\text{sh}\lambda - \lambda\text{ch}\lambda)\text{ch}\alpha x_1 = \frac{-a}{4\alpha^2}\text{ch}\alpha(a-x_1).$$

Wobec tego (przy $\xi_1 = a - x_1$)

$$\mathcal{F}_0^{-1}[C_1(\alpha)\text{ch}\alpha x_1] = \mathcal{F}_0^{-1}\left[\frac{-a}{8\alpha^2}\right] * \{\mathcal{F}_0^{-1}[e^{-a\xi_1}] + \mathcal{F}_0^{-1}[e^{a\xi_1}]\},$$

a stąd wykorzystując podane retransformaty oraz postępując w sposób opisany przy znajdowaniu retransformaty $\mathcal{F}_0^{-1}[\tilde{w}_1]$ otrzymamy

$$(2.13) \quad \mathcal{F}_0^{-1}[C_1(\alpha)\text{ch}\alpha x_1] = \frac{-a}{8\pi} \sqrt{x_2^2 + (a-x_1)^2}.$$

Do wyznaczenia pozostają więc retransformaty stanowiące trzy pozostałe składniki sumy. Uwzględniając, że

$$\mathcal{F}_0^{-1}[\text{ch}\alpha x_1] = \frac{1}{2} [\delta(z - ix_1) + \delta(z + ix_1)],$$

$$\mathcal{F}_0^{-1}[\text{sh}\alpha x_1] = \frac{1}{2} [\delta(z - ix_1) - \delta(z + ix_1)],$$

pozostaje znaleźć retransformaty funkcji C_2, C_3, C_4 i tutaj wykorzystać można metodę KRYŁOWA [6].

Trzeba w tym miejscu zaznaczyć, że oryginalna metoda Kryłowa dotyczy funkcji zmiennej rzeczywistej; inaczej mówiąc, retransformaty otrzymane w wyniku zastosowania tej metody będą dystrybucjami temperowanymi.

Korzystając z faktu, że przestrzeń dystrybucji temperowanych jest podprzestrzenią właściwą przestrzeni ultradystrybucji, dystrybucje temperowane mogą być rozszerzone do przestrzeni ultradystrybucji przez formalne zastąpienie zmiennej rzeczywistej zmienną zespoloną. W ten sposób w wyniku przeprowadzenia \mathcal{F}_0^{-1} — operacji otrzymamy sumę splotów retransformat C_2, C_3, C_4 z przesuniętym δ -funkcjonałem. Wykorzystując własności odsiewające tego rodzaju splotów otrzymamy poszukiwane retransformaty, a zatem [uwzględniając (2.13)] funkcję $w_1(x_1, x_2)$.

W celu zastosowania metody Kryłowa przedstawimy funkcje C_2, C_3, C_4 w postaci

$$\alpha x_1 C_2 = \frac{\alpha x_1 C_2 (1+\alpha)^2}{(1+\alpha)^2} = \frac{x_1 C_2^*}{(1+\alpha)^2},$$

$$C_3 = \frac{C_3 (1+\alpha)^2}{(1+\alpha)^2} = \frac{C_3^*}{(1+\alpha)^2},$$

$$\alpha x_1 C_4 = \frac{\alpha x_1 C_4 (1+\alpha)^2}{(1+\alpha)^2} = \frac{x_1 C_4^*}{(1+\alpha)^2}.$$

Następnie aproksymując funkcje C_2^* , C_3^* , C_4^* wielomianami Legendre'a otrzymamy

$$\mathcal{F}_0^{-1}[\alpha x_1 C_2] \cong \frac{x_1}{4\pi} \sum_{k=0}^{n-1} C_2^*(\alpha_k) \sum_{l=0}^{n-1} A_{k,l} \int_0^\infty \cos \alpha z \cdot (1+\alpha)^{-l-2} d\alpha,$$

$$\mathcal{F}_0^{-1}[C_3] \cong \frac{1}{4\pi} \sum_{k=0}^{n-1} C_3^*(\alpha_k) \sum_{l=0}^{n-1} A_{k,l} \int_0^\infty \sin \alpha z \cdot (1+\alpha)^{-l-2} d\alpha,$$

$$\mathcal{F}_0^{-1}[\alpha x_1 C_4] \cong \frac{x_1}{4\pi} \sum_{k=0}^{n-1} C_4^*(\alpha_k) \sum_{l=0}^{n-1} A_{k,l} \int_0^\infty \sin \alpha z \cdot (1+\alpha)^{-l-2} d\alpha,$$

gdzie $A_{k,l}$ są współczynnikami stabelaryzowanymi w [6].

