

METODA ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH W MECHANICE GRUNTÓW I MECHANICE GÓROTWORU

JÓZEF JOACHIM TELEGA (GLIWICE)

Metoda elementów skończonych stanowi jeden z najintensywniej rozwijanych działów przybliżonego rozwiązywania zagadnień mechaniki. Znalazła więc również zastosowanie w mechanice gruntów i mechanice górotworu. Dlatego też wydaje się celowe przedstawienie dotychczasowych wyników zastosowania tej metody do rozwiązywania problemów stawianych przez te dyscypliny.

W pracy RADHAKRISHNANA i REESE'A [120] przedstawiono rozwój interesującej nas problematyki zasadniczo do roku 1970, przy czym autorzy ograniczyli się tylko do literatury anglosaskiej i japońskiej. Nasza praca stanowi więc kontynuację i uzupełnienie pracy [120].

Pracę podzielono na cztery punkty. W punkcie pierwszym przedstawiamy ogólne wyniki zastosowania metody elementów skończonych do rozwiązywania zagadnień mechaniki ośrodków ciągłych. Wydaje się, iż zaprezentowane w tym punkcie prace mogłyby znaleźć zastosowanie w mechanice gruntów i mechanice górotworu.

Zastosowanie metody elementów skończonych do mechaniki gruntów rozpatrujemy w punkcie drugim.

Punkt trzeci poświęcony jest mechanice górotworu, natomiast w punkcie ostatnim podajemy kilka uwag końcowych.

1. Zagadnienia ogólne

Metoda elementów skończonych doczekała się już interesujących opracowań monograficznych [108, 149]. Pierwsza z nich ma charakter raczej matematyczny, natomiast druga — inżynierski (por. [8, 80, 136]). W pracach przeglądowych [148, 153] przedstawiono historię metody elementów skończonych, jej istotę oraz możliwości zastosowania do zagadnień mechaniki ciała odkształcalnego (por. [83, 163]). Popularyzatorskie, a przy tym interesujące ujęcie metody elementów skończonych zaproponował KISIEL [84a]. Omówił on również wady i zalety tej metody. Jako wady wymienia następujące fakty: 1) jest to metoda numeryczna, a nie analityczna, 2) z podziałem na elementy skończone nie można iść zbyt daleko, 3) im bardziej złożony problem, tym pamięć maszyny musi być większa.

Proste wprowadzenie do metody elementów skończonych znaleźć również można w pracach PAULSENA [114, 115, 116].

W pracach [6, 7] rozważono teorię metody elementów skończonych i zagadnienie zbieżności, przy czym autor wychodzi z twierdzenia o minimum energii potencjalnej układu (metoda przemieszczeń).

WUNDERLICH [141] jako punkt wyjścia przyjmuje zasadę wariacyjną Reissnera (metoda mieszana). Wówczas naprężenia i przemieszczenia są zmiennymi niezależnymi danego zadania, tzn. traktujemy te wielkości r ó w n o c z e ś n i e jako poszukiwane niewiadome (w metodzie przemieszczeń niewiadomymi są tylko przemieszczenia).

Teorię metody elementów skończonych rozważono także w pracy [1], przy czym autor wychodzi z ogólnych zasad mechaniki ciała odkształcalnego.

Zwróćmy uwagę na fakt, iż jeśli jako punkt wyjścia przyjmiemy twierdzenie o minimum energii dopełniającej, wówczas niewiadomymi zadania są naprężenia (metoda sił).

HODGE [70] eksplikuje metodę elementów skończonych korzystając z zasady prac przygotowanych. Takie podejście jest ogólniejsze od sposobów poprzednich, tzn. metody przemieszczeń, sił, bądź mieszanej, gdyż nie zależy od fizycznych własności materiału.

W pracy [122b] wykazano, że metodę elementów skończonych można traktować jako przypadek szczególny tzw. metody reziduw wagowych, z którym to problemem mamy do czynienia przy przybliżonym rozwiązywaniu zagadnień brzegowych.

Podobieństwa i różnice między metodą elementów skończonych a metodą różnic skończonych omówiono w artykułach [40, 41, 43, 135, 148].

Związki pomiędzy metodą Bubnowa-Galerkina a metodą elementów skończonych rozważono w pracach [74, 162].

