MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
3, 11 (1973)

ZWIĄZKI POMIĘDZY RÓŻNICZKOWYMI I CAŁKOWYMI ZASADAMI MECHANIKI

N. JA. CYGANOWA (WOŁGOGRAD)

Decydujące znaczenie dla kierunków rozwoju badań w omawianej dziedzinie miała praca O. HOELDERA[1]), w której całkowa wariacyjna zasada mechaniki wyprowadzona została dla ogólnego przypadku wariacji ruchu. W szczególnych przypadkach z zasady tej wynikają zasady Hamiltona lub Lagrange'a w zwykłej, względnie uogólnionej postaci.

Ogólną zasadę całkową wyprowadza Hoelder wychodząc z zasady d'Alemberta–Lagrange'a. Dalsze uogólnienie zasady Hoeldera podane jest w pracy A. VOSSA[2]).

Uogólniona zasada całkowa Hoeldera–Vossa oraz prace o charakterze krytycznym, jakie zaczęły pojawiać się po ukazaniu się publikacji O. HOELDERA i A. VOSSA, dotyczące w szczególności kwestii analizy definicji przemieszczeń wirtualnych, podanej przez O. HOELDERA i A. VOSSA,[3]), są wyczerpująco zreferowane w książce L. C. POLAKA[4]) na temat wariacyjnych zasad mechaniki i w pracy doktorskiej B. N. FRADLINA[5]).

W niniejszej pracy zastanowimy się jeeynie nad różnymi postaciami formułowania zasady Hoeldera–Vossa oraz nad jej związkami z różniczkowymi zasadami w mechanice. W podstawowych pracach HOELDERA i VOSSA określony został związek pomiędzy ogólną zasadą całkową a zasadą d'Alemberta–Lagrange'a; badania w następnych latach, w szczególności prace H. BRELLA (1913), C. SCHAEFFERA (1919), L. NORDHEIMA (1919), podkreśliły ten związek jeszcze wyraźniej.

W pracach H. BRELLA (1913) i R. LEITINGERA (1913) wykazano związek między zasadą Hoeldera–Vossa, a zasadami Gaussa i Jourdaina.

---

[1]) O. Hoelder, *Über die Prinzipien von Hamilton und Maupertuis*, Nachricht. d. Gesellsch. d. Wiss. Göttingen, II zeszyt, 1896, s. 122–157.

[2]) A. Voss, *Über die Prinzipe von Hamilton und Maupertuis*, Nachricht. d. Gesellsch. d. Wiss. Göttingen, 1900, s. 322–327.

[3]) P. Jourdain, *The derivation of equations in generalized coordinates from the pronciple of least action and allied principles*, Math. Ann., t. 62, 1906, s. 413–418.

P. Jourdain, *On those principles of mechanics which depend upon processes of variation*, Math. Ann. t. 65, 1908, s. 513–527.

M. Rethy, *Über das Prinzip der Kleinsten Action und das Hamilton'sche Prinzip*, Math. Annalen, t. 48, 1897, s. 514–547.

[4]) Л. С. Полак, *Вариационные принципы механики, их развитие и применение в физике*. М., 1960

[5]) Б. Н. Фрадлин, *Неголономная механика и её приложения в естествознании и технике*, Диссертация, Киев 1965.

1. Ogólne przekształcenie zasady d'Alemberta–Lagrange'a do postaci całkowej. Różne postacie uogólnionej zasady najmniejszego działania

Ogólne przekształcenie zasady d'Alemberta–Lagrange'a do postaci całkowej dokonywane jest za pomocą asynchronicznej wariacji ruchu i całkowania po czasie. W pracy O. HOELDERA (1896) wariacja ruchu składa się z dwu niezależnych etapów.

Każdemu punktowi początkowej trajektorii ruchu nadaje się najpierw dowolnie małe przemieszczenie Δx_i (zwane wariacją położenia), otrzymując w ten sposób nową trajektorię wariacyjną, której punkty odpowiadają punktom trajektorii wyjściowej. Następnie każdemu punktowi trajektorii wariacyjnej nadaje się prędkość, która może być dowolna, ale możliwie mało różniącą się od prędkości w odpowiednim punkcie trajektorii początkowej. Prędkość można określić dwiema metodami — izochroniczną lub izoenergetyczną.

HOELDER określa wariację energii kinetycznej ΔT, zakładając wariację czasu, skąd wynika zależność

$$\Delta\left(\frac{dx_i}{dt}\right) = \frac{d}{dt}(\Delta x_i) - \dot{x}_i \frac{d\Delta t}{dt}.$$

Zakładając poza tym, że położenie układu w chwili początkowej i końcowej nie ulega zmianie, w wyniku całkowania względem czasu wariacji ΔT HOELDER otrzymuje następujące równanie:

$$\int_{t_0}^{t_1} \Delta T dt = -\int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{3n} m_i(\ddot{x}_i \Delta x_i) dt - 2\int_{t_0}^{t_1} T d\Delta t. \tag{1.1}$$

Wprowadzenie wyrażenia

$$\Delta' A = \sum_{i=1}^{3n} X_i \Delta x_i,$$

całkowanie tego wyrażenia i dodanie do równania (1.1) pozwala mu uzyskać równanie

$$\int_{t_0}^{t_1} \{2Td\Delta t + (\Delta T + \Delta' A) dt\} = \int_{t_0}^{t_1} dt \sum_{i=1}^{3n} (X_i - m_i \ddot{x}_i)\Delta x_i \tag{1.2}$$

stanowiące podstawę wyprowadzenia całkowych zasad mechaniki.

Prawa strona równania (1.2), która uzyskała w literaturze naukowej nazwę tożsamości Hoeldera, względnie transformacji Hoeldera, jest określone, przy danych siłach i danym rzeczywistym ruchu układu, wyłącznie przez wariacje położeń Δx_i. Wykonując wariację ruchu układu w ten sposób, by wariacje współrzędnych były przemieszczeniami wirtualnymi i korzystając z zasady d'Alemberta–Lagrange'a otrzymuje HOELDER z równania (1.2) następującą postać całkowej zasady mechniki:

$$\int_{t_0}^{t_1} \{2Td\Delta t + (\Delta T + \Delta' A) dt\} = 0. \tag{1.3}$$

Transformacja Hoeldera (1.2) i wynikająca z niej ogólna zasada całkowa (1.3) jest jednym z najwybitniejszych wyników uzyskanych w dziedzinie zasad dynamiki w pierwszej ćwierci XX wieku. W związku z tym należy szczególnie podkreślić znaczenie prac C. SCHAEFFERA i L. NORDHEIMA.

1.1. Najbardziej klarowne i ścisłe wyprowadzenie tożsamości Hoeldera podał C. SCHAEFFER[6]. Za punkt wyjścia przyjmuje SCHAEFFER wyrażenie

$$\sum_{i=1}^{3n} [(X_i - m_i \ddot{x}_i) \Delta x_i], \tag{1.4}$$

które uzyskuje się z lewej części równania, opisującej zasadę d'Alemberta–Lagrange'a, przez zastąpienie przemieszczeń wirtualnych pełnymi wariacjami współrzędnych. Pełna wariacja współrzędnych rozumiana jest początkowo jako zupełnie ogólna wariacja, zawierająca wariacje po czasie.

Figurująca w wyrażeniu (1.4) suma

$$-\sum_{i=1}^{3n} m_i \ddot{x}_i \Delta x_i$$

jest następnie przekształcana do postaci, wynikającej z obliczenia pełnej wariacji energii kinetycznej

$$-\sum_{i=1}^{3n} m_i \ddot{x}_i \Delta x_i = \Delta T + 2T \frac{d\Delta t}{dt} - \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{3n} m_i \dot{x}_i \Delta x_i. \tag{1.5}$$

Całkowanie równania (1.5) względem czasu z uwzględnieniem tego, że na końcach przedziału całkowania pełne wariacje współrzędnych Δx_i są równe zeru, prowadzi do zależności

$$-\int_{t_0}^{t_1} dt \sum_{i=1}^{3n} m_i \ddot{x}_i \Delta x_i = \int_{t_0}^{t_1} \left(\Delta T + 2T \frac{d\Delta t}{dt} \right) dt. \tag{1.6}$$

Kładąc następnie

$$\sum_{i=1}^{3n} X_i \Delta x_i = \Delta' A,$$

całkując ostatnią z równości względem czasu i dodając ją do równania (1.6) uzyskuje Schaeffer tożsamość Hoeldera (1.2). Ogólna postać figurujących w niej wariacji pozwala wyprowadzać, przy odpowiednich założeniach ograniczających, różne zasady dynamiczne.