Przy oznaczeniach

$$B_l^i = \sum_{k=0}^{n-1} C_i^* A_{k,l},$$

$$\mathcal{J}_{-l-2}^c = \int_0^\infty (1+\alpha)^{-l-2} \cos \alpha z dx, \quad \mathcal{J}_{-l-2}^s = \int_0^\infty (1+\alpha)^{-l-2} \sin \alpha z d\alpha,$$

otrzymujemy

$$\mathcal{F}_0^{-1}[C_2 \alpha x_1] \cong \frac{x_1}{4\pi} \sum_{l=0}^{n-1} B_l^2 \mathcal{J}_{-l-2}^c,$$

$$(2.14) \quad \mathcal{F}_0^{-1}[C_3] \cong \frac{1}{4\pi} \sum_{l=0}^{n-1} B_l^3 \mathcal{J}_{-l-2}^s,$$

$$\mathcal{F}_0^{-1}[C_4 \alpha x_1] \cong \frac{x_1}{4\pi} \sum_{l=0}^{n-1} B_l^4 \mathcal{J}_{-l-2}^s.$$

Można więc napisać

$$\mathcal{F}_0^{-1}[C_2 \alpha x_1 \operatorname{ch} \alpha x_1]^2 \cong \frac{x_1}{4\pi} \sum_{l=0}^{n-1} B_l^2 \mathcal{J}_{-l-2}^c(z) \times [\delta(z - ix_1) + \delta(z + ix_1)],$$

$$(2.15) \quad \mathcal{F}_0^{-1}[C_3 \operatorname{sh} \alpha x_1] \cong \frac{1}{4\pi} \sum_{l=0}^{n-1} B_l^3 \mathcal{J}_{-l-2}^s(z) \times [\delta(z - ix_1) - \delta(z + ix_1)],$$

$$\mathcal{F}_0^{-1}[C_4 \alpha x_1 \operatorname{sh} \alpha x_1] \cong \frac{x_1}{4\pi} \sum_{l=0}^{n-1} B_l^4 \mathcal{J}_{-l-2}^s(z) \times [\delta(z - ix_1) - \delta(z + ix_1)].$$

Całki \mathcal{J}_{-l-2}^s oraz \mathcal{J}_{-l-2}^c obliczyć można efektywnie; całkując bowiem przez części otrzymujemy w końcu

$$\mathcal{J}_{-1}^c = \int_0^{\infty} \frac{\cos \alpha z}{(1+\alpha)} d\alpha = -\sin z \operatorname{Si} z - \cos z \operatorname{Ci} z,$$

$$\mathcal{J}_{-1}^s = \int_0^{\infty} \frac{\sin \alpha z}{(1+\alpha)} d\alpha = \sin z \operatorname{Ci} z - \cos z \operatorname{Si} z.$$

Jak widać, poza całkowaniem wszystkie pozostałe czynności wykonać można na maszynie cyfrowej, co znacznie poprawia efektywność metody.

Po znalezieniu retransformat (2.14), traktując je jak funkcjonały analityczne i wybierając drogę całkowania $\arg z = \pi/4$ otrzymamy w wyniku funkcje zmiennej rzeczywistej, podobnie jak w przypadku poszukiwania funkcji $w_0(x_1, x_2)$. Ostatecznie będzie więc

$$(2.16) \quad w(x_1, x_2) = \frac{1}{16\pi} [(a-x_1)^2 + x_2^2] \ln[(a-x_1)^2 + x_2^2] - \\ - \frac{a}{8\pi} \sqrt{(a-x_1)^2 + x_2^2} + R(x_1, x_2, a, b).$$

Przez $R(x_1, x_2, a, b)$ oznaczono tu sumę retransformat (2.15) przy uwzględnieniu własności splotu z δ — funkcjonalem.

