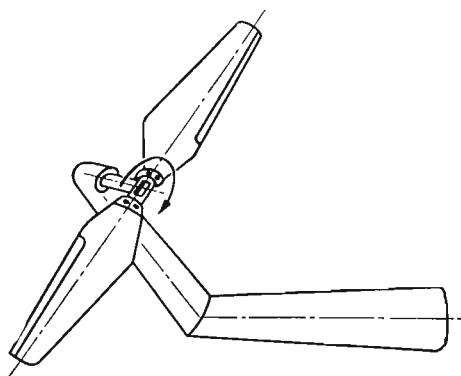


## DRGANIA ŁOPAT ŚMIGŁA\*

JERZY MARYNIAK, WAĆLAW MIERZEJEWSKI, JÓZEF KRUTUL (WARSZAWA)

### 1. Wstęp

Na przykładzie łopaty śmigła ogonowego śmigłowca (rys. 1) przedstawiono obliczenia częstości i postaci drgań własnych. Stosując szereg uproszczeń przyjętego modelu dyskretnego, otrzymane wyniki obliczeń analitycznych [8] porównano z wynikami doświadczalnymi [6].



Rys. 1. Śmigło ogonowe śmigłowca

Zbadano również wpływ obrotów śmigła na częstości i postaci drgań własnych [9] i porównano z otrzymanymi postaciami dla łopaty utwierdzonej sztywno.

Znajomość częstości i postaci drgań własnych mogą służyć jako dane wyjściowe do obliczeń dynamicznych, np. określenia krytycznej prędkości flutteru, jak również jako dane porównawcze dla nowych konstrukcji lub weryfikacji już gotowych produktów. Łopaty śmigła posiadające identyczne rozkłady węzłów i te same częstości dla szeregu postaci drgań własnych muszą nie tylko posiadać podobieństwo geometryczne, ale i zbliżony rozkład mas i sztywności.

Częstości i postaci drgań własnych można wyznaczyć na drodze eksperymentu poprzez próby rezonansowe stosując metody przedstawione w pracach [1], [2], jak również na drodze obliczeń analitycznych.

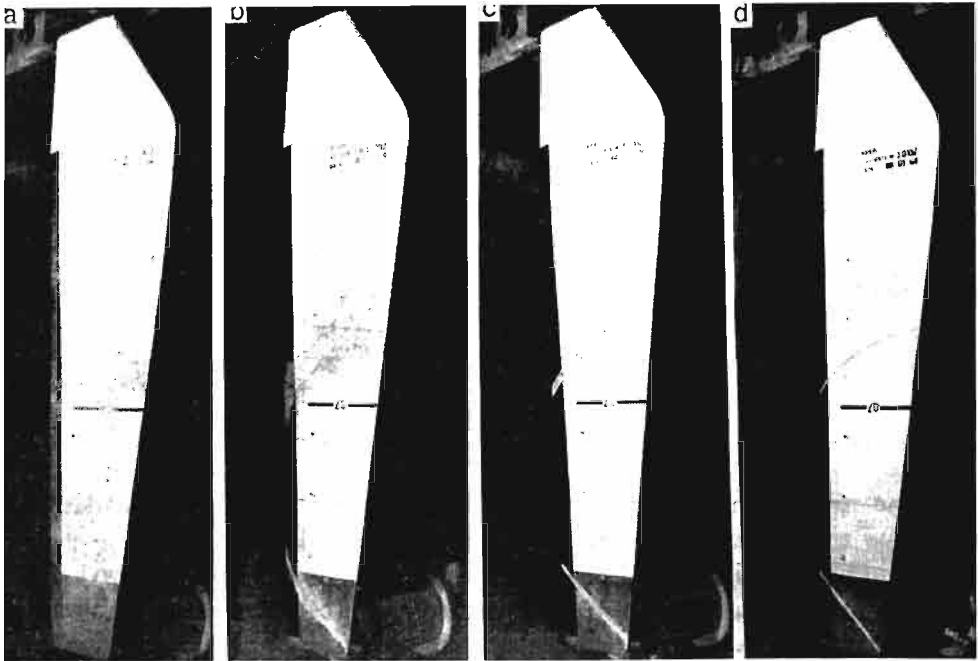
\* Fragment niniejszej pracy był przedstawiony na VII Polsko-Czechosłowackiej Konferencji Dynamiki Maszyn, Gliwice 1971.

Przy wykonywaniu obliczeń dane dotyczące geometrii mas i rozkładu sztywności zostały przyjęte z pomiarów wykonanych w Katedrze Mechaniki Wydziału Mechanicznego Energetyki i Lotnictwa Politechniki Warszawskiej [7]. Do obliczeń stosowano znane metody przedstawione między innymi w [5] i [10]. Wyznaczanie częstości i postaci drgań własnych łopaty śmigła sprowadzało się do obliczeń wartości własnych i wektorów własnych macierzy symetrycznych otrzymanych po odpowiednich przekształceniach z równań opisujących swobodne drgania śmigła.

Drgania giętne wirującej łopaty śmigła [9] przeprowadzono stosując metodę trzech momentów zastosowaną przez MORRISA i TYE'A [5].

## 2. Pomiary rezonansowe

Pomiary rezonansowe wykonano na sztywno utwierdzonej łopacie śmigła za pomocą wzbudników elektrodynamicznych wzbudzających sinusoidalne drgania w zakresie częstości 3–800 Hz. Pomiaru amplitud i faz w poszczególnych punktach łopaty dokonano przy pomocy czujników indukcyjnych. W celu dokładnego wyznaczenia linii węzłów na łopacie

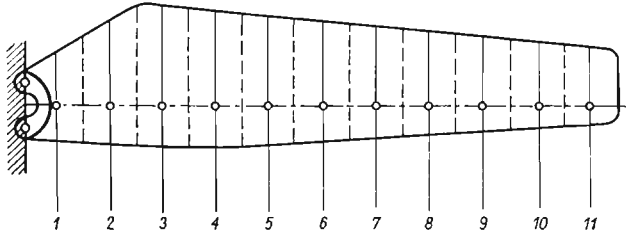


Rys. 2. Wizualizacja linii węzłów postaci drgań własnych łopaty śmigła przy częstości 176 Hz: a) łopata nieruchoma pokryta trocinami dębowymi, b) łopata wzbudzona — widoczne przemieszczenia się trocin do linii węzłów, c) łopata wzbudzona — tworzenie się linii węzłów, d) łopata wzbudzona — linie węzłów uformowane

pacie śmigła zastosowano wizualizację postaci, pokrywając łopatę równomiernie suchymi trocinami dębowymi (rys. 2). Każda z otrzymanych postaci została sfotografowana, co umożliwiło porównanie z postaciami otrzymanymi na drodze pomiarów amplitud i faz. W ten sposób wyznaczono 10 kolejnych postaci drgań własnych i określono ich częstości [6]; przedstawione one są w tablicy 1 i na rys. 6–11.