Tensorową interpretację przemieszczeniowej metody elementów skończonych przedstawiono w [82]. MORIN [104] wykazał, że wykorzystanie zapisu tensorowego pozwala zastosować bardzo ekonomiczną metodę iteracyjną dla rozwiązywania zadań nieliniowych.

Ścisłe matematyczne podejście do metody elementów skończonych zastosowano w artykułach [13, 13a, 32, 33, 58, 64, 95, 103, 147, 151, 152]. Takie podejście wymaga użycia aparatu analizy funkcjonalnej (np. przestrzeni Sobolewa).

Bardziej praktyczne rozważania przeprowadzono w [91], gdzie zastosowano metodę Bubnowa-Galerkina (szczególny przypadek metody reziduw wagowych), w powiązaniu z metodą elementów skończonych do układu liniowych równań różniczkowych o pochodnych cząstkowych (por. [39]). Przypadkiem szczególnym tych równań są równania pola opisujące przepływ gazów lub cieczy (por. [9, 46, 73, 90, 123, 130, 134]).

Zagadnienia związane z doбором elementów skończonych i funkcji aproksymujących przedstawiono w pracach [12, 22, 25, 47, 51, 54, 85, 86, 109, 146, 158, 165].

Wzory na obliczanie sił węzłowych podano w [107, 113].

Formułując dane zadanie w terminach metody elementów skończonych należy uwzględnić sztywny ruch elementu. Problem ten rozważono w pracach [62, 96, 149].

Problematykę związaną z rozwiązywaniem na maszynach matematycznych równań, które otrzymuje się przy stosowaniu metody elementów skończonych omówiono w [10, 27, 28, 42, 59, 60, 65, 77, 89, 119, 122, 126].

Okazuje się, iż przemieszczeniowej metodzie elementów skończonych odpowiada analogon elektryczny wynikający z uogólnionego prawa Ohma [88]. Pozwala to na przejście od rozważań mechanicznych do rozważań elektrycznych (por. [3]).

Przykłady zastosowania metody elementów skończonych do ośrodków opisywanych przez bardziej skomplikowane równania konstytutywne (np. materiałów nieliniowo-lepkosprężystych) podano w pracach [11, 19, 108, 110, 111, 121, 127, 128, 132, 166].

W pracach [13b, 112] przedstawiono uogólnienie metody elementów skończonych na sprężyste ośrodki mikropolarne.

HART i COLLINS [68] rozważyli układ poddany obciążeniom losowym. Po dyskretyzacji zagadnienia macierz otrzymanego układu równań oraz wyrazy wolne autorzy rozpatrują jako funkcje pewnych zmiennych losowych, które w ogólności są skorelowane.

Na tym kończymy przegląd ogólnej problematyki związanej z metodą elementów skończonych¹⁾. Zdajemy sobie sprawę z faktu, iż przegląd ten nie jest wyczerpujący. Ale jest on w zupełności wystarczający dla naszych celów.

2. Mechanika gruntów

2.1. Ogólne problemy związane z zastosowaniem metody elementów skończonych w mechanice gruntów przedstawiono w pracach [53, 57, 84, 94, 99, 133]. EISENSTEIN [53] twierdzi, iż główną przeszkodą w zastosowaniu tej metody jest postać równań konstytutywnych. Mianowicie związki między naprężeniami i odkształceniami w gruntach zależą od dużej liczby czynników, a ponadto pierwotny stan naprężenia w gruntach jest przede wszystkim wynikiem procesów geologicznych. Sądzimy, że trudność pierwsza objawia się w tym, iż do rozwiązywania konkretnych problemów potrzebna jest większa pamięć maszyny matematycznej. Częściowo można tego uniknąć stosując większe elementy skończone, ale za to bardziej dokładną aproksymację, np. za pomocą wielomianów Hermite'a. Ponadto nie należy zapominać o tym, iż do użytku oddawane będą maszyny o coraz większych możliwościach. Przeglądając prace amerykańskie związane z zastosowaniem programowania matematycznego do zagadnień optymalizacji konstrukcji (por. [128]) wysunęliśmy wniosek, iż pod koniec lat siedemdziesiątych oddane zostaną do użytku maszyny matematyczne, które pozwolą rozwiązywać — oczywiście numerycznie — nawet bardzo skomplikowane zadania optymalizacyjne. Wydaje się, iż podobne stwierdzenie można odnieść do zagadnień mechaniki gruntów i górotworu.