3. Zadanie II

Zachowując poprzednie oznaczenia, zadanie sprowadza się formalnie do problemu brzegowego

$$(3.1) \quad \nabla^2 \nabla^2 w = \delta(x_2),$$

$$w \Big|_{r_0} = \frac{\partial w}{\partial x_1} \Big|_{r_0} = 0,$$

$$(3.3) \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \Big|_{r_1} = 0,$$

$$\frac{\partial^3 w}{\partial x_1^3} + (z-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x_1 \partial x_2^2} \Big|_{r_1} = 0.$$

W celu znalezienia rozwiązania zastosowano postępowanie analogiczne do opisanego w punkcie 2, a więc zakładając $w \in \mathcal{L}^*$ i wykonując na równaniu (3.1) oraz na warunkach brzegowych (3.2) uogólnioną transformację Fouriera, problem równoważny w przestrzeni \mathcal{F}_0 — obrazu będzie miał postać

$$(3.3) \quad [d^2 - \alpha^2]^2 \tilde{w} = 1,$$

$$\tilde{w} \Big|_{r_0} = \tilde{w}^{(1)} \Big|_{r_0} = 0,$$

$$(3.4) \quad \tilde{w}^{(2)} - \alpha^2 \nu \tilde{w} \Big|_{r_1} = 0,$$

$$\tilde{w}^{(3)} - (2-\nu) \alpha^2 \tilde{w}^{(1)} \Big|_{r_1} = 0.$$

Wykorzystując pierwsze z przytoczonych w punkcie 2 twierdzeń, przyjęto całkę równania (3.3) w postaci

$$(3.5) \quad \tilde{w} = A \operatorname{ch} \alpha x_1 + B \alpha x_1 \operatorname{ch} \alpha x_1 + C \operatorname{sh} \alpha x_1 + D \alpha x_1 \operatorname{sh} \alpha x_1.$$

Wyznaczając następnie stałe metodą wariacji otrzymuje się

$$(3.6) \quad \begin{aligned} A &= -\frac{1}{2\alpha^4} [\alpha x_1 \operatorname{sh} \alpha x_1 - 2 \operatorname{ch} \alpha x_1] + C_1, \\ B &= \frac{1}{2\alpha^4} \operatorname{sh} \alpha x_1 + C_2, \\ C &= \frac{-1}{2\alpha^4} [2 \operatorname{sh} \alpha x_1 - \alpha x_1 \operatorname{ch} \alpha x_1] + C_3, \\ D &= \frac{-1}{2\alpha^4} \operatorname{ch} \alpha x_1 + C_4. \end{aligned}$$

Podstawiając znalezione funkcje do (3.5) stwierdzimy, że całka szczególna ma postać

$$(3.7) \quad \tilde{w}_1(x_1, \alpha) = \frac{1}{\alpha^4},$$

skąd całka równania (3.3) wyraża się wzorem

$$(3.8) \quad \tilde{w} = \frac{1}{\alpha^4} + C_1 \operatorname{ch} \alpha x_1 + C_2 \alpha x_1 \operatorname{ch} \alpha x_1 + C_3 \operatorname{sh} \alpha x_1 + C_4 \alpha x_1 \operatorname{sh} \alpha x_1.$$

Stałe C_1, C_2, C_3, C_4 — wyznaczyć należy z warunków brzegowych (3.4). Otrzymuje się wtedy