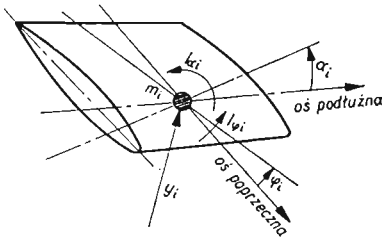
## 3. Obliczenia analityczne częstotliwości i postaci drgań swobodnych łopaty

Obliczenia przeprowadzono dla modelu łopaty śmigła z dyskretnie rozłożonymi parametrami dynamicznymi.

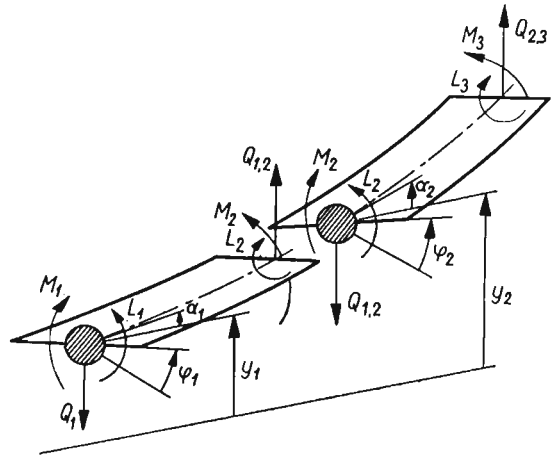


Rys. 3. Podział łopaty śmigła na segmenty i rozkład mas punktowych

Łopatę śmigła podzielono na 11 segmentów (rys. 3), które zastąpiono punktowymi masami skupionymi  $m$  przypisując im momenty bezwładności segmentów  $J_\varphi$  względem osi podłużnej oraz uwzględniono wpływ bezwładności obrotów poprzecznych  $J_\alpha$  i odkształceń postaciowych w płaszczyźnie ugięcia (rys. 4).



Rys. 4. Układ osi, przyjętych przemieszczeń ugięcia  $Y_i$  skręcenia  $\varphi_i$  i obrotu poprzecznego  $\alpha_i$  oraz położenie masy skupionej  $m_i$  i momentów bezwładności względem osi podłużnej  $J_\varphi$  i osi poprzecznej  $J_\alpha$



Rys. 5. Układ przyjętych przemieszczeń i sił działających na dwa sąsiednie segmenty łopaty śmigła,  $M$  — moment zginający,  $L$  — moment skręcający,  $Q$  — siła tnąca

W przyjętym modelu uwzględniono przez odpowiednie współczynniki wpływowe sztywności giętkie  $C^{zz}$ , skrętne  $C^{\varphi\varphi}$ , obrotowe  $C^{\alpha\alpha}$  oraz sprzężenie sztywnościowe giętko-obrotowe  $C^{z\alpha} = C^{\alpha z}$ . Pominięto wpływ tłumienia wewnętrznego i sprzężenia sztywnościowe giętko-skrętne  $C^{z\varphi} = C^{\varphi z} = 0$  oraz skrętno-obrotowe  $C^{\varphi\alpha} = C^{\alpha\varphi} = 0$ .

Odpowiednie przyjęcie osi podłużnych i poprzecznych segmentów (rys. 4) jako osi głównych spowodowało wyeliminowanie momentów dewiacji. W przyjętym ogólnym modelu uwzględniono sprzężenia bezwładnościowe drgań giętko-skrętnych.

Dla tak przyjętego dyskretnego modelu śmigła (rys. 3, 4, 5) na podstawie [5] i [10] otrzymano układ równań w postaci:

$$(1) \quad \begin{bmatrix} \bar{Y} \\ \bar{\varphi} \\ \bar{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [C^{zz}] & [0] & [-C^{z\alpha}] \\ [0] & [C^{\varphi\varphi}] & [0] \\ [-C^{\alpha z}] & [0] & [C^{\alpha\alpha}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [m] & [-S] & [0] \\ [-S] & [J_\varphi] & [0] \\ [0] & [0] & [J_\alpha] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\bar{Y}} \\ \ddot{\bar{\varphi}} \\ \ddot{\bar{\alpha}} \end{bmatrix} = 0,$$

gdzie  $\bar{Y}$  — wyrazy macierzy kolumnowej ugięć,  $\bar{\varphi}$  — wyrazy macierzy kolumnowej kątów skręceń,  $\bar{\alpha}$  — wyrazy macierzy kolumnowej kątów obrotu poprzecznego,  $C^{zz}$ ,  $C^{z\alpha}$ ,  $C^{\alpha z}$ ,  $C^{\alpha\alpha}$ ,  $C^{\varphi\varphi}$  — współczynniki wpływowe ugięć, obrotów i skręceń,  $[m]$  — macierz diagonalna mas segmentów łopaty śmigła,  $[S]$  — macierz diagonalna momentów statycznych względem osi podłużnej,  $[J_\varphi]$ ,  $[J_\alpha]$  — macierze diagonalne momentów bezwładności segmentów względem osi podłużnej i poprzecznej, przy czym zgodnie z [10] i [8]

$$(2) \quad [J'_\alpha] = (1+k)[J_\alpha],$$

gdzie  $k = \frac{E}{kG}$ ,  $E$  — moduł Younga,  $G$  — moduł odkształcenia postaciowego,  $k$  — współczynnik zależny od kształtu poprzecznego łopaty śmigła.

Przy obliczeniach przyjęto, że współczynnik  $k = \text{const}$  jest stały dla wszystkich segmentów łopaty. Ze względu na złożoną budowę i materiał, nie można było dokładnie wyznaczyć właściwego określenia i zmiany współczynnika  $k$  wzdłuż łopaty śmigła. W związku z powyższym obliczenia wykonano dla kilku wartości współczynnika.

Rozwiązując numerycznie układ równań wyznaczono 9 kolejnych postaci drgań własnych i ich częstotści, które przedstawiono w tablicy 1 na rys. 6–11.