«Znaczenie transformacji Hoeldera — pisze Schaeffer — polega na tym, że wariacje, figurujące w (116) (w niniejszej pracy (1.2) — N.C.), są, dzięki wprowadzeniu Δt, znacznie bardziej ogólne, niż rozważane poprzednio (wirtualne — N.C.). Dzięki temu możemy zadać dodatkowo jakieś relacje pomiędzy Δx i Δt, to znaczy ograniczyć w odpowiedni sposób ogólne wariacje w zależności (116). Dla każdego przypadku ograniczeń otrzymujemy nową zasadę dynamiki[7]. Najbardziej radykalnym ograniczeniem byłoby założenie $\Delta t = 0$, skąd wynikałaby Hamiltonowska zasada działania stacjonarnego[8].»

---

[6] C. Schaeffer, *Die Prinzipe der Dynamik*, Berlin, Lipsk 1919.

[7] Podkreślenie nasze — N.C.

[8] op. cit., str. 43.

Następnie Schaeffer obiera zależność między pełną wariacją współrzędnych Δx_i i wariacją czasu Δt w postaci równania

$$\Delta x_i = \delta x_i + \dot{x}_i \Delta t, \tag{1.7}$$

gdzie symbol δx_i oznacza wariację współrzędnych w ustalonej chwili czasu, nie mającą na ogół znaczenia przemieszczenia wirtualnego (wariacje δx_i mogą być wielkościami zupełnie niezależnymi). Zależność (1.7) pozwala Schaefferowi sprowadzić tożsamość Hoeldera (1.2) do postaci

$$\int_{t_0}^{t_1} dt \sum_{i=1}^{3n} (X_i - m_i \ddot{x}_i)\delta x_i + \int_{t_0}^{t_1} dt \sum_{i=1}^{3n} X_i \dot{x}_i \Delta t - \int_{t_0}^{t_1} dt \sum_{i=1}^{3n} m_i(\ddot{x}_i \dot{x}_i)\Delta t = \int_{t_0}^{t_1} dt \left[\Delta T + \Delta' A + 2T\frac{d\Delta t}{dt}\right], \tag{1.8}$$

którą nazwiemy tożsamością Hoeldera w formie Schaeffera. Jeżeli δx_i oznacza przemieszczenia wirtualne, to z tożsamości (1.8) wynika ogólna zasada całkowa w formie Schaeffera

$$\int_{t_0}^{t_1} dt \left[\Delta T + \Delta' A + 2T\frac{d\Delta t}{dt} - \frac{d'A}{dt}\Delta t + \frac{dT}{dt}\Delta t\right] = 0, \tag{1.9}$$

gdzie

$$\frac{d'A}{dt} = \sum_{i=1}^{3n} X_i \dot{x}_i .$$

Różnica między formami Hoeldera i Schaeffera dla tożsamości podstawowej i wynikającej z niej ogólnej zasady całkowej związana jest z różnicą między rozważanymi procesami wariacyjnymi. O ile Hoelder traktuje na ogół wariacje położenia jako niezależne od wariacji czasu, Schaeffer określa między nimi związek (1.7).

1.2. Jak wykazał A. Voss, ogólna zasada całkowa w formie Hoeldera (1.3) jest słuszna jedynie dla układów o więzach stacjonarnych. Analizując problem w uogólnionych współrzędnych Lagrange'a dla stacjonarnych więzów holonomicznych i liniowych anholonomicznych rzędu pierwszego, Voss wyprowadza zasadę w formie Hoeldera, dla więzów zaś niestacjonarnych — w formie uogólnionej. Wariacja zależności wraz z całkowaniem po czasie prowadzi w przypadku więzów niestacjonarnych do równania

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(\Delta T + 2T\frac{d\Delta t}{dt} + \frac{dT}{dt}\Delta t + \delta A\right) dt = \int_{t_0}^{t_1} dt \sum_{k=1}^{s} \left(\frac{\partial T}{\partial q_k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} + Q_k\right) \delta q_k + \left[2T\Delta t + \sum_{k=1}^{s} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\delta q_k\right]_{t_0}^{t_1}, \tag{1.10}$$

zwanej tożsamością Vossa.

Jeżeli wariacje δq_k, Δt spełniają warunek

$$\left[2T\Delta t+\sum_{k=1}^{s}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\delta q_k\right]_{t_0}^{t_1}=0, \tag{1.11}$$

to z równania (1.10) wynika

$$\int_{t_0}^{t_1}\left(\Delta T+2T\frac{d\Delta t}{dt}+\frac{dT}{dt}+\delta A\right)dt=\int_{t_0}^{t_1}dt\sum_{k=1}^{s}\left(\frac{\partial T}{\partial q_k}-\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}+Q_k\right)\delta q_k. \tag{1.12}$$

Równania Lagrange'a drugiego rzędu dla układów holonomicznych oraz równania Ferrersa

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}-\frac{\partial T}{\partial q_k}-Q_k=\sum_{l=1}^{r}\lambda_l p_{lk} \tag{1.13}$$

dla układów o więzach holonomicznych i liniowych anholonomicznych pierwszego rzędu

$$\sum_{k=1}^{s}p_{lk}dq_k+p_l dt=0 \quad (l=1,2,\ldots,r) \tag{1.14}$$

pozwalają wyprowadzić z równania (1.12) następującą ogólną postać zasady całkowej w formie Vossa:

$$\int_{t_0}^{t_1}\left(\Delta T+2T\frac{d\Delta t}{dt}+\frac{dT}{dt}\Delta t+\delta A\right)dt=0. \tag{1.15}$$

Wobec tego, że dla więzów holonomicznych i liniowych anholonomicznych pierwszego rzędu mamy zależność

$$\int_{t_0}^{t_1}\left[\sum_{k=1}^{s}\left(\frac{\partial T}{\partial q_k}-\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}+Q_k\right)\delta q_k\right]dt=\int_{t_0}^{t_1}\left[\sum_{i=1}^{3n}(X_i-m_i\ddot{x}_i)\delta x_i\right]dt \tag{1.16}$$

[9]

tożsamość (1.10) możemy przepisać w postaci następującej:

$$\int_{t_0}^{t_1}\left(\Delta T+2T\frac{d\Delta t}{dt}+\frac{dT}{dt}\Delta t+\delta A\right)dt=\int_{t_0}^{t_1}\left[\sum_{i=1}^{3n}(X_i-m_i\ddot{x}_i)\delta x_i\right]dt+$$
$$+\left[2T\Delta t+\sum_{k=1}^{s}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\delta q_k\right]_{t_0}^{t_1}. \tag{1.17}$$

[9] Istotnie, dla układów o więzach spełniających (1.14), w tożsamości

$$\sum_{i=1}^{3n}(m_i\ddot{x}_i-X_i)\delta x_i=\sum_{k=1}^{s}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_k}-\sum_{l=1}^{r}\lambda_l p_{lk}-Q_k\right]\delta q_k$$

suma $\sum_{k=1}^{s}p_{lk}\delta q_k=0$, co w konsekwencji prowadzi do tożsamości (1.16).

Stąd na mocy zasady d'Alemberta–Lagrange'a i warunku (1.11) dla wariacji otrzymujemy ogólną zasadę całkową w postaci (1.15). Tożsamość Vossa została wyprowadzona w postaci (1.17) w książce L. NORDHEIMA *Zasady dynamiki*[10]. NORDHEIM wychodzi ze wzoru na T we współrzędnych kartezjańskich i najpierw otrzymuje równanie

$$\Delta T+2T\frac{d\Delta t}{dt}-\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{3n} m_i\dot{x}_i\Delta x_i = -\sum_{i=1}^{3n} m_i\ddot{x}_i\Delta x_i. \tag{1.18}$$

Przechodząc do współrzędnych uogólnionych, czyli quasi-współrzędnych, oraz uwzględniając zależności spełniane w ogólnym przypadku więzów niestacjonarnych przy przejściu do tych współrzędnych

$$\dot{x}_i = \sum_{k=1}^{s}\alpha_{ik}\dot{q}_k+\alpha_i, \qquad \Delta x_i = \sum_{k=1}^{s}\alpha_{ik}\Delta q_k+\alpha_i\Delta t,$$

$$2T = \sum m_i\alpha_{ik}\alpha_{il}\dot{q}_k\dot{q}_l+\sum 2m_i\alpha_{ik}\alpha_i\dot{q}_k+\sum m_i\alpha_i^2,$$