$$(3.9) \quad \begin{aligned} C_1 &= \frac{1}{\alpha^4}, \\ C_2 &= \frac{(3-\nu^2) \operatorname{sh} \kappa \operatorname{ch} \kappa + \nu [(1+\nu) \operatorname{sh} \kappa - (1-\nu) \kappa \operatorname{ch} \kappa] - (1-\nu) \kappa [(2-\nu) \operatorname{ch}^2 \kappa - 1]}{\alpha^4 [(3-\nu) \operatorname{ch}^2 \kappa - (1-\nu)^2 \kappa^2 + (1+\nu)]}, \\ C_3 &= \frac{-1}{\alpha^4}, \\ C_4 &= \frac{1}{\alpha^4} \left\{ \frac{(1-\nu) \operatorname{sh} \kappa}{(1+\nu) \operatorname{sh} \kappa - (1-\nu) \kappa \operatorname{ch} \kappa} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{(3-\nu^2) \operatorname{sh} \kappa \operatorname{ch} \kappa + \nu [(1+\nu) \operatorname{sh} \kappa - (1-\nu) \kappa \operatorname{ch} \kappa] - (1-\nu) [(2-\nu) \operatorname{ch}^2 \kappa - 1]}{(3-\nu) \operatorname{ch}^2 \kappa - (1-\nu) \kappa^2 + (1+\nu)} \times \right. \\ &\quad \left. \times \frac{2 \operatorname{ch} \kappa - (1-\nu) \kappa \operatorname{sh} \kappa}{(1+\nu) \operatorname{sh} \kappa - (1-\nu) \kappa \operatorname{ch} \kappa} \right\}, \end{aligned}$$

gdzie oznaczono $\kappa = \alpha b$.

Ostatecznie więc transformata rozwiązania ma postać

$$(3.10) \quad \bar{w}(x_1, \alpha) = \frac{1}{\alpha^4} + \frac{1}{\alpha^4} [\operatorname{ch} \alpha x_1 - \operatorname{sh} \alpha x_1] +$$

$$+ \frac{1}{\alpha^4} \left\{ \frac{(3-\nu^2) \operatorname{sh} \kappa \operatorname{ch} \kappa + \nu[(1+\nu) \operatorname{sh} \kappa - (1-\nu) \kappa \operatorname{ch} \kappa] - (1-\nu) \kappa [(2-\nu) \operatorname{ch}^2 \kappa - 1]}{(3-\nu) \operatorname{ch}^2 \kappa - (1-\nu)^2 \kappa^2 + (1+\nu)} \alpha x_1 \operatorname{ch} \alpha x_1 + \right.$$

$$\left. + \left[\frac{(1-\nu) \operatorname{sh} \kappa}{(1+\nu) \operatorname{sh} \kappa - (1-\nu) \kappa \operatorname{ch} \kappa} - \right. \right.$$

$$\left. - \frac{(3-\nu^2) \operatorname{sh} \kappa \operatorname{ch} \kappa + \nu[(1+\nu) \operatorname{sh} \kappa - (1-\nu) \kappa \operatorname{ch} \kappa] - (1-\nu) [(2-\nu) \operatorname{ch}^2 \kappa - 1]}{(3-\nu) \operatorname{ch}^2 \kappa - (1-\nu)^2 \kappa^2 + (1+\nu)} \right\} \times$$

$$\times \frac{2 \operatorname{ch} \kappa - (1-\nu) \kappa \operatorname{sh} \kappa}{(1+\nu) \operatorname{sh} \kappa - (1-\nu) \kappa \operatorname{ch} \kappa} \left. \alpha x_1 \operatorname{sh} \alpha x_1 \right\}.$$

Transformatę tej funkcji znajdziemy w sposób podobny jak w zadaniu I; zauważmy przy tym, że drugi składnik sumy można zapisać w postaci

$$\frac{1}{\alpha^4} [\operatorname{ch} \alpha x_1 - \operatorname{sh} \alpha x_1] = \frac{1}{\alpha^4} e^{-\alpha x_1}, \quad \alpha \in (+\infty, -\infty).$$

Mamy więc

$$\mathcal{F}_0^{-1} \left[\frac{1}{\alpha^4} \right] = \frac{1}{12} z^3 \operatorname{sgn} z,$$

$$\mathcal{F}_0^{-1} \left[\frac{1}{\alpha^4} e^{-\alpha x_1} \right] = \frac{1}{12} z^3 \operatorname{sgn} z * \delta(z - ix_1).$$

Podobnie jak poprzednio, traktując retransformaty jak funkcjonały analityczne, otrzymamy

$$(3.11) \quad \mathcal{F}_0^{-1} \left[\frac{1}{\alpha^4} \right] = \frac{1}{12} x_2^3 \operatorname{sgn} x_2,$$

$$\mathcal{F}_0^{-1} \left[\frac{1}{\alpha^4} e^{-\alpha x_1} \right] = \frac{1}{12} (x_1^2 + x_2^2)^{3/2}.$$