Do przyjętego modelu wprowadzono szereg kolejnych uproszczeń otrzymując następujące przypadki:

a) *Drgania giętno-skrętne z uwzględnieniem bezwładności obrotu poprzecznego — pominięto przy tym odkształcalność postaciową.* Zakładając  $k = 0$  pominięto odkształcalność postaciową. Układ równań (1) otrzymano w postaci:

$$(3) \quad \begin{bmatrix} \bar{Y} \\ \bar{\varphi} \\ \bar{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [C^{zz}] & [0] & [-C^{z\alpha}] \\ [0] & [C^{\varphi\varphi}] & [0] \\ [-C^{\alpha z}] & [0] & [C^{\alpha\alpha}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [m] & [-S] & [0] \\ [-S] & [J_\varphi] & [0] \\ [0] & [0] & [J_\alpha] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\bar{Y}} \\ \ddot{\bar{\varphi}} \\ \ddot{\bar{\alpha}} \end{bmatrix} = 0.$$

b) *Drgania giętne z uwzględnieniem bezwładności obrotu poprzecznego i odkształcalności postaciowej.* Zakładając  $J_\varphi = S = C^{\varphi\varphi} = 0$  pominięto drgania skrętne  $\bar{\varphi}$ . Układ równań (1) otrzymano w postaci:

$$(4) \quad \begin{bmatrix} \bar{Y} \\ \bar{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [C^{zz}] & [-C^{z\alpha}] \\ [-C^{\alpha z}] & [C^{\alpha\alpha}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [m] & [0] \\ [0] & [J'_\alpha] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\bar{Y}} \\ \ddot{\bar{\alpha}} \end{bmatrix} = 0.$$

c) *Drgania giętne z uwzględnieniem bezwładności obrotu poprzecznego.* Zakładając  $J_\varphi = S = C^{\varphi\varphi} = k = 0$  pominięto drgania skrętne  $\bar{\varphi}$  i odkształcalność postaciową przekrojów poprzecznych segmentów  $k = 0$ . Układ równań (1) otrzymano w postaci:

$$(5) \quad \begin{bmatrix} \bar{Y} \\ \bar{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [C^{zz}] & [-C^{z\alpha}] \\ [-C^{\alpha z}] & [C^{\alpha\alpha}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [m] & [0] \\ [0] & [J'_\alpha] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\bar{Y}} \\ \ddot{\bar{\alpha}} \end{bmatrix} = 0.$$

Podczas drgań giętnych elementy łopaty oprócz ruchów pionowych wykonują obrót  $\alpha$  w płaszczyźnie ugięcia.

d) *Drgania giętno-skrętne*. Zakładając  $J_\alpha = C^{\alpha\alpha} = C^{\alpha z} = k = 0$  pominięto bezwładność obrotu poprzecznego  $\alpha$  i odkształcalność postaciową  $k = 0$ . Układ równań (1) otrzymano w postaci:

$$(6) \quad \begin{bmatrix} \bar{Y} \\ \bar{\varphi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [C^{zz}] & [0] \\ [0] & [C^{\varphi\varphi}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [m] & [-S] \\ [-S] & [J_\varphi] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{Y} \\ \ddot{\varphi} \end{bmatrix} = 0.$$

W modelu tym uwzględniono sprzężenia bezwładnościowe drgań giętnych ze skrętnymi, wywołane tym, że środki mas elementów łopat nie leżą na osi łopaty.

a) *Drgania skrętne*. Łopatę śmigła potraktowano jako belkę z prostoliniową osią zginania, na której znajdują się środki mas elementów łopaty z określonymi momentami bezwładności  $J_\varphi$  i sztywnościami  $C^{\varphi\varphi}$ . Pominięto sprzężenia giętno-skrętne eliminując zginanie  $y$ ;  $C^{zz} = 0$ , bezwładność obrotu poprzecznego  $\alpha$ ;  $C^{\alpha z} = C^{\alpha\alpha} = J_\alpha = 0$  i odkształcalność postaciową  $k = 0$ . Układ równań (1) otrzymano w postaci:

$$(7) \quad [\bar{\varphi}] + [C^{\varphi\varphi}] [J_\alpha] [\ddot{\varphi}] = 0.$$

Jest to najprostszy model stosowany wyłącznie do określenia postaci skrętnych i traktowany jako pierwsze przybliżenie.

f) *Drgania giętne*. W pierwszym przybliżeniu częstości i postaci drgań giętnych obliczono przy założeniu braku sprzężeń skrętno-giętnych oraz pominięciu sztywności i bezwładności skrętnej  $J_\varphi = S = C^{\varphi\varphi} = 0$ , bezwładności obrotu poprzecznego  $J_\alpha = C^{\alpha z} = C^{\alpha\alpha} = 0$  i odkształcalności postaciowej  $k = 0$ . Konsekwencją poczynionych założeń jest przyjęcie modelu łopaty w postaci prostoliniowej belki zmodelowanej układem jedynastu mas dyskretnych. Układ równań (1) otrzymano w postaci:

$$(8) \quad [\bar{Y}] + [C^{zz}] [m] [\ddot{Y}] = 0.$$

Przyjmując  $\bar{y}_i = y_i \sin \omega t$ , gdzie  $y_i$  jest amplitudą ugięcia  $i$ -tej masy oraz po wprowadzeniu do układu równań (8) i przekształceniu, otrzymano równanie przedstawione w zapisie macierzowym

$$(9) \quad \mathbf{Y} = \omega^2 \mathbf{C} \mathbf{M} \mathbf{Y},$$

gdzie  $\mathbf{Y}$  — macierz kolumnowa amplitud ugięć,  $\mathbf{C}$  — symetryczna macierz współczynników wpływowych  $C^{zz}$ ,  $\mathbf{M} = [m]$  — przekątna macierz mas skupionych.

Stosując podstawienie

$$(10) \quad \mathbf{Y} = \mathbf{M}^{-1/2} \boldsymbol{\eta},$$

układ równań (9) sprowadzono do postaci

$$(11) \quad (\mathbf{M}^{1/2} \mathbf{C} \mathbf{M}^{-1/2} - \lambda \mathbf{I}) \boldsymbol{\eta} = 0,$$

gdzie  $\lambda = 1/\omega^2$ ,  $\mathbf{I}$  — macierz jednostkowa.

Zagadnienie znalezienia częstości i postaci drgań giętnych łopaty sprowadza się do obliczenia wartości własnych  $\lambda$  i wektorów własnych  $\eta$  symetrycznej macierzy  $M^{1/2}CM^{-1/2}$ . Ze związku (10) wynika, że amplituda ugięcia  $i$ -tej masy ma wartość

$$(12) \quad y_i = \frac{\eta_i}{\sqrt{m_i}}.$$

Analogicznie można przedstawić przebieg rozwiązań poprzednich przypadków. Wszystkie powyższe przypadki rozwiązano numerycznie na elektronowej maszynie GIER według programów własnych w języku GIER-ALGOL IV.