NORDHEIM wyprowadza następującą tożsamość

$$\sum_{i=1}^{3n} m_i\dot{x}_i\Delta x_i = 2T\Delta t+\sum_{k=1}^{s}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_k}\delta q_k. \tag{1.19}$$

Z równań (1.18), (1.19) i równania

$$\sum_{i=1}^{3n} m_i\ddot{x}_i\Delta x_i = \sum_{i=1}^{3n} m_i\ddot{x}_i\delta x_i+\frac{dT}{dt}\Delta t$$

wynika zależność

$$\Delta T+2T\frac{d\Delta t}{dt}+\frac{dT}{dt}\Delta t = -\sum_{i=1}^{3n} m_i\ddot{x}_i\delta x_i+\frac{d}{dt}\left(2T\Delta t+\sum_{k=1}^{s}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_k}\delta q_k\right). \tag{1.20}$$

Dodając równanie (1.20) do równania

$$\delta A = \sum_{i=1}^{3n} X_i\delta x_i$$

i całkując tę zależność, otrzymuje Nordheim tożsamoć Vossa (1.17). Równanie, wynikające z tożsamości (1.17), na mocy zasady d'Alemberta–Lagrange'a, w postaci

$$\int_{t_0}^{t_1}\left(\Delta T+2T\frac{d\Delta t}{dt}dt+\frac{dT}{dt}\Delta t+\delta A\right)dt = \left[2T\Delta t+\sum_{k=1}^{s}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_k}\delta q_k\right]_{t_0}^{t_1} \tag{1.21}$$

wyraża twierdzenie równoważne zasadzie d'Alemberta–Lagrange'a. Jest ono punktem wyjścia do wyprowadzenia wszystkich całkowych zasad wariacyjnych.

---

[10] L. Nordheim, *Die Prinzipe der Dynamik*. Berlin, Lipsk 1919, s. 83.

1.3. Rozpatrzmy obecnie dwie inne postacie uogólnionej zasady najmniejszego działania, wyprowadzone przez H. BRELLA[11]. Zostały one wyprowadzone przez niego przy pomocy prostego przekształcenia wyrażenia podcałkowego w lewej części tożsamości Vossa (1.10). Wyrażając funkcję podcałkową

$$\Delta T dt + 2T\frac{d\Delta t}{dt}dt + \frac{dT}{dt}\Delta t\, dt + \delta A\, dt \tag{1.22}$$

w postaci

$$\Delta T + \frac{d}{dt}(2T\Delta t)dt - \frac{dT}{dt}\Delta t\, dt + \delta A\, dt,$$

Brell wyprowadza z tożsamości Vossa następujący związek:

$$\int_{t_0}^{t_1}\left(\Delta T - \frac{dT}{dt}\Delta t + \delta A\right)dt = \int_{t_0}^{t_1} dt \sum_{k=1}^{s}\left(\frac{\partial T}{\partial q_k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} + Q_k\right)\delta q_k + \left[\sum_{k=1}^{s}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\delta q_k\right]_{t_0}^{t_1},$$

wynika stąd zasada całkowa w pierwszej formie Brella

$$\int_{t_0}^{t_1}\left(\Delta T - \frac{dT}{dt}\Delta t + \delta A\right)dt = 0 \tag{1.23}$$

z warunkami granicznymi

$$\left[\sum_{k=1}^{s}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\delta q_k\right]_{t_0}^{t_1} = 0. \tag{1.24}$$

Przedstawiając następnie wyrażenie (1.22) w postaci

$$\Delta T dt + T\frac{d\Delta t}{dt}dt + \frac{d}{dt}(T\Delta t)dt + \delta A\, dt,$$

Brell otrzymuje analogicznie drugą formę zasady całkowej

$$\int_{t_0}^{t_1}\left(\Delta T + T\frac{d\Delta t}{dt} + \delta A\right)dt = 0 \tag{1.25}$$

z warunkami granicznymi w postaci

$$\left[T\Delta t + \sum_{k=1}^{s}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\delta q_k\right]_{t_0}^{t_1} = 0. \tag{1.26}$$

---

[11] H. Brell, *Über eine neue Fassung des Prinzips der kleinsten Aktion*, Wien. Ber., 122 (2a), (1913), s. 1031–1036.

2. Równoważność uogólnionej zasady najmniejszego działania i zasady Gaussa

Dowód równoważności uogólnionej zasady najmniejszego działania Hoeldera–Vossa zasady Gaussa dla układów holonomicznych o więzach niestacjonarnych przeprowadził BRELL[12], korzystając z równania Gibbsa–Appela.

Do wyrażenia podcałkowego w całce Vossa

$$\int_{t_0}^{t_1} (\Delta T dt + dT \Delta t + 2T d\Delta t + \delta A\, dt)$$

wprowadza BRELL energię przyspieszeń S. Używa przy tym związku, wiążącego energię przyspieszeń z energią kinetyczną T, który w przypadku więzów niestacjonarnych ma postać

$$\frac{dT}{dt} = \sum_{k=1}^{s} \frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_k} \dot{q}_k + \sum_{i=1}^{3n} m_i \ddot{x}_i \frac{\partial f_i}{\partial t}, \tag{2.1}$$

gdzie

$$x_i = f_i(q_1, q_2, \ldots, q_s, t).$$

Wówczas dla wirtualnych wariacji pochodnej energii kinetycznej po czasie dT/dt otrzymuje BRELL następujący związek;

$$\Delta \frac{dT}{dt} - \frac{d^2T}{dt^2} \Delta t = -\frac{d}{dt} \sum_{k=1}^{s} \frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_k} \delta q_k + \frac{d^2}{dt^2} \sum_{k=1}^{s} \Phi_k \delta q_k, \tag{2.2}$$

gdzie

$$\delta q_k = \Delta q_k - \dot{q}_k \Delta t, \qquad \Phi_k = \sum_{i=1}^{3n} m_i \psi_i \frac{\partial f_i}{\partial q_k},$$

$$\psi_i = \sum_{k=1}^{s} \left(\dot{q}_k \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial^2 f_i}{\partial q_k \partial q_j} \dot{q}_j \right).$$

Dodając do obydwu stron równania (2.2) wyrażenia $2\frac{d^2}{dt^2}(T\Delta t)$ i całkując od t_0 do t_1 przy założeniu, że na brzegach wszystkie wariacje zerują się, otrzymujemy równanie

$$\Delta T + \frac{dT}{dt} \Delta t + 2T \frac{d\Delta t}{dt} = -\sum_{k=1}^{s} \frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_k} \delta q_k + \frac{d}{dt}\left(\sum_{k=1}^{s} \Phi_k \delta q_k + 2T\Delta t \right).$$

Z kolei, dodając do tego równania następujące

$$\delta A = \sum_{k=1}^{s} Q_k (\Delta q_k - \dot{q}_k \Delta t)$$

[12] H. Brell, *Nachweis der Äquivalenz des veralgem. Prinzipes der kleinsten Aktion mit dem Prinzipe d. kleinsten Zwanges.*–Wien. Sitz. Ber., tom 122 (2a), V zeszyt, Wien 1913.

i całkując, otrzymujemy

$$\int_{t_0}^{t_1} (\Delta T dt + dT\Delta t + 2T d\Delta t + \delta A\, dt) = -\int_{t_0}^{t_1} dt \sum_{k=1}^{s} \left(\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_k} - Q_k\right)(\Delta q_k - \dot{q}_k \Delta t).$$

Na mocy równań Appela wynika stąd związek

$$\int_{t_0}^{t_1} (\Delta t\, dt + dT\Delta t + 2T d\Delta t + \delta A\, dt) = 0,$$

który wyraża zasadę Hoeldera–Vossa. Wobec tego, że równania Appela wyprowadza się z zasady Gaussa powyższe rozumowanie dowodzi równoważności tej zasady z zasadą Hoeldera–Vossa.

3. Równoważność uogólnionej zasady najmniejszego działania i zasady Jourdaina

LEITINGER (1913) wykazał związek pomiędzy zasadą Jourdaina i uogólnioną zasadą najmniejszego działania Hoeldera–Vossa dla układów o więzach holonomicznych i liniowych anholonomicznych, w ogólnym przypadku niestacjonarnych.