Oznaczając dla uproszczenia

$$(3.12) \quad \Phi_1 = \frac{1}{\alpha^3} \frac{(3-\nu^2) \operatorname{sh} \kappa \operatorname{ch} \kappa + \nu[(1+\nu) \operatorname{sh} \kappa - (1-\nu) \kappa \operatorname{ch} \kappa] - (1-\nu) \kappa [(2-\nu) \operatorname{ch}^2 \kappa - 1]}{(3-\nu) \operatorname{ch}^2 \kappa - (1-\nu)^2 \kappa^2 + (1+\nu)},$$

$$\Phi_2 = \frac{1}{\alpha^3} \left\{ \frac{(1-\nu) \operatorname{sh} \kappa}{(1+\nu) \operatorname{sh} \kappa - (1-\nu) \kappa \operatorname{ch} \kappa} - \right.$$

$$\left. - \frac{(3-\nu^2) \operatorname{sh} \kappa \operatorname{ch} \kappa + \nu[(1+\nu) \operatorname{sh} \kappa - (1-\nu) \kappa \operatorname{ch} \kappa] - (1-\nu) [(2-\nu) \operatorname{ch}^2 \kappa - 1]}{(3-\nu) \operatorname{ch}^2 \kappa - (1-\nu)^2 \kappa^2 + (1+\nu)} \right\} \times$$

$$\times \frac{2 \operatorname{ch} \kappa - (1-\nu) \kappa \operatorname{sh} \kappa}{(1+\nu) \operatorname{sh} \kappa - (1-\nu) \kappa \operatorname{ch} \kappa},$$

a następnie (w celu zastosowania metody Kryłowa)

$$\Phi_1 = \frac{\Phi_1(1+\alpha)^2}{(1+\alpha)^2} = \frac{\Phi_1^*}{(1+\alpha)^2},$$

$$\Phi_2 = \frac{\Phi_2(1+\alpha)^2}{(1+\alpha)^2} = \frac{\Phi_2^*}{(1+\alpha)^2},$$

dostaniemy (przy zachowaniu oznaczeń p. 2.)

$$\mathcal{F}_0^{-1}[\Phi_1 \alpha x_1] \cong \frac{x_1}{4\pi} \sum_{l=0}^{n-1} B_l^1 \mathcal{J}_{-l-2}^c(z),$$

$$\mathcal{F}_0^{-1}[\Phi_2 \alpha x_1] \cong \frac{x_1}{4\pi} \sum_{l=0}^{n-1} B_l^2 \mathcal{J}_{-l-2}^s(z),$$

czyli:

$$\mathcal{F}_0^{-1}[\Phi_1 \alpha x_1 \operatorname{ch} \alpha x_1] \cong \frac{x_1}{4\pi} \sum_{l=0}^{n-1} B_l^1 \mathcal{J}_{-l-2}^c(z) * [\delta(z+ix_1) + \delta(z-ix_1)], \quad (3.13)$$

$$\mathcal{F}_0^{-1}[\Phi_2 \alpha x_1 \operatorname{sh} \alpha x_1] \cong \frac{x_1}{4\pi} \sum_{l=0}^{n-1} B_l^2 \mathcal{J}_{-l-2}^s(z) * [\delta(z+ix_1) - \delta(z-ix_1)].$$

Ostatecznie więc retransformata funkcji będąca rozwiązaniem problemu (3.1), (3.2) ma postać

$$(3.14) \quad w(x_1, x_2) = \frac{1}{12} x_2^3 \operatorname{sgn} x_2 + \frac{1}{12} (x_1^2 + x_2^2)^{3/2} + R(x_1, x_2, b),$$

gdzie przez $R(x_1, x_2, b)$ oznaczono sumę retransformat (3.13) (po uwzględnieniu własności splotu).