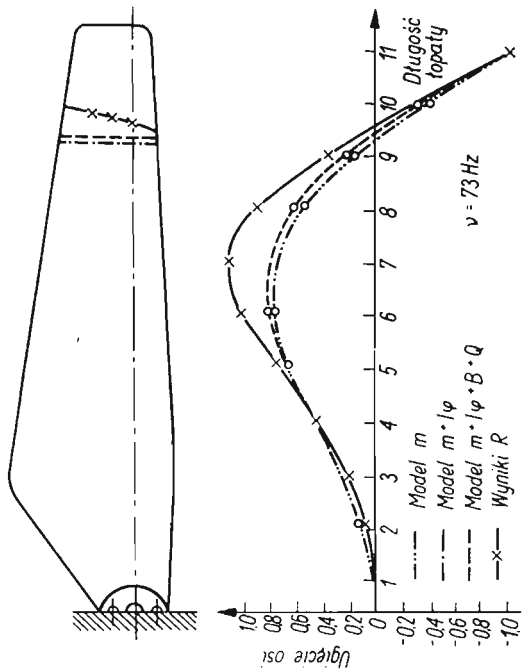
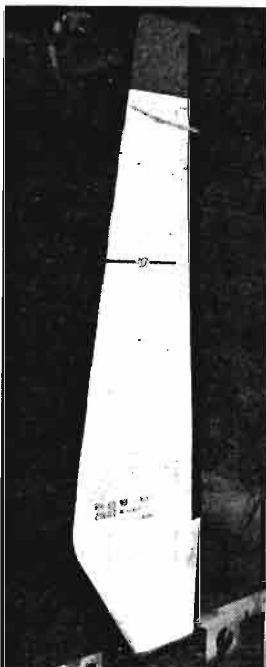
Wyznaczono 9 kolejnych postaci drgań giętno-skrętnych dla przypadków a) i d), 5 kolejnych postaci drgań giętnych dla przypadków b), c) i f) oraz 4 kolejne postacie drgań skrętnych dla przypadku e). Wyniki doświadczalne i obliczenia numeryczne przedstawiono w tablicy 1 oraz na sześciu wykresach i fotografiach postaci drgań własnych (rys. 6-11).

Tablica 1

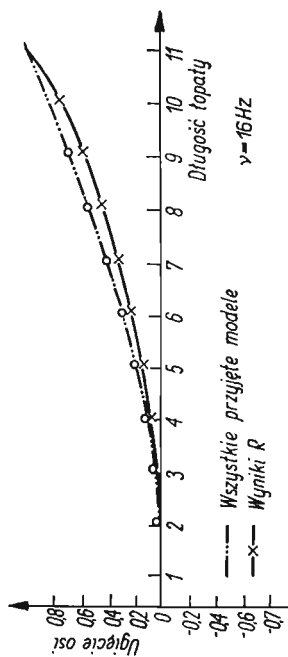
Model drgań łopaty śmigła		Częstości drgań własnych łopaty śmigła [w Hz]								
		I-g	II-g	I-s	III-g	II-s	IV-g	III-s	V-g	IV-s
	wyniki $R$	16,1	73,0	125,0	176	255	314	365	468	546
	$m+I+B+Q$	15,7	66,4	124,9	154	255	273	392	422	520
a	$m+I+B$	16,3	71,8	125,2	169	258	305	395	471	525
b	$m+B+Q$	16,5	74,1		174		305		452	
c	$m+B$	16,6	77,0		188		348		545	
d	$m+I$	16,6	78,3	125,5	191	264	361	411	597	530
e	$I$			126,7		256		396		532
f	$m$	16,6	78,4		195		372		604	

Oznaczenia:

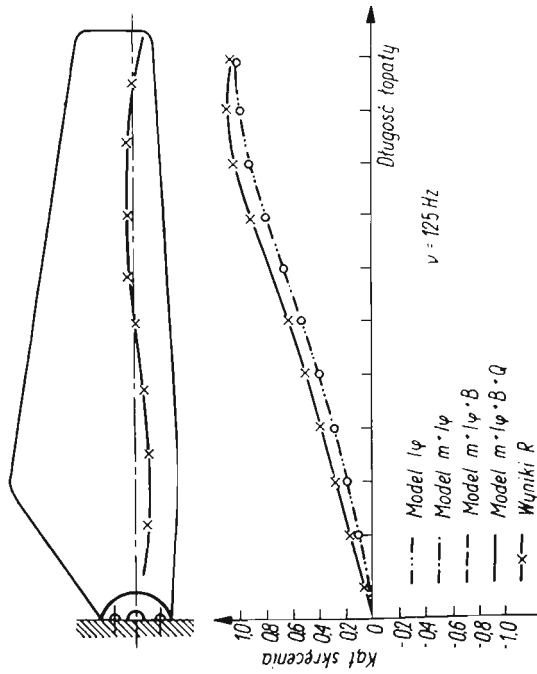
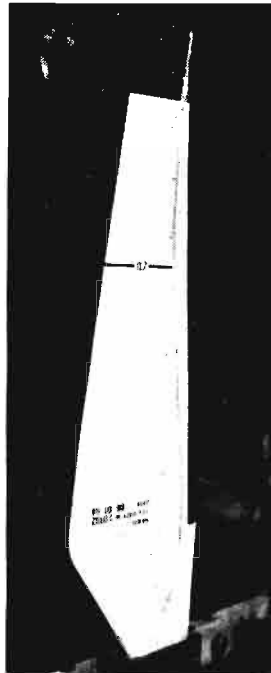
- $m$  — model dyskretny mas punktowych — drgania giętno-skrętne,
- $I$  — model dyskretny podłużnych momentów bezwładności — drgania skrętne,
- $B$  — uwzględnienie bezwładności obrotu poprzecznego,
- $Q$  — uwzględnienie odkształcalności postaciowej,
- $m+I+B+Q$  — model dyskretny parametrów dynamicznych opisujący drgania giętno-skrętne z uwzględnieniem bezwładności obrotu poprzecznego i odkształcalności postaciowej,
- $R$  — wyniki otrzymane na drodze pomiarów rezonansowych.
- $g$  — postać drgań własnych giętnych,
- $s$  — postać drgań własnych skrętnych,
- $I-g$  — pierwsza postać drgań własnych giętnych łopaty śmigła,
- $II-s$  — druga postać drgań własnych skrętnych łopaty śmigła.