LEITINGER wyprowadza zasadę Hoeldera–Vossa bezpośrednio z zasady Jourdaina przekształcając odpowiednio wyrażenie podcałkowe w całce Vossa. Jeżeli więzy holonomiczne, nałożone na układ, są niestacjonarne, to asynchroniczne wariacje współrzędnych uogólnionych Δq_k związane są z wariacjami wirtualnymi tych współrzędnych δq_k zależnościami

(3.1) $$\Delta q_k = \delta q_k + \dot{q}_k \Delta t,$$

zaś dla Δ — wariacji prędkości uogólnionych mamy związek

(3.2) $$\Delta \dot{q}_k = \frac{d}{dt}(\Delta q_k) - \dot{q}\frac{\Delta dt}{dt}.$$

Uwzględniając równania (3.1) i (3.2) oraz wyrażenie na pracę wirtualną działających sił

$$\delta A = \sum_{k=1}^{s} Q_k \delta q_k,$$

możemy przedstawić wyrażenie podcałkowe w całce Vossa w następującej postaci:

(3.3) $$\Delta T dt + 2T\Delta dt + dT\Delta t + \delta A\, dt = \sum_{k=1}^{s} \left[\frac{\partial T}{\partial q_k}\delta q_k - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right)\delta q_k + Q_k \delta q_k + \right.$$
$$\left. + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\Delta q_k\right) dt - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k \Delta t\right)\right] + \frac{d}{dt}(2T\Delta t)dt.$$

Różniczkując względem czasu równanie (3.3) i kładąc następnie w wyprowadzonej zależności $\delta q_k = 0$ zgodnie z zasadą Jourdaina, jak również uwzględniając sformułowanie zasady Jourdaina dla układów holonomicznych i liniowych anholonomicznych w postaci

$$\sum_{k=1}^{s} \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} - Q_k\right]\delta \dot{q}_k = 0$$

LEITINGER uzyskuje następujące równanie:

$$\frac{d}{dt}[\Delta T dt+2T\Delta\, dt+dT\Delta t+\delta A\, dt] = \sum_{k=1}^{s}\left[\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\Delta q_k\right)-\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k\Delta t\right)\right]+\frac{d^2}{dt^2}(2T\Delta t).$$

Równanie to można traktować jako jedno z analitycznych wyrażeń zasady Jourdaina. Całkując ostatnie z równań dwukrotnie względem t w określonym przedziale czasu, odpowiadającym ustalonemu początkowemu i końcowemu położeniu układu, LEITINGER otrzymuje równanie, wyrażające zasadę Hoeldera–Vossa w przypadku więzów niestacjonarnych

$$\int_{t_0}^{t_1}(\Delta T dt+dT\Delta t+2Td\Delta t+\delta A\, dt) = 0.$$

Powyższe wyprowadzenie upraszcza się znacznie w przypadku więzów stacjonarnych. Mamy wówczas

$$\Delta q_k = \delta q_k \tag{3.4}$$

oraz

$$\Delta\frac{dq_k}{dt} = \delta\dot{q}_k-\dot{q}_k\frac{\Delta\, dt}{dt}, \tag{3.5}$$

energia zaś kinetyczna układu T jest jednorodną funkcją kwadratową prędkości uogólnionych. Zgodnie z twierdzeniem Eulera o funkcjach jednorodnych możemy napisać

$$2T = \sum_{k=1}^{s}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k. \tag{3.6}$$

Uogólniona zasada najmniejszego działania dla układów o więzach stacjonarnych opisana jest równaniem

$$\int_{t_0}^{t_1}(\Delta T dt+2T\Delta\, dt+\delta A\, dt) = 0. \tag{3.7}$$

Pochodna względem czasu z wyrażenia podcałkowego po uwzględnieniu zależności (3.4), (3.5) i (3.6) przejmie postać:

$$\frac{d}{dt}\left[\Delta T+2T\frac{\Delta dt}{dt}+\delta A\right] = \sum_{k=1}^{s}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_k}\right)\delta q_k+\frac{\partial T}{\partial q_k}\delta\dot{q}_k+\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\delta q_k\right)-\right.$$
$$\left.-\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right)\delta q_k-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right)\delta\dot{q}_k+\frac{dQ_k}{dt}\delta q_k+Q_k\delta\dot{q}_k\right].$$

Zgodnie z zasadą Jourdaina otrzymujemy stąd równanie

$$\frac{d}{dt}\left(\Delta T+2T\frac{\Delta\, dt}{dt}+\delta A\right) = \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\delta q_k\right).$$

Dwukrotnie całkując to równanie otrzymujemy zależność (3.7), to znaczy wyrażenie analityczne zasady Hoeldera–Vossa dla układów o więzach stacjonarnych.

4. Związek zasady energetycznej G. Helma z zasadą d'Alemberta-Lagrange'a w badaniach A. Vossa

W pracy pod tytułem *Uwagi o zasadach mechaniki*[13] (1901) A. VOSS analizuje próby niektórych badaczy wyprowadzenia z zasady energetycznej zasady d'Alemberta–Lagrange'a lub jakiejkolwiek innej równoważnej do niej postaci równań ruchu. Szczegółowo analizuje VOSS zasadę energetyczną HELMA[14], która ma postać wariacyjną: zmiana energii w każdym z możliwych kierunków równa się zeru. Wyniki analizy VOSSA świadczą o tym, że proces wariacyjny w zasadzie Helma nie prowadzi do równoważności z zasadą d'Alemberta–Lagrange'a. Istotnie, określmy wariację energii całkowitej $T+V$, odpowiadającą izochronicznym wariacjom współrzędnych, to znaczy przejściu od punktu o współrzędnych $x_i(t)$, $y_i(t)$, $z_i(t)$ do punktu o współrzędnych $x_i(t)+\varepsilon\xi_i(t)$, $y_i(t)+\varepsilon\eta_i(t)$, $z_i(t)+\varepsilon\zeta_i(t)$, gdzie ε jest dowolną małą liczbą stałą, zaś ξ_i, η_i, ζ_i — dowolnymi różniczkowalnymi funkcjami czasu. Otrzymamy wyrażenie:

$$\delta(T+v) = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} m_i(\dot{x}_i\xi_i+\dot{y}_i\eta_i+\dot{z}_i\zeta) - \sum_{i=1}^{n} m_i(\ddot{x}_i\xi_i+\ddot{y}_i\eta_i+\ddot{z}_i\zeta_i) + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\xi_i+\frac{\partial V}{\partial y_i}\eta_i+\frac{\partial V}{\partial z_i}\zeta_i\right).$$

Wobec tego, że wyrażenie to oczywiście nie równa się wyrażeniu

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{\partial V}{\partial x_i}+m_i\ddot{x}_i\right)\xi_i+\left(\frac{\partial V}{\partial y_i}+m_i\ddot{y}_i\right)\eta_i+\left(\frac{\partial V}{\partial z_i}+m_i\ddot{z}_i\right)\zeta_i\right]$$

stwierdzamy, że dla danego sposobu wprowadzenia wariacji zasada, wyrażająca się równaniem $\delta(T+V) = 0$, nie jest równoważna zasadzie d'Alemberta–Lagrange'a.

Następnie VOSS wykazuje, że proces wariacyjny należy zmienić tak, by oprócz współrzędnych, wariacji podlegał również czas: dopiero wówczas obydwie zasady stają się równoważne. Wariacja pełnej energii, odpowiadającą przejściu od x_i, y_i, z_i, t do $x_i+ +\varepsilon\xi_i, y_i+\varepsilon\eta_i, z_i+\varepsilon\zeta_i, t+\varepsilon\tau$, gdzie $\xi_i, \eta_i, \zeta_i, \tau$ są dowolnymi różniczkowalnymi funkcjami czasu, równa się według VOSSA następującemu wyrażeniu:

$$\delta(T+V) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial V}{\partial x_i}+m_i\ddot{x}_i\right)\xi_i+\left(\frac{\partial V}{\partial y_i}+m_i\ddot{y}_i\right)\eta_i+\left(\frac{\partial V}{\partial z_i}+m_i\ddot{z}_i\right)\zeta_i+ + \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} m_i(\dot{x}_i\xi_i+\dot{y}_i\eta_i+\dot{z}_i\zeta_i) - 2\sum_{i=1}^{n} m_i(\xi_i\ddot{x}_i+\eta_i\ddot{y}_i+\zeta_i\ddot{z}_i) - 2\dot{\tau}T$$

Dobierając odpowiednio funkcję $\tau(t)$ (co jest zawsze możliwe, gdyż $T \neq 0$), możemy powyższą zależność sprowadzić do postaci

$$\delta(T+V) = \sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{\partial V}{\partial x_i}+m_i\ddot{x}_i\right)\xi_i+\left(\frac{\partial V}{\partial y_i}+m_i\ddot{y}_i\right)\eta_i+\left(\frac{\partial V}{\partial z_i}+m_i\ddot{z}_i\right)\zeta_i\right],$$