2.2. Przedstawimy obecnie zastosowanie metody elementów skończonych do zagadnień równowagi podłoża.

MILOVIĆ [100] (por. także [84, 97, 98]) przedstawił numeryczne rozwiązanie zadania o równowadze statycznej, sprężystej, jednorodnej (izotropowej lub anizotropowej) warstwy o stałej grubości H . Warstwa ta, w układzie współrzędnych walcowych, zajmuje obszar: $0 \leq z \leq H$, $0 \leq r \leq \infty$. Poddana ona jest obciążeniu równomiernie rozłożonemu, określonemu w obszarze $z = 0$, $0 \leq r \leq D/2$, przyłożonemu do górnej płaszczyzny warstwy. Płaszczyzna dolna jest sztywnie utwierdzona. Zbudowano macierz sztywności oraz program obliczeń, który zrealizowano na maszynie «IBM 360-40». Wyniki obliczeń, dla różnych wartości parametrów, przedstawiono w postaci wykresów i tablic. W szczegól-

¹⁾ Ścisłejsze byłoby określenie «metody elementów skończonych», gdyż istnieje metoda przemieszczeń, mieszana, itd.

ności podano zależność naprężeń: promieniowego σ_r i normalnego σ_z wzdłuż osi symetrii, od różnych wartości parametru H/D . Parametr ten przyjmował wartości: 1,00, 2,00, 3,00, ∞ . Obliczenia przeprowadzono dla dwu wartości współczynnika Poissona μ : 0,23, 0,30. Parametr $n = E_v/E_h$, charakteryzujący anizotropię materiału, przyjmował wartości: 0,25, 0,50, 1,00, 2,00; gdzie E_v , E_h oznaczają odpowiednio moduł sprężystości w kierunku pionowym i poziomym.

Podano wykres przemieszczeń pionowych $w(0,0)$ [punkt (0,0) oznacza początek układu współrzędnych] w zależności od parametru H/D , dla $\mu = 0,15, 0,25, 0,30, 0,40, 0,45$. Obliczenia wykazały, że anizotropia wpływa na znaczny wzrost naprężeń σ_r w utwierdzonej płaszczyźnie $z = H$.

W pracy [63] rozwiązano zadanie o płaskim stanie odkształcenia w sprężystej warstwie, spoczywającej na nieodkształcalnym podłożu. Przemieszczenia w płaszczyźnie kontaktu są równe zeru. W pierwszej części pracy, przy pomocy szeregów Fouriera, rozwiązano zadanie o przemieszczeniach. Natomiast w drugiej części pracy, wykorzystując metodę elementów skończonych, wyznaczono naprężenia w warstwie. Wyniki obliczeń, podane w postaci tablic i wykresów, przedstawiają zależność poszukiwanych wielkości od współczynnika Poissona, grubości warstwy i wymiarów obszaru, na który działa obciążenie.

W pracy [102] rozważono następujące zadanie: nieodkształcalne pasmo poddane jest działaniu siły nachylonej pod pewnym kątem, pasmo to spoczywa na sprężystej warstwie, która z kolei leży na nieodkształcalnym podłożu (czyli ośrodek trójwarstwowy). Sprężystą warstwę zamieniono przez prostokątne i trójkątne elementy skończone. Zbudowano macierz sztywności. Otrzymano przybliżone wzory na określenie naprężeń kontaktowych i przemieszczeń pasma w zależności od grubości warstwy sprężystej i kąta nachylenia siły działającej na pasmo.

Zagadnienie rozkładu naprężeń i odkształceń w gruncie (będącym półprzestrzenią) poddanym działaniu nieruchomego lub ruchomego obciążenia w postaci kołowego stempla rozpatrzono w pracy [117]. Stempel może być sztywny lub odkształcalny. Rozważono zarówno liniowo-sprężysty, jak i nieliniowo-sprężysty materiał półprzestrzeni. W tym drugim przypadku zależność między naprężeniami i odkształceniami przyjęto na podstawie wyników badań doświadczalnych. Otrzymano pewną rozbieżność wyników numerycznych w porównaniu z laboratoryjnymi rezultatami pomiaru naprężeń. Różnice te