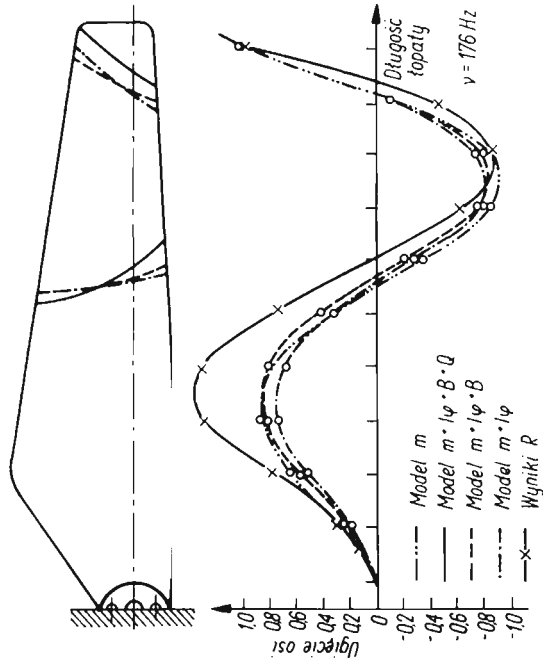
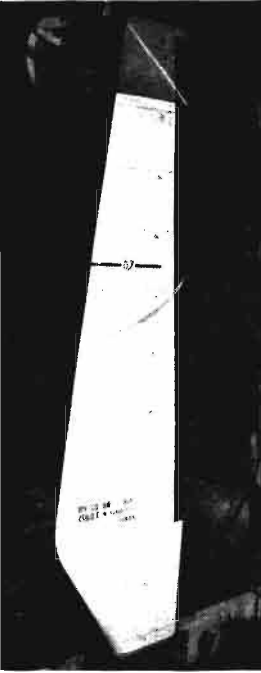
Rys. 7. Druga harmoniczna giętna II-g



Rys. 6. Pierwsza harmoniczna giętna I-g

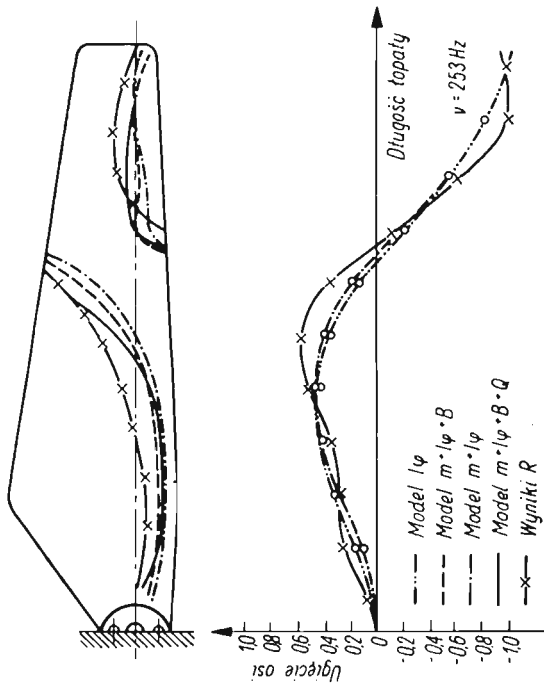
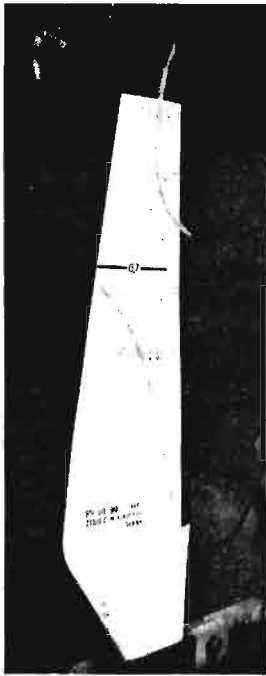


Rys. 8. Pierwsza harmoniczna skrętna I-s

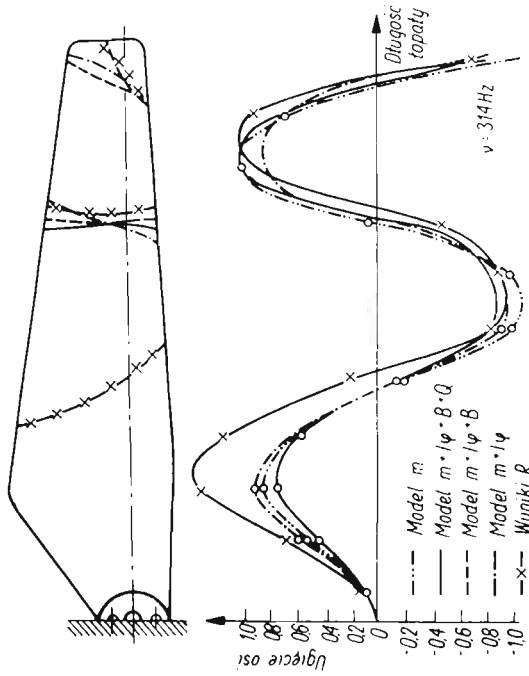
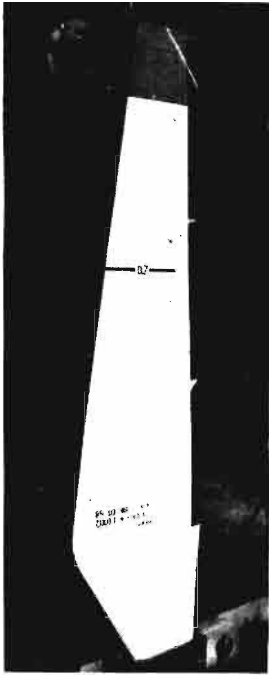


Rys. 9. Trzecia harmoniczna giętą III-g





Rys. 10. Druga harmoniczna skrętna II-s



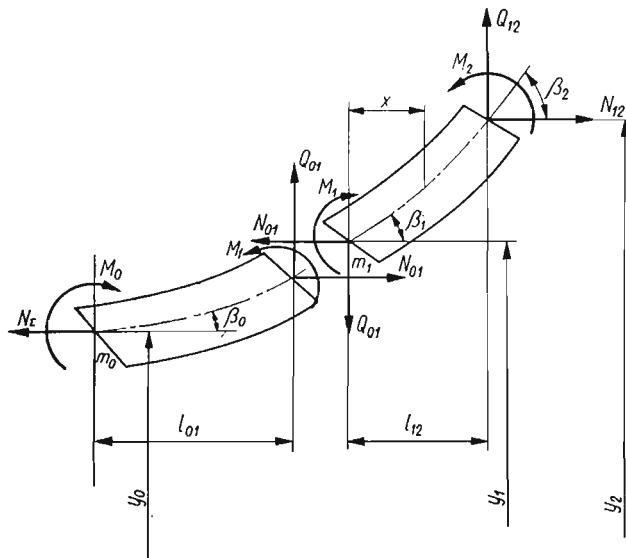
Rys. 11. Czwarta harmoniczna giętą IV-g

## 4. Wpływ obrotów śmigła na częstości i postaci drgań własnych łopaty

Obliczenia przeprowadzono według metody trzech momentów, którą opracowali w roku 1938 MORRIS i TYE [5], przedstawionej w [10]. Biorąc pod uwagę współczesne możliwości zastosowania elektronowej techniki obliczeniowej, metoda ta uważana jest za najlepszą, bowiem wykazuje dużą stateczność w procesie obliczeń. Jest stosowana do wyznaczania z dużą dokładnością częstości i postaci drgań własnych wirujących łopat rotorów nośnych śmigłowców. Metoda ta może być stosowana również przy obliczeniach innych elementów drgających konstrukcji nielotniczych.