[13] A. Voss, *Bemerkungen über die Prinzipien der Mechanik*, Munch. Bericht math.-phys. kl. 1901.
[14] G. Helm, *Die Energetik in ihrer geschichtlichen Entwicklung*, Lipsk 1918.

skąd wynika równoważność zasady Helma z zasadą d'Alemberta–Lagrange'a. «Jest to jednak — jak dodaje Voss — nic innego, jak tylko abstrakcyjny formalizm», po czym konkluduje: «Wydaje się, że czynione dotąd próby wyprowadzenia zasady d'Alemberta lub zasady Gaussa z zasady energii nie zostały uwieńczone sukcesem.»[15]

W tym samym artykule Voss formułuje ogólną zasadę całkową mechaniki w następującej postaci:

«przy odpowiednim doborze procesu wariacji wariacja całki

$$J = \int_{t_0}^{t_1} (\alpha T + \beta U) dt, \tag{4.1}$$

gdzie α i β są dowolnymi stałymi, jest równa zeru ze względu na różniczkowe równania ruchu. Odwrotnie, założenie, że wariacja równa się zeru przy wszystkich dopuszczalnych przemieszczeniach wirtualnych, prowadzi do różniczkowych równań ruchu». Nie ma przy tym istotnego znaczenia warunek znikania wariacji współrzędnych na końcach przedziału całkowania.

Pod wielkością δU autor rozumie tu pracę sił zewnętrznych X_i, Y_i, Z_i na przemieszczeniach wirtualnych układu

$$\delta U = \sum_{i=1}^{n} (X_i \xi_i + Y_i \eta_i + Z_i \zeta_i).$$

Na ogół funkcja U ma jedynie sens symboliczny.

Voss rozpatruje najpierw w ogólnej postaci wariację całki

$$J' = \int_{t_0}^{t_1} F(x, \dot{x}, t), \tag{4.2}$$

odpowiadającą przejściu od stanu x, y, z do $x + \varepsilon\xi$, $y + \varepsilon\eta$, $z + \varepsilon\zeta$, to znaczy, gdy wariacji ulega argument całkowania.

Podstawienie $t = ku + k_0$, gdzie $k = \dfrac{t_1 - t_0}{1 - t_0}$, $k_0 = t_0 \dfrac{1 - t_1}{1 - t_0}$, pozwala sprowadzić całkę (4.2) do całki o stałych granicach

$$J' = \int_{0}^{1} F\left(x, \frac{dx}{kdu}, ku + u_0\right) k du. \tag{4.3}$$

Obliczając wariację całki (4.1), odpowiadającą przejściu od stanu x, y, z, t do $x + \varepsilon\xi$, $y + \varepsilon\eta$, $z + \varepsilon\zeta$, $t + \varepsilon\tau$, gdzie ξ, η, ζ, τ są dowolnymi różniczkowalnymi funkcjami czasu, otrzymujemy zależność

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_1} [(\beta U - \alpha T)\dot{\tau} + \alpha \dot{S} - \alpha W + \beta V] dt, \tag{4.4}$$

---

[15] A. Voss, *Bemerkungen ...*, s. 170.

gdzie

$$V = \delta U = \sum_{i=1}^{n} (X_i \xi_i + Y_i \eta_i + Z_i \zeta_i),$$

$$S = \sum_{i=1}^{n} m_i (\dot{x} \xi_i + \dot{y}_i \eta_i + \dot{z}_i \zeta_i),$$

$$W = \sum_{i=1}^{n} m_i (\ddot{x}_i \xi_i + \ddot{y}_i \eta_i + \ddot{z}_i \zeta_i).$$

Wyrażenie (4.4) na wariację δJ można przedstawić również w dwu innych postaciach

$$\text{(I)} \qquad \delta J = \beta \int_{t_0}^{t_1} (V - W) dt + \int_{t_0}^{t_1} [(\beta U - \alpha T)\dot{\tau} + (\beta - \alpha) W + \alpha \dot{S}] dt,$$

$$\text{(II)} \qquad \delta J = \alpha \int_{t_0}^{t_1} (V - W) dt + \int_{t_0}^{t_1} [(\beta U - \alpha T)\dot{\tau} + (\beta - \alpha) V + \alpha \dot{S}] dt.$$

Przy odpowiednim doborze funkcji τ, mianowicie takim, przy którym druga z całek we wzorach (I) i (II) równa się zeru, uzyskujemy równoważność zasady d'Alemberta–Lagrange'a z zasadą opisywaną przez równanie $\delta J = 0$. Natomiast odpowiedni dobór stałych α i β prowadzi do uzyskania różnych postaci szczególnych tej uogólnionej zasady całkowej.

A. Voss rozważa następujące cztery przypadki szczególne:

1. $\alpha = \beta$. Odpowiedni wybór funkcji τ prowadzi, na mocy równania (I), do następującego warunku

$$(U - T)\dot{\tau} + \dot{S} = 0.$$

Całkując względem czasu t i zakładając, że wariacje współrzędnych na brzegach przedziału całkowania są równe zeru, otrzymujemy $\tau = \text{const}$, a w szczególnym przypadku $\tau = 0$. Jeżeli $T - U = h$, to dla τ mamy następujący związek: $h\tau + s = 0$. W tym przypadku uzyskujemy zasadę Hamiltona.

2. Jeżeli $\beta = 0$, to z równania (II) wynika następująca postać warunku, określającego funkcję τ:

$$T\dot{\tau} + V - \dot{S} = 0.$$

Wobec tego, że $T \neq 0$, funkcję τ możemy zawsze określić. W tym przypadku mamy do czynienia z rozszerzoną postacią zasady najmniejszego działania.

3. Jeżeli $\alpha = 0$, to z równania (I) mamy

$$U\dot{\tau} + W = 0$$

przy czym założenie co do charakteru wariacji na brzegach przedziału nie jest konieczne.

Na to, by można było określić funkcję τ z ostatniego równania, trzeba założyć, że w obszarze całkowania U nie równa się zeru. Przy takim założeniu zasada, wyrażająca się równaniem

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} U dt = 0,$$

prowadzi również do różniczkowych równań ruchu.

4. Jeżeli $\beta = -\alpha$, to całka (4.1) ma w tym przypadku postać

$$J = \int_{t_0}^{t_1} \alpha(T-U)dt \quad \text{lub} \quad J = \int_{t_0}^{t_1} E dt.$$

Dla określenia funkcji τ otrzymujemy z równania (II) związek

$$(T+U)\dot{\tau}+2V-\dot{S} = 0.$$

Jedynie w pierwszych dwu z rozpatrywanych przypadków uzyskuje się tą drogą wygodne postacie uogólnionej zasady całkowej. W obydwu pozostałych przypadkach, jak też w ogólnym przypadku dowolnych α i β, interpretacja sensu mechanicznego symbolicznej wielkości U jest utrudniona, nie mówiąc już o tym, że przy dowolnych znaczeniach α i β nie można na ogół w obszarze całkowania spełnić warunku

$$\beta U - \alpha T \neq 0$$

niezbędnego dla określenia funkcji τ.

Jeżeli zamiast symbolicznego wyrażenia U wprowadzimy funkcję

$$A = \int_{t_0}^{t} \sum_{i=1}^{n} (X_i \dot{x}_i + Y_i \dot{y}_i + Z_i \dot{z}_i)$$

wobec tego zamiast całki (4.1) rozważymy całkę

$$\int_{t_0}^{t_1} (\alpha T + \beta A) dt,$$

to z wariacji tej całki uzyskamy następujące postacie całkowe zasady d'Alemberta–Lagrange'a:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (T+A)dt = 0, \quad \delta \int_{t_0}^{t_1} T dt = 0, \quad \delta \int_{t_0}^{t_1} U dt = 0, \quad \delta \int_{t_0}^{t_1} E dt = 0,$$

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (\alpha T + \beta A) dt = 0.$$

5. Całkowa postać zasady Gaussa dla układów holonomicznych. Praca E. Schenkla

Myśl o poszukiwaniu zasady, mającej postać całki względem czasu w określonych granicach całkowania i równoważnej zasadzie Gaussa, została po raz pierwszy sformułowana przez profesora Wassmutha. Jako podstawę swych badań w tej dziedzinie przyjął E. SCHENKL, zgodnie z ideą Wassmutha, następującą analogię.[16]

Równoważność zasady Hamiltona i zasady d'Alemberta–Lagrange'a wynika z tożsamości

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T + \delta U) dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{3n} (X_i - m_i \ddot{x}_i) \delta x_i dt. \tag{5.1}$$

[16] E. Schenkl, *Über eine dem Gaußschen Prinzipe des kleinsten Zwanges entsprechende Integralform*, Sitz. bericht. d. k. Academie d. Wiss. in Wien, t. 122. Wiedeń 1913.