4. Zadanie III

Zachowując poprzednie oznaczenia, przy przyjęciu sztywności płytowej $K = 1$ zadanie sprowadza się do rozwiązania problemu brzegowego

$$(4.1) \quad \nabla^2 \nabla^2 w = 0,$$

$$w \Big|_{r_0} = \frac{\partial w}{\partial x_1} \Big|_{r_0} = 0,$$

$$(4.2) \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \Big|_{r_1} = 0,$$

$$\frac{\partial^3 w}{\partial x_1^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x_1 \partial x_2^2} \Big|_{r_1} = -\delta(x_2).$$

Rozwiązanie zadania może być skonstruowane również metodami klasycznymi (patrz np. [4]). Tym niemniej utrzymano w mocy wszystkie założenia czynione przy rozwiązywaniu poprzednich zadań. Postępowanie to ma na celu wykazanie zupełnego podobieństwa formalnego samego toku postępowania oraz stwierdzenie, że otrzymany wynik jest identyczny z wynikiem znanym z literatury, a otrzymanym przy innych założeniach.

Zakładając, podobnie jak poprzednio, $w \in \mathcal{L}^*$ i wykonując na równaniu (4.1) oraz na warunkach brzegowych (4.2) uogólnioną transformację, otrzymuje się równoważne zadanie w przestrzeni \mathcal{F}_0 — obrazu,

$$(4.3) \quad [d^2 - \alpha^2]^2 \tilde{w} = 0,$$

$$(4.4) \quad \begin{aligned} \tilde{w}|_{r_0} = \tilde{w}^{(1)}|_{r_0} = 0, \\ \tilde{w}^{(2)} - \alpha^2 \nu \tilde{w}|_{r_1} = 0, \\ \tilde{w}^{(3)} - (2 - \nu)\alpha^2 \tilde{w}^{(1)}|_{r_1} = -1. \end{aligned}$$

Wykorzystując znowu pierwsze z twierdzeń cytowanych w punkcie 2 i przyjmując całkę równania (4.3) w postaci

$$(4.5) \quad \tilde{w}(x_1, \alpha) = A \operatorname{ch} \alpha x_1 + B \alpha x_1 \operatorname{ch} \alpha x_1 + C \operatorname{sh} \alpha x_1 + D \alpha x_1 \operatorname{sh} \alpha x_1,$$

następnie wyznaczając stałe w zwykły sposób z warunków (4.4) otrzymuje się

$$(4.6) \quad \begin{aligned} A(\alpha) &= 0, \\ B(\alpha) &= \frac{-1}{\alpha^3} \frac{2 \operatorname{ch} \lambda + (1 - \nu) \lambda \operatorname{sh} \lambda}{(1 + \nu)^2 \operatorname{sh}^2 \lambda - (1 - \nu)^2 \lambda^2 - 4 \operatorname{ch}^2 \lambda}, \\ C(\alpha) &= -B(\alpha), \\ D(\alpha) &= \frac{1}{\alpha^3} \frac{(1 + \nu) \operatorname{sh} \lambda - (1 - \nu) \lambda \operatorname{ch} \lambda}{(1 + \nu)^2 \operatorname{sh}^2 \lambda - (1 - \nu)^2 \lambda^2 - 4 \operatorname{ch}^2 \lambda}, \\ \lambda &= \alpha b. \end{aligned}$$

Transformata rozwiązania wyraża się więc wzorem

$$(4.7) \quad \tilde{w}(x_1, \alpha) = \frac{1}{\alpha^3} \left\{ \frac{2 \operatorname{ch} \lambda + (1 - \nu) \lambda \operatorname{sh} \lambda}{(1 + \nu)^2 \operatorname{sh}^2 \lambda - (1 - \nu)^2 \lambda^2 - 4 \operatorname{ch}^2 \lambda} [\operatorname{sh} \alpha x_1 - \alpha x_1 \operatorname{ch} \alpha x_1] + \frac{(1 + \nu) \operatorname{sh} \lambda - (1 - \nu) \lambda \operatorname{ch} \lambda}{(1 + \nu) \operatorname{sh}^2 \lambda - (1 - \nu)^2 \lambda^2 - 4 \operatorname{ch}^2 \lambda} \alpha x_1 \operatorname{sh} \alpha x_1 \right\}.$$