Poniżej w skrócie podano powyższą metodę przy następujących założeniach:

- oś zginania łopaty przechodzi przez oś obrotu śmigła,
- łopaty przyjęte jako układ mas dyskretnych rozmieszczonych wzdłuż osi zginania,
- sztywności giętkie poszczególnych segmentów łopaty są stałe.



Rys. 12. Układ przyjętych przemieszczeń, sił i momentów działających na segmenty wirujące łopaty śmigła

Na rys. 12 wprowadzono odpowiednie oznaczenia:  $m_i$  — masa skupiona w  $i$ -tym przekroju,  $y_i$  — przemieszczenie  $i$ -tej masy,  $M_i$  — moment gnący,  $Q_{i,i+1}$  — siła tnąca w przekroju łopaty,  $N_{i,i+1}$  siła odśrodkowa w przekroju łopaty.

Równania momentów sił dla segmentu 0—1 względem punktu 0 i segmentu 1—2 względem punktu 1 (rys. 12) mają postać:

$$(13) \quad M_1 - M_0 - N_{0,1}(y_1 - y_0) + Q_{0,1}l_{0,1} = 0,$$

$$(14) \quad M_2 - M_1 - N_{1,2}(y_2 - y_1) + Q_{1,2}l_{1,2} = 0,$$

gdzie

$$Q_{0,1} = - \sum_{i=1}^{11} m_i \ddot{y}_i, \quad Q_{1,2} = - \sum_{i=2}^{11} m_i \ddot{y}_i.$$

Dzieląc równanie (13) przez  $N_{0,1}l_{0,1}$  i równanie (14) przez  $N_{1,2}l_{1,2}$  oraz odejmując stronami, otrzymano równanie równowagi elementu w postaci:

$$(15) \quad b_0 y_0 + a_1 y_1 + b_1 y_2 = k_0 M_0 + n_1 M_1 + k_1 M_2 + \frac{Q_{1,2}}{N_{1,2}} - \frac{Q_{0,1}}{N_{0,1}},$$

gdzie

$$b_0 = -a_0 = \frac{1}{l_{0,1}}, \quad k_0 = \frac{1}{N_{0,1}l_{0,1}}, \quad b_1 = \frac{1}{l_{1,2}},$$

$$a_1 = -b_0 - b_1, \quad k_1 = \frac{1}{N_{1,2}l_{1,2}}, \quad n_1 = -k_0 - k_1.$$

Rozpatrując małe przemieszczenia elementów łopaty, deformację elementu  $i, i+1$  opisano równaniem:

$$(16) \quad (EJ)_{i,i+1} y^{iv} - N_{i,i+1} y' = 0.$$

Zakładając, że na długości przyjętego segmentu zachodzi  $(EJ)_{i,i+1} = \text{const}$  i  $N_{i,i+1} = \text{const}$  oraz że  $EJy'' = M$ , otrzymano

$$(17) \quad \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} - \mu_i^2 M = 0,$$

gdzie

$$\mu_i^2 = \frac{N_{i,i+1}}{(EJ)_{i,i+1}}.$$

Rozwiązanie równania (16) i uwzględnienie warunków brzegowych dla elementu 1-2, tj. przy:  $x = 0$ ,  $M_x = M_1$ ;  $x = l_{1,2}$ ,  $M_x = M_2$ , otrzymano w postaci:

$$(18) \quad M_x = (EJ)_{1,2} y'' = \left( \frac{M_2}{\text{sh } \alpha_1} - \frac{M_1}{\text{th } \alpha_1} \right) \text{sh}(\mu_1 x) + M_1 \text{ch}(\mu_1 x),$$

gdzie  $\alpha_1 = \mu_1 l_{1,2}$ .

Całkując dwukrotnie równanie (18) i wprowadzając warunki brzegowe dla elementu 1-2, mianowicie

$$y|_{x=0} = y_1, \quad y'|_{x=0} = \beta_1,$$

$$y|_{x=l_{1,2}} = y_2, \quad y'|_{x=l_{1,2}} = \beta_2,$$

otrzymano następujący związek:

$$(19) \quad b_1(y_2 - y_1) = d_1 M_2 + e_1 M_1 + \beta_1,$$

lub związek równoważny

$$(20) \quad b_1(y_2 - y_1) = -e_1 M_2 - d_1 M_1 + \beta_2,$$

gdzie

$$d_1 = k_1 \left( 1 - \frac{\alpha_1}{\text{sh } \alpha_1} \right), \quad e_1 = k_1 \left( \frac{\alpha_1}{\text{th } \alpha_1} - 1 \right).$$

Analogicznie do równania (20) otrzymano równanie deformacji dla elementu 0-1 w postaci:

$$(21) \quad b_0(y_1 - y_0) = -e_0 M_1 - d_0 M_0 + \beta_1.$$

Odejmując stronami równanie (21) od równania (19), mamy

$$(22) \quad b_0 y_0 + a_1 y_1 + b_1 y_2 = d_0 M_0 + c_1 M_1 + d_1 M_2,$$

gdzie  $c_1 = e_0 + e_1$ , oraz przyrównując do siebie prawe strony równań (22) i (15) otrzymano równanie następujące:

$$(23) \quad h_0 M_0 + g_1 M_1 + h_1 M_2 = \frac{Q_{1,2}}{N_{1,2}} - \frac{Q_{0,1}}{N_{0,1}},$$

gdzie:  $h_0 = d_0 - k_0$ ,  $h_1 = d_1 - k_1$ ,  $g_1 = c_1 - n_1$ .

Przeprowadzając analogiczne rozważania dla pozostałych elementów łopaty uzyskano układ równań względem nieznanymi funkcji czasu  $y_i(t)$  i  $M_i(t)$ . Układ ten składa się z dwóch części: pierwsza zawiera równanie typu (23) oraz równanie typu (21) wypisane dla skrajnych odcinków łopaty, druga natomiast równanie typu (22).