Zasada Hamiltona jest całkową postacią zasady d'Alemberta–Lagrange'a. Jeżeli zbudujemy tożsamość, formalnie analogiczną do tożsamości (5.1), której prawa część przyjmuje postać:

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{3n} (X_i - m_i \ddot{x}_i)\, \delta \ddot{x}_i dt, \tag{5.2}$$

to możemy dojść do całkowej postaci zasady Gaussa. W zasadzie Gaussa nie zakłada się żadnego związku pomiędzy wariacjami przyspieszeń, odpowiadającymi różnym chwilom czasu t i t'. Wariacje muszą jedynie spełniać warunki zgodności z więzami; natomiast przy przejściu od jednej chwili podczas ruchu układu do innej wariacje mogą zmieniać się w sposób dowolny, w tym również skokowo, skąd wynika, że ciąg przyspieszeń, w czasie podlegających wariacji, może nie być ciągły.

Ciąg przyspieszeń podlegających wariacji w czasie musi spełniać warunek, nadający sens całce (5.2). Innymi słowy, trzeba przejść od wariacji ruchu w danej chwili czasu do wariacji ruchu w całości, to znaczy w skończonym przedziale czasu. W zasadzie Hamiltona przejście to jest dokonywane w następujący sposób.

Niech ruch układu holonomicznego w kartezjańskim układzie współrzędnych będzie opisany związkiem $x_i = f_i(t)$. W pewnej ustalonej chwili czasu t nadajmy układowi przemieszczenie wirtualne, które jest zgodne z nałożonymi na układ więzami. Uzyskamy dla tej chwili wariację położenia układu, określoną przez współrzędne $x_i + \delta x_i$.

W dowolnie bliskiej sąsiedniej chwili czasu t' współrzędne układu równają się $x_i' = f_i(t')$. Jeżeli nadamy układowi w chwili t' przemieszczenie wirtualne $\delta x_i'$, to dla tej chwili uzyskamy wariację położenia układu, opisaną współrzędnymi $x_i' + \delta x_i'$.

W ten sposób, przechodząc od chwili czasu do następnej, wszędzie zastosujemy wskazaną metodę wariacji w punkcie. Wielkości wariacji δx_i, odpowiadające różnym chwilom czasu, są zupełnie niepowiązane ze sobą; spełniając warunki zgodności z więzami możemy od jednej chwili do innej zmieniać wariacje w sposób dowolny, dzięki czemu ciąg w czasie wariacji położeń układu może nie być ciągły, całka zaś

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta x_i dt$$

może nie mieć sensu. Zażądamy więc od ciągu położeń układu ciągłości względem czasu, przyjmując zależność

$$\delta x_i = \varepsilon f_i(t),$$

gdzie ε jest infinitezymalnie małym parametrem niezależnym od czasu, $f_i(t)$ zaś dowolną ciągłą i skończoną funkcją czasu. Wówczas wariacje współrzędnych będą infinitezymalnie małymi funkcjami czasu. Całka

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta x_i dt$$

będzie miała obecnie sens, jako całka funkcji ciągłej.

Ciąg położeń wariacyjnych układu $x_i + \varepsilon f_i(t)$ będzie reprezentował pewien ruch, który nazywamy wariacją ruchu. E. SCHENKL dowodzi, że w metodzie Gaussa nie można dokonać w analogiczny sposób przejścia od wariacji ruchu punktu do wariacji ruchu całego układu.

Istotnie, jeżeli założymy, że wariacje przyspieszeń $\delta\ddot{x}_i$ są ciągłymi funkcjami czasu[17)], to wariacje prędkości i wariacje współrzędnych nie mogą być w każdej chwili równe zeru, jak żąda się w metodzie wariacyjnej Gaussa. Wynika to stąd, że w przypadku, gdy wielkość $\delta\ddot{x}_i$ jest ciągłą funkcją czasu, powinna ona zachowywać znak w dostatecznie małym przedziale czasowym. Wówczas ze względu na relację

$$\delta\ddot{x}_i = \frac{d\delta\dot{x}_i}{dt}, \tag{5.3}$$

wielkość $\delta\dot{x}_i$ zwiększa się lub zmniejsza w tym przedziale czasu, co oznacza, że gaussowska metoda wariacji w punkcie zostaje naruszona. Zauważmy, że relacja (5.3) jest słuszna przy założeniu, że czas nie podlega wariacji.

Następnie E. SCHENKL analizuje jeszcze jedną próbę przejścia do wariacji ruchu w całości przy użyciu metody Gaussa wariacji ruchu w punkcie.

W myśl zasady Gaussa stan ruchu podlega w każdej chwili następującej wariacji: $\delta x_i = 0$, $\delta\dot{x}_i = 0$, $\delta\ddot{x}_i \neq 0$. Niech punkt materialny M opisuje w ruchu rzeczywistym dany tor z daną prędkością. Ustalmy dowolną chwilę ruchu. Mówiąc o wariacji stanu ruchu w tej chwili według Gaussa, mamy na myśli punkt M, leżący na innym torze, mającym z danym torem wspólny punkt M ($\delta x_i = 0$); tor ten nazwiemy wariacją toru. We wspólnym punkcie M tor rzeczywisty i wariacja toru mają wspólną styczną ($\delta\dot{x}_i = 0$), natomiast krzywizna wariacji toru w punkcie M jest różna od krzywizny toru rzeczywistego, co oznacza, że normalne składowe przyspieszenia punktu w danej chwili czasu są inne na torze rzeczywistym, niż na jego wariacji ($\delta\ddot{x}_i \neq 0$). Dla danej chwili czasu mamy nieskończenie wiele wariacji stanu ruchu. Zasada najmniejszego przymusu stwierdza, że w nieskończonej różnorodności stanów ruchu w danej chwili czasu rzeczywistym ruchem jest ten, dla którego wariacja przymusu równa się zeru.

Rozważmy z kolei przejście od jednej chwili czasu t_1 do innej t_2. Wariację trajektorii, odpowiadającą przedziałowi czasu $t_2 - t_1$, przedstawimy jako nieskończoną sumę infinitezymalnych części, odpowiadających opisanemu powyżej sposobowi konstruowania wariacji w punkcie. Geometrycznie możemy to wyobrazić sobie w następujący sposób.

Niech z każdego punktu rzeczywistej trajektorii wychodzi pęk torów, wynikających z dokonania wariacji w punkcie. Wariację toru, odpowiadającą przedziałowi czasu od t_1 do t_2, wyobrazimy sobie jako sumę nieskończenie wielkiej liczby infinitezymalnie małych trajektorii cząstkowych, odpowiadających wariacji w punkcie. Wariacje przyspieszeń, odpowiadających tak skonstruowanemu torowi, nie mogą mieć stałego znaku w żadnym, dowolnie małym, przedziale czasu, gdyż w przeciwnym przypadku jak zostało stwierdzone poprzednio, nie mogłyby równać się zeru wariacje prędkości, odpowiadające dowolnej chwili czasu.

---

17) L. Boltzmann, *Vorlesungen über die Prinzipien der Mechanik*, I Część, 1897, s. 211.

Wynika stąd, że wariacje przyspieszeń można przedstawić tylko jako takie funkcje czasu, które w każdym, dowolnie małym, przedziale czasu zmieniają swój znak w sposób dowolny. Jednakowoż funkcje tego typu nie są całkowalne. Oznacza to, że obie próby przejścia do wariacji ruchu w całości skończyły się niepowodzeniem, gdyż zarówno w pierwszym, jak i w drugim przypadku, czas nie podlegał wariacji i obowiązywała relacja (5.3).

«Tak więc — kończy swe rozważania Schenkl — nie można ustalić odpowiedniości między punktami toru rzeczywistego i jego wariacji w taki sposób, by wzajemnie odpowiadające sobie położenia w obydwu ruchach zajmowane były jednocześnie.» To stwierdzenie prowadzi autora do konkluzji, że wariację ruchu należy budować, dokonując jednocześnie wariacji czasu.