I w tym przypadku retransformatę znaleźć można metodą Kryłowa, z tym jednak, że może być ona tutaj stosowana w postaci oryginalnej, ponieważ funkcja jako całość (a nie jeden tylko z czynników iloczynów) spełnia warunki dopuszczające stosowanie metody; oznacza to, że rozwiązanie (4.7) jest dystrybucją temperowaną. Jeżeli jednak mimo to pozostaniemy przy dotychczasowym trybie postępowania, otrzymamy

$$\begin{aligned} w(x_1, x_2) = \mathcal{F}_0^{-1}[\tilde{w}] &= \mathcal{F}_0^{-1} \left[\frac{1}{\alpha^3} \Phi_1 \right] * \mathcal{F}_0^{-1}[\operatorname{sh} \alpha x_1] - \\ &- \mathcal{F}_0^{-1} \left[\frac{x_1}{\alpha^2} \Phi_1 \right] * \mathcal{F}_0^{-1}[\operatorname{ch} \alpha x_1] + \mathcal{F}_0^{-1} \left[\frac{x_1}{\alpha^2} \Phi_2 \right] * \mathcal{F}_0^{-1}[\operatorname{sh} \alpha x_1] \end{aligned}$$

i dalej

$$(4.8) \quad w(x_1, x_2) = \mathcal{F}_0^{-1} \left[\frac{1}{\alpha^3} \Phi_1 \right] * \frac{1}{4\pi} [\delta(z - ix_1) - \delta(z + ix_1)] - \\ - \mathcal{F}_0^{-1} \left[\frac{x_1}{\alpha^2} \Phi_1 \right] * \frac{1}{4\pi} [\delta(z - ix_1) + \delta(z + ix_1)] + \\ + \mathcal{F}_0^{-1} \left[\frac{x_1}{\alpha^2} \Phi_2 \right] * \frac{1}{4\pi} [\delta(z - ix_1) - \delta(z + ix_1)],$$

gdzie

$$\Phi_1 = \frac{2\text{ch } \lambda + (1-\nu)\lambda \text{sh } \lambda}{(1+\nu)^2 \text{sh}^2 \lambda - (1-\nu)^2 \lambda^2 - 4\text{ch}^2 \lambda}, \\ \Phi_2 = \frac{(1+\nu)\text{sh } \lambda - (1-\nu)\lambda \text{ch } \lambda}{(1+\nu)^2 \text{sh}^2 \lambda - (1-\nu)^2 \lambda^2 - 4\text{ch}^2 \lambda}.$$

Kładąc

$$(4.9) \quad \Phi_1 = \frac{\Phi_1(1+\alpha)^2}{(1+\alpha_1)^2} = \frac{\Phi_1^*}{(1+\alpha)^2}, \\ \Phi_2 = \frac{\Phi_2(1+\alpha)^2}{(1+\alpha)^2} = \frac{\Phi_2^*}{(1+\alpha)^2},$$

będzie ostatecznie

$$(4.10) \quad w(x_1, x_2) = \frac{1}{4\pi} \left\{ \sum_{l=0}^{n-1} B_l^1 \mathcal{F}_{-l-2}^s(z) * [\delta(z - ix_1) - \delta(z + ix_1)] - \right. \\ - x_1 \sum_{l=0}^{n-1} B_l^2 \mathcal{F}_{-l-2}^c(z) * [\delta(z - ix_1) + \delta(z + ix_1)] + \\ \left. + x_1 \sum_{l=0}^{n-1} B_l^3 \mathcal{F}_{-l-2}^s(z) * [\delta(z - ix_1) - \delta(z + ix_1)] \right\}.$$

Tutaj oznaczono

$$B_l^1 = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Phi_1^*(\alpha_k)}{\alpha_k^3} \cdot A_{k,l}, \\ B_l^2 = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Phi_1^*(\alpha_k)}{\alpha_k^2} \cdot A_{k,l}, \\ B_l^3 = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Phi_2^*(\alpha_k)}{\alpha_k^2} \cdot A_{k,l}.$$

5. Zakończenie

Podsumowując wyniki przeprowadzonych rozważań pragniemy uczynić kilka uwag. Podkreślimy wyraźnie przede wszystkim te miejsca, w których stosowanie ultradystrybucji okazało się istotne.