Zakładając, że

$$y_i(t) = y_i \sin(pt); \quad M_i(t) = M_i \sin(pt),$$

możemy rozpatrzyć układ równań sprowadzić do układu równań algebraicznych względem wielkości amplitud przemieszczeń i momentów.

Układ ten rozwiązujemy metodą kolejnych przybliżeń w następujący sposób: Zakładamy w zerowym przybliżeniu wartości  $y_{10}$  szukanej postaci, przy czym niech spełniony będzie warunek  $y_{11} = 1$ . Z kolei możemy z dokładnością do stałego współczynnika  $p^2$  obliczyć występujące z prawej strony pierwszej części układu równań amplitudy sił bezwładności.

Przyjmując  $p^2 = 1$  obliczamy wartości momentów gnących  $M$  oraz kąt  $\beta_0$ . Wykorzystując te wielkości, z drugiej części układu równań obliczamy odpowiadające im wielkości deformacji  $u_i$ . Ponieważ  $y_i = p^2 u_i$ , mając wielkości  $u_i$  obliczamy kwadrat częstoty

$$p^2 = \frac{y_{11}}{u_{11}} = \frac{1}{u_{11}},$$

a następnie wartości deformacji pierwszego przybliżenia

$$(y_i)_1 = p^2 (u_i)_1.$$

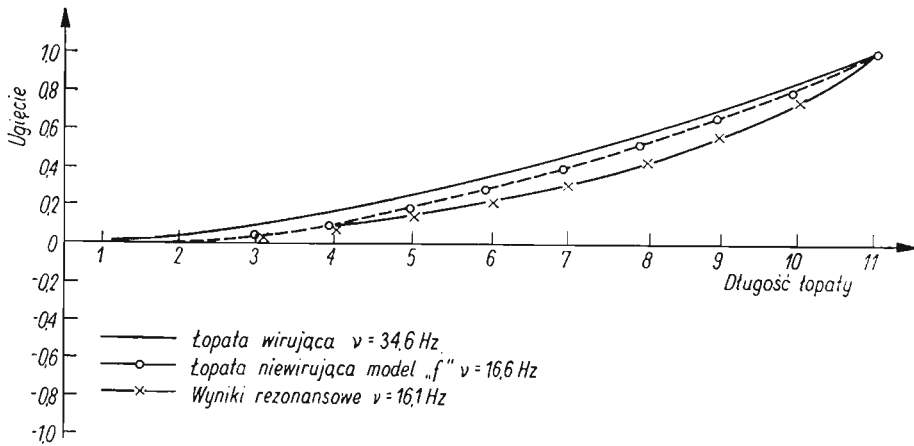
Proces ten powtarzamy do uzyskania żądanej dokładności.

Przy obliczaniu kolejnej  $i$ -tej postaci własnej, należy spełnić warunek jej ortogonalności do postaci poprzednich, mianowicie

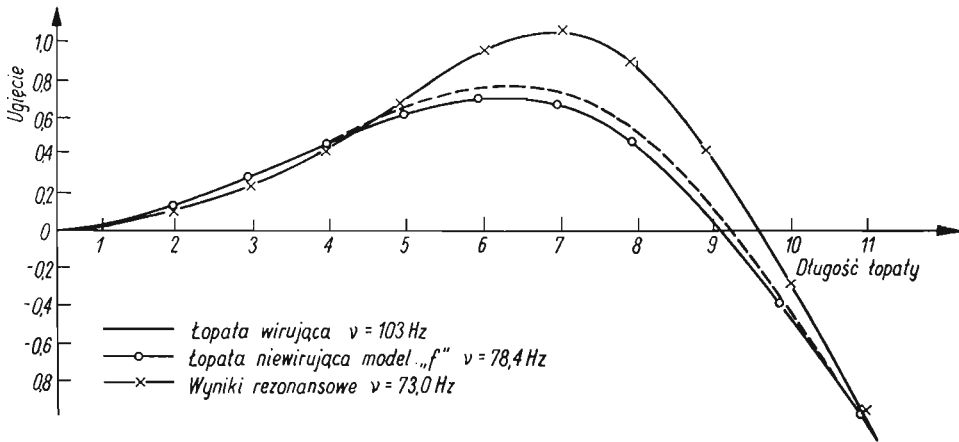
$$(24) \quad \sum_{i=0}^{11} m_i y_i^{(j)} y_i^{(m)},$$

gdzie  $y_i^{(j)}$ ,  $y_i^{(m)}$  — znalezione już postacie własne.

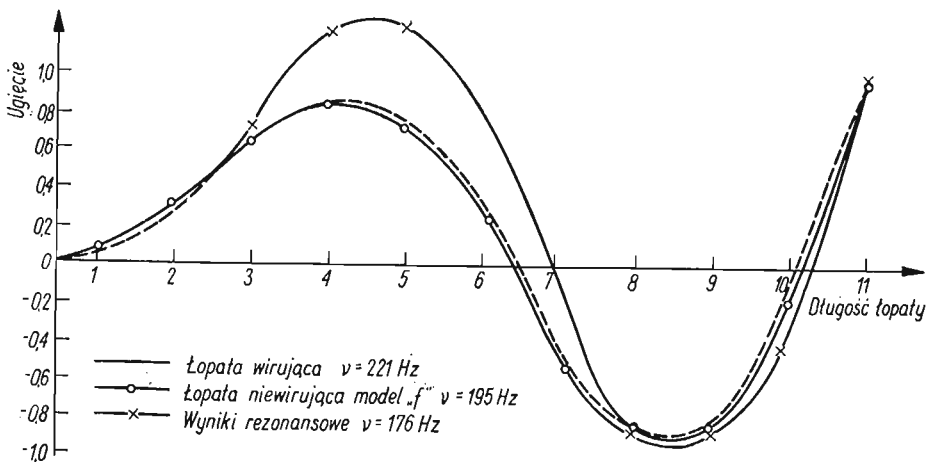
Stosując powyższe metody obliczono kolejne częstoty i postacie drgań giętych. Na rys. 13, 14, 15 częstoty i postacie drgań własnych łopaty wirującej porównano z wielkościami otrzymanymi dla łopaty sztywno utwierdzonej.



Rys. 13. Pierwsza postać giętna I-g



Rys. 14. Druga postać giętna II-g



Rys. 15. Trzecia postać giętna III-g

## 5. Wnioski

Z analizy wyników otrzymanych dla danej łopaty śmigła można wnioskować, że przyjęcie określonego modelu ma większy wpływ na częstości (tablica 1), niż na charakter postaci drgań własnych (rys. 6-11). Biorąc pod uwagę 6 pierwszych kolejnych postaci widzimy, że w zależności od postaci i przyjętego modelu, różnice między wynikami eksperymentu a obliczonymi dla częstości drgań własnych wynoszą od 0,1% do 30%, natomiast maksymalne odchylenia linii węzłów wynoszą 5% w stosunku do długości łopaty śmigła.