Załóżmy, że wzajemnie odpowiadającym sobie stanom ruchu rzeczywistego i jego wariacji odpowiadają różne chwile czasu t i $t+\delta t$. Przy tym założeniu możemy skonstruować taką wariację ruchu, dla której wariacje przyspieszeń $\bar{\delta}\ddot{x}_i$ (w odróżnieniu od wariacji przyspieszeń $\delta\ddot{x}_i$, które dokonywane są bez wariacji czasu) są całkowalnymi funkcjami czasu. Wariacje przyspieszeń $\delta\ddot{x}_i$, jak już zostało stwierdzone, należy przedstawić jako takie funkcje czasu, które w każdym dowolnie małymy przedziale czasu dowolnie często zmieniają znak. Funkcja taka została zbudowana przez Schenkla w następujący sposób. Podzielmy przedział czasu $[t_1, t_2]$, w którym funkcję tę będziemy rozpatrywali, na n równych części τ. Niech wariacje przyspieszeń $\delta\ddot{x}_i$, w chwilach czasu $t_+ = t_1+\mu\tau$, $\mu = 0, 2, 4, \ldots, n$, są równe wartościom dowolnej, danej z góry, ciągłej, dodatniej funckji czasu $f_i(t)$, zaś w chwilach czasu $t_- = t_1+\nu\tau$, $\nu = 1, 3, 5, \ldots, n—1$, wartości tych wariacji są ujemne i równe co do modułu średnim arytmetycznym od wartości wariacji w sąsiednich (parzystych) chwilach czasu. Wówczas przy $n \to \infty$ (lub $\tau \to 0$) wielkość $\delta\ddot{x}_i$ jest reprezentowana przez funkcję o żądanej własności, to znaczy dowolnie często zmieniającą znak.

Następnie wprowadza się wariację czasu δt. Wariacja czasu jest taką funkcją czasu, która przybiera wartości zerowe w każdej chwili $t_+ = t_1+\mu\tau$, dla której wariacje przyspieszenia $\delta\ddot{x}_i$ są dodatnie, oraz wartości τ w każdej chwili $t_- = t_1+\nu\tau$, dla której wariacja $\delta\ddot{x}_i$ jest ujemna. Wreszcie, wykonując pełną wariację możemy zastąpić wariację przyspieszenia w chwili t wariacją przyspieszenia w chwili $t+\delta t$. Wówczas chwilom czasu t_- będą odpowiadały wariacje przyspieszeń dla chwil $t_+ = t_-+\tau$. A więc wszystkim chwilom czasu odpowiadać będą dodatnie wartości wariacji przyspieszeń $\bar{\delta}\ddot{x}_i$ (w ten sposób oznaczymy wariacje przyspieszenia, z wariacją czasu t). Mamy więc relację $\bar{\delta}\ddot{x}_i = f_i(t)$. Traktując wariacje przyspieszenia jako wielkości infinitezymalne możemy je przedstawić w postaci $\bar{\delta}\ddot{x}_i = \varepsilon f_i(t)$, gdzie ε oznacza nieskończenie mały parametr.

Przy takim określeniu wariacji przyspieszenia całka (5.2) ma sens. Zauważmy przy tym, że wariacja czasu δt nie jest w żaden sposób związana z wariacją przyspieszenia $\delta\ddot{x}_i$, dlatego można ją traktować (jak to czyni Schenkl) jako wielkość nieskończenie małą wyższego rzędu niż wariacja $\delta\ddot{x}_i$, a więc również niż wariacja $\bar{\delta}\ddot{x}_i$.

Dzięki wprowadzeniu wariacji czasu δt, wariacje współrzędnych i prędkości przyjmują postać

$$\bar{\delta}x_i = \dot{x}_i\,\delta t, \qquad \bar{\delta}\dot{x}_i = \ddot{x}_i\,\delta t,$$

gdzie $\dot{x}_i$ i $\ddot{x}_i$ są wielkościami skończonymi, δt zaś jest nieskończenie małą wyższego rzędu niż $\bar{\delta}\ddot{x}_i$. W takim razie $\bar{\delta}x_i$ i $\bar{\delta}\dot{x}_i$ są wielkościami nieskończenie małymi wyższego rzędu w porównaniu z $\bar{\delta}\ddot{x}_i$. Dlatego dalej będziemy je przyrównywali do zera:

$$\bar{\delta}x_i = 0, \quad \bar{\delta}\dot{x}_i = 0.$$

Wariację ruchu konstruujemy więc przy następujących warunkach:

(1) Wariację $\bar{\delta}x_i$ i $\bar{\delta}\dot{x}_i$ są równe zeru w dowolnej chwili czasu z rozważanego przedziału.

(2) Wariacja przyspieszenia $\bar{\delta}\ddot{x}_i \neq 0$ i jest całkowalną funkcją czasu.

(3) Dodatkowo zakłada się, że

$$\bar{\delta}\dddot{x}_i = \frac{d\bar{\delta}\ddot{x}_i}{dt}$$

co oznacza, że symbole d i $\bar{\delta}$ są przemienne.

(4) W skończonych chwilach czasu t_1 i t_2 wariacje przyspieszeń równają się zeru:

$$(\bar{\delta}\ddot{x}_i)_{t_1} = 0, \quad (\bar{\delta}\ddot{x}_i)_{t_2} = 0.$$

Spełnienie tych warunków dla wariacji ruchu jako całości zapewnia jednoczesne spełnienie poprzednich warunków wariacji w dowolnej chwili czasu oraz istnienie całki

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{3n} (X_i - m_i\ddot{x}_i)\bar{\delta}\ddot{x}_i \delta t.$$

Zbadajmy z kolei kwestię formułowania całkowej postaci twierdzenia Gaussa. W tym celu obliczmy wariację $\bar{\delta}\left(\frac{d^2T}{dt^2}\right)$. Uwzględniając warunek $\bar{\delta}\dot{x}_i = 0$ otrzymujemy dla niej wyrażenie

$$\bar{\delta}\left(\frac{d^2T}{dt^2}\right) = \sum_{i=1}^{3n} m_i(2\ddot{x}_i\bar{\delta}\ddot{x}_i + \dot{x}_i\bar{\delta}\dddot{x}_i). \tag{5.4}$$

Następnie rozważmy pracę wirtualną sił aktywnych, oddziałujących na układ

$$\delta A = \sum_{i=1}^{3n} X_i\delta x_i.$$

Druga pochodna względem czasu z pracy wirtualnej przyjmuje postać:

$$\frac{d^2}{dt^2}\delta A = \sum_{i=1}^{3n}\left(\frac{d^2X_i}{dt^2}\delta x_i + 2\frac{dX_i}{dt}\delta\dot{x}_i + X_i\delta\ddot{x}_i\right). \tag{5.5}$$

Przyjęte warunki wariacji umożliwiają obliczenie wariacji $\bar{\delta}$ w ten sposób, jak gdyby czas nie ulegał wariacji. Dlatego w równaniu (5.5) możemy formalnie zastąpić symbol δ przez symbol $\bar{\delta}$.

Wówczas z równania (5.5) otrzymamy zależność

$$\frac{d^2\bar{\delta}A}{dt^2} = \sum_{i=1}^{3n}\left(\frac{d^2X_i}{dt^2}\bar{\delta}x_i + 2\frac{dX_i}{dt}\bar{\delta}\dot{x}_i + X_i\bar{\delta}\ddot{x}_i\right),$$

wobec tego zaś, że $\bar{\delta} x_i = \bar{\delta} \dot{x}_i = 0$, otrzymujemy

$$\frac{d^2 \bar{\delta} A}{dt^2} = \sum_{i=1}^{3n} X_i \bar{\delta} \ddot{x}_i. \tag{5.6}$$

Odejmując stronami równanie (5.6) od równania (5.4) uzyskamy

$$\bar{\delta}\left(\frac{d^2 T}{dt^2}\right) - \frac{d^2 \bar{\delta} A}{dt^2} = \sum_{i=1}^{3n} \left(2m_i \ddot{x}_i \bar{\delta} \ddot{x}_i + m_i \dot{x}_i \frac{d\bar{\delta} \ddot{x}_i}{dt} - X_i \bar{\delta} \ddot{x}_i\right).$$

Całkowanie ostatniej z tych zależności w określonym przedziale czasowym od t_1 do t_2, z uwzględnieniem warunków brzegowych, prowadzi do równania