I tak w zadaniu I, przy obliczeniu retransformaty $\mathcal{F}_0^{-1}[\tilde{w}_0]$, należało obliczyć transformacje odwrotne funkcji hiperbolicznych. Retransformaty te nie istnieją w zwykłym sensie, ale jak pokazano z łatwością udało się je wyznaczyć jako kombinację δ — funkcjonałów. Do tego celu konieczne jednak było uciec się do przestrzeni funkcji próbnych \mathcal{L} , a dla zwiększenia zakresu możliwości transformacji Fouriera — do przestrzeni ultradystrybucji \mathcal{L}^* . Właśnie ta okoliczność okazała się tutaj bardzo użyteczna, a naszym zdaniem dla potrzeb obliczeń praktycznych — wręcz cenna. Otóż dzięki temu, że retransformaty funkcji zawierających zmienną x_1 dały się tak łatwo wyznaczyć i to w postaci zamkniętej, wystarczyło zastosować efektywną metodę przybliżonego całkowania tylko do czynników nie zawierających zmiennej x_1 jako parametru.

Ułatwia to znacznie obliczenia numeryczne, które w przeciwnym przypadku musiałyby być powtórzone dla każdej ustalonej wartości parametru.

Podobna sytuacja miała miejsce w zadaniu II oraz III. Analogiczne okoliczności dały się zaobserwować przy wyprowadzeniu wzorów (2.12) i (3.11).

Wykorzystanie teorii dystrybucji nie ogranicza się, rzecz jasna, do zadań o strukturze tak prostej jak te, które były analizowane w niniejszej pracy. Przy pomocy aparatu ultradystrybucji można dogodnie i zręcznie rozwiązać bardziej złożone zagadnienia. Niektóre rezultaty w tym zakresie będą przedmiotem oddzielnego opracowania autorów.

Literatura cytowana w tekście

1. Р. ЭДВАРДС, *Функциональный анализ, теория и приложения*, Изд. Мир, Москва 1969.
2. Я. М. ГЕЛЬФАНД, Г. Е. ШИЛОВ, *Обобщенные функции*, вып. 1, *Обобщенные функции и действия над ними*, Гос.-Издат., Физ.-Мат. Лит., Москва 1961.
3. Я. М. ГЕЛЬФАНД, Г. Е. ШИЛОВ, *Обобщенные функции*, вып. 2, *Пространства основных и обобщенных функций* Гос.-Изд., Физ.-Мат. Лит., Москва 1961.
4. K. GIERKMAN, *Dźwigary powierzchniowe* (tłum. z wyd. IV), Arkady, Warszawa 1957.
5. S. G. KREJN i in., *Analiza funkcjonalna*, PWN, Warszawa 1967.
6. В. Я. КРЫЛОВ, Л. Г. КРУТЛИКОВА, *Справочная книга по численному гармоническому анализу*, Изд. Наука и Техн., Минск 1968.
7. A. ZEMANIAN, *Teoria dystrybucji i analiza transformat*, PWN, Warszawa 1969.

Резюме

ПРИМЕРЫ ОБОБЩЕННЫХ РЕШЕНИЙ ДЛЯ ПОЛОСЫ

В работе дано применение обобщенного преобразования Фурье к граничным задачам теории плит. Предложенный метод характеризуется прежде всего большей универсальностью и оказывается удобным и в тех случаях, когда решение можно получить при помощи классических методов. Авторы стремились показать удобства, какие несёт применение обобщенного преобразования Фурье. В частности, как это показано на примерах, при данном подходе более удобно применять всякие приближённые методы вычисления интегралов Фурье путем применения теоремы о свертках в пространстве обобщенных функций.

S u m m a r y

EXAMPLES OF ULTRADISTRIBUTION SOLUTIONS FOR PLATE STRIPS

The paper presents the applications of Fourier transforms (generalized to the space of ultra-distributions) to the boundary value problems of the theory of plates. The approach presented is characterized, first of all, by a considerable generality and proves to be convenient even in the cases which may be solved by classical methods.

The paper is aimed at demonstrating the effectiveness of the method in such classical cases. In particular, the examples prove that all the approximate methods of evaluation of Fourier integrals may be used much more rationally by applying the convolution theorem in the space of ultradistributions.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 30 maja 1972 r.