Najlepsze przybliżenie w zakresie obliczeń pierwszych sześciu postaci uzyskano stosując model «a» łopaty (tablica 1) dla drgań giętno-skrętnych z uwzględnieniem obrotów poprzecznych przy pominięciu odkształcalności postaciowej.

Najprostsze modele dyskretnie (e i f, tablica 1), opisujące wyłącznie drgania skrętne i drgania giętne z pominięciem sprzężeń giętno-skrętnych sztywnościowych i bezwładnościowych oraz nieuwzględniające bezwładności obrotów poprzecznych i odkształcalności postaciowej, mogą być stosowane do obliczeń I i II postaci, zarówno skrętnej jak i giętej. Odpowiednie różnice wynoszą poniżej 2% dla drgań skrętnych oraz 3% dla I-giętej i 8% dla II-giętej.

Jak wynika z rys. 13, 14, 15 obroty śmigła w niewielkim stopniu wpływają na postacie drgań giętnych natomiast mają decydujący wpływ na częstości drgań. Do obliczeń flutteru przy nieokreślonych współczynnikach sztywności można przyjąć postacie drgań własnych wyznaczonych z prób rezonansowych dla łopaty niewirującej, natomiast częstości drgań własnych wyznaczyć na podstawie [3] ze wzoru

$$(25) \quad \omega_i^2 = \omega_{gi}^2 + S_i \Omega^2,$$

gdzie  $\omega_i$  — częstość drgań  $i$ -tej postaci giętej łopaty wirującej,  $\omega_{gi}$  — częstość drgań  $i$ -tej postaci giętej łopaty niewirującej,  $\Omega$  — prędkość kątowna śmigła wirującego.

Współczynnik  $S_i$  we wzorze (25) uwzględniający wpływ obrotów śmigła ma postać:

$$(26) \quad S_i = \frac{\int_r^R m(x)x \int_r^x \frac{df_i(x)}{dx} dx dx}{\int_r^R m(x)f_i^2(x) dx},$$

gdzie  $m(x)$  — funkcja rozkładu mas wzdłuż łopaty śmigła, zaś  $f_i(x)$  — funkcja ugięcia  $i$ -tej postaci drgań giętnych.

Wyniki uzyskane w niniejszej pracy posłużyły jako dane wyjściowe do obliczeń krytycznych obrotów śmigła ogonowego śmigłowca.

## Literatura cytowana w tekście

1. R. ALEKSANDROWICZ, W. SZEMPLIŃSKA, J. MARYNIAK, *Ground resonance testing of saiplace*, Aero Revue, 4 (1959).
2. M. BOSSAK, J. PIETRUCHA, W. POTKAŃSKI, *Metodyka prostych rezonansowych badań szybowców*, Prace Instytutu Lotnictwa, 49 (1972).
3. J. LIPKA, *Częstość drgań własnych wirujących łopat wirników nośnych śmigłowca*, Arch. Bud. Masz., 3, 4 (1956).

4. J. MARYNIAK, W. MIERZEJEWSKI, J. KRUTUL, *Wpływ przyjętego modelu na dokładność obliczeń częstotliwości i postaci drgań własnych łopaty śmigła ogonowego śmigłowca*, VII Polsko-Czechosłowacka Konferencja Dynamiki Maszyn, Zbiór referatów, Tom 2, Gliwice 1971.
5. G. MORRIS, W. TYE, *The stressing of rotor blades*, Aircraft Eng., **10**, 112 (1938).
6. *Próby rezonansowe łopaty śmigła ogonowego śmigłowca Mi-2*, Sprawozdanie Nr 68B Katedry Mechaniki Wydziału MEiL PW, Warszawa 1960 (nie publikowane).
7. *Pomiary sztywności i geometrii mas łopaty laminatowej śmigła ogonowego Mi-2*, Sprawozdanie Katedry Mechaniki Wydz. MEiL PW, Warszawa 1970 (nie publikowane).
8. *Obliczenia częstości i postaci drgań własnych łopaty śmigła ogonowego Mi-2*, Sprawozdanie Nr 68C Katedry Mechaniki Wydz. MEiL PW, Warszawa 1970 (nie publikowane).
9. *Obliczenia częstości i postaci własnych drgań giętych wirującej łopaty śmigła ogonowego Mi-2*, Sprawozdanie Nr 69 Zakładu Mechaniki Instytutu Mechaniki Stosowanej Wydz. MEiL PW, Warszawa 1970 (nie publikowane).
10. М. Л. Миль, А. Б. Некрасов, А. С. Браверман, Л. Н. Гродко, М. А. Лейканд, *Вертолеты — колебания и динамическая прочность*, т. 2, Москва 1967.
11. С. П. Тимошенко, *Колебания в инженерном деле*, Москва 1967.

## R e z y u m e

## КОЛЕБАНИЯ ЛОПАСТЕЙ ВИНТА

В статье приведены вычисления частот и форм собственных колебаний лопастей хвостового винта вертолета и их сравнения с результатами эксперимента. Для вычислений употреблены полученные из опытов данные относительно распределения масс, инерциальных моментов и коэффициентов упругости. Лопасти винта рассматриваются как система с дискретно распределенными параметрами, причем учитываются инерция поперечных вращений и перерезывающие силы, действующие в сечении элемента лопасти.

Для принятых моделей вычислены собственные частоты и формы изгибных, крутильных и изгибно-крутильных колебаний; при этом вводятся различные дополнительные упрощающие предположения. Вычисления выполнены для девяти последовательных форм собственных колебаний лопастей винта.

Результаты вычислений для различных принятых моделей сравниваются с величинами собственных частот и форм, полученными при резонансных измерениях.

Выводы, вытекающие из вычислений, могут найти применение в определении динамических характеристик других механических систем.

## S u m m a r y

## PROPELLER BLADE VIBRATION PROBLEMS

First nine natural modes and frequencies of a helicopter tail rotor blade are calculated and compared with results of resonance tests. Experimentally determined distributions of mass, moments of inertia and stiffnesses are used as input data. The blade is divided into eleven segments and considered as a system of discrete parameters. Six mathematical models of the blade are analysed, the effects of rotational inertia of individual segments being taken into account.

Conclusions drawn from the analysis concerning the propeller blade mechanics may also be applied to determine the dynamic characteristics of other mechanical systems.

POLITECHNIKA WARSZAWSKA

*Praca została złożona w Redakcji dnia 3 stycznia 1973 r.*