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\bar{\delta}\left(\frac{d^2 T}{dt^2}\right) - \frac{d^2 \bar{\delta} A}{dt^2}\right] dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{3n} (m_i \ddot{x}_i - X_i) \bar{\delta} \ddot{x}_i \, dt, \tag{5.7}$$

z którego wynika całkowa postać zasady Gaussa

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\bar{\delta}\left(\frac{d^2 T}{dt^2}\right) - \frac{d^2 \bar{\delta} A}{dt^2}\right] dt = 0. \tag{5.8}$$

Zasadę, opisywaną przez równanie (5.8), nazwiemy zasadą Schenkla. Równoważność zasady Schenkla i zasady Gaussa wynika z równania (5.7). Rzeczywiście, załóżmy, że spełniona jest zasada Schenkla. Wówczas z równania (5.7) otrzymujemy zależność

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{3n} (m_i \ddot{x}_i - X_i) \bar{\delta} \ddot{x}_i \, dt = 0 \tag{5.9}$$

dla dowolnych wartości t_1 i t_2. Jest to możliwe jedynie wtedy, gdy funkcja podcałkowa równa się zeru. Mamy więc relację

$$\sum_{i=1}^{3n} (m_i \ddot{x}_i - X_i) \bar{\delta} \ddot{x}_i = 0,$$

co oznacza, że wariacje przymusu są według Schenkla równe zeru

$$\bar{\delta} Z = 0. \tag{5.10}$$

Nowe (zgodne z podejściem Schenkla) i stare (gaussowskie) warunki wariacji w punkcie pokrywają się. Dlatego z równania (5.10) wynika, że również wariacje przymusu według Gaussa równają się zeru $\delta Z = 0$, a więc spełniona jest zasada Gaussa.

Odwrotnie, załóżmy, że zachodzi zasada Gaussa, to znaczy

$$\int_{t_1}^{t_2} \Sigma (m_i \ddot{x}_i - X_i) \bar{\delta} \ddot{x}_i \, dt = 0.$$

Wówczas z równania (5.7) wynika od razu spełnienie zasady Schenkla w postaci

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\bar{\delta}\left(\frac{d^2 T}{dt^2}\right) - \frac{d^2 \bar{\delta} A}{dt^2}\right] dt = 0.$$

6. Postać całkowa zasady Jourdaina

Różniczkowa zasada Jourdaina[18] jest wyrażona przez równanie

$$\sum_{i=1}^{3n}(X_i - m_i\ddot{x}_i)\delta\dot{x}_i = 0 \tag{6.1}$$

i odpowiada takiemu procesowi wariacyjnemu, w którym w dowolnej chwili czasu ulegają wariacji prędkości punktów układu materialnego ($\delta\dot{x}_i \neq 0$), zaś ich współrzędne nie ulegają zmianom ($\delta x_i = 0$). Całkowa postać zasady Jourdaina może być wyprowadzona analogicznie do tego, jak SCHENKL wyprowadził całkową postać zasady Gaussa. Zbudowanie całkowej postaci zasady Jourdaina wymaga skonstruowania tożsamości, w której jedna ze stron ma postać następującej całki:

$$\int_{t_1}^{t_2}\sum_{i=1}^{3n}(X_i - m_i\ddot{x}_i)\delta\dot{x}_i\,dt. \tag{6.2}$$

Całka ta istnieje, gdy założymy, że funkcje $\delta\dot{x}_i$ są ciągłe. Przypuśćmy, że $\delta\dot{x}_i$ jest ciągłą funkcją czasu, w ten sposób przechodzimy od wariacji ruchu w ustalonej chwili czasu do wariacji tego ruchu w skończonym przedziale czasu. Zauważmy, że warunki wariacji według Jourdaina nie są spełnione. Istotnie, z równości

$$\delta\dot{x}_i = \frac{d\delta x_i}{dt} \tag{6.3}$$

wynika, że wariacje współrzędnych δx_i rosną lub maleją ($\delta x_i \neq 0$), gdyż warunek ciągłości $\delta\dot{x}_i$ oznacza zachowanie znaku funkcji $\delta\dot{x}_i$ w dostatecznie małym przedziale czasu.

Równanie (6.3) zakłada, że czas nie ulega wariacji. Oznacza to, że spełnienie w dowolnej chwili czasu warunków wariacji według Jourdaina wymaga wariacji czasu. Przechodzimy więc, zgodnie z metodą Schenkla w zastosowaniu do wariacji prędkości, od δ-procesu wariacji izochronicznej do $\bar{\delta}$-procesu wariacji asynchronicznej. Dzięki temu dokonujemy przejścia od niecałkowalnych funkcji czasu $\delta\dot{x}_i$ do całkowalnych funkcji $\bar{\delta}\dot{x}_i$.

Funkcje $\bar{\delta}\dot{x}_i$ są konstruowane podobnie, jak funkcje $\bar{\delta}\ddot{x}_i$ u SCHENKLA. Zakłada się, że wariacje czasu są wielkościami nieskończenie małymi wyższego rzędu, niż wariacje $\delta\dot{x}_i$ lub $\bar{\delta}\dot{x}_i$. Dzięki wprowadzeniu wariacji czasu współrzędne doznają wariacji $\bar{\delta}x_i = \dot{x}_i\delta t$. Ze względu jednak na to, że δt jest wielkością nieskończenie małą wyższego rzędu, niż $\bar{\delta}\dot{x}_i$, możemy zakładać, że $\bar{\delta}x_i = 0$. W ten sposób wariacja w skończonym przedziale czasu jest dokonywana przy następujących warunkach:

(1) Wariacja $\bar{\delta}x_i$ jest w dowolnej chwili czasu równa zeru: $\bar{\delta}x_i = 0$.

(2) Wariacja $\bar{\delta}\dot{x}_i \neq 0$ i jest całkowalną funkcją czasu.

(3) Spełniona jest zależność $\bar{\delta}\ddot{x}_i = \dfrac{d}{dt}\bar{\delta}\dot{x}_i$, która oznacza przemienność operacji d i $\bar{\delta}$.

(4) Na końcach przedziału spełnione są warunki $(\bar{\delta}\dot{x}_i)_{t_1} = 0$, $(\bar{\delta}\dot{x}_i)_{t_2} = 0$.

[18] P. Jourdain, *Note on an analogue of Gauss principle of least constraint*, Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics, t. 40, Londyn 1909.

Przejdźmy do budowania całkowej formy zasady Jourdaina. W tym celu najpierw obliczamy wariację

$$\bar{\delta}\left(\frac{dT}{dt}\right) = \sum_{i=1}^{3n} m_i \dot{x}_i \bar{\delta}\ddot{x}_i + \sum_{i=1}^{3n} m_i \ddot{x}_i \bar{\delta}\dot{x}_i, \tag{6.4}$$

$$\frac{d}{dt}\delta A = \sum_{i=1}^{3n} (\dot{X}_i \delta x_i + X_i \delta \dot{x}_i). \tag{6.5}$$

Przyjęte przez nas warunki wariacji pozwalają na zastąpienie w równaniu (6.5) symbolu δ symbolem $\bar{\delta}$. Wówczas otrzymamy związek

$$\frac{d}{dt}\bar{\delta}A = \sum_{i=1}^{3n} X_i \bar{\delta}\dot{x}_i. \tag{6.6}$$

Odejmując stronami równanie (6.6) od równania (6.5) mamy

$$\bar{\delta}\left(\frac{dT}{dt}\right) - \frac{d}{dt}\bar{\delta}A = \sum_{i=1}^{3n} m_i \dot{x}_i \frac{d}{dt}\bar{\delta}\dot{x}_i + \sum_{i=1}^{3n} m_i \ddot{x}_i \bar{\delta}\dot{x}_i - \sum_{i=1}^{3n} X_i \bar{\delta}\dot{x}_i.$$

Całkując tę zależność i uwzględniając warunki wariacji 2–4 uzyskujemy tożsamość

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\bar{\delta}\left(\frac{dT}{dt}\right) - \frac{d}{dt}\bar{\delta}A + \sum_{i=1}^{3n} m_i \dot{x}_i \bar{\delta}\ddot{x}_i\right] dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{3n} (m_i \ddot{x}_i - X_i)\bar{\delta}\dot{x}_i\, dt,$$

z której wynika całkowa forma zasady Jourdaina, mająca postać warunku zerowania się następującej całki:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\bar{\delta}\left(\frac{dT}{dt}\right) - \frac{d}{dt}\bar{\delta}A + \sum_{i=1}^{3n} m_i \dot{x}_i \bar{\delta}\ddot{x}_i\right] dt = 0.$$

POLITECHNIKA, WOŁGOGRAD

Praca została złożona w Redakcji dnia 14 lipca 1972 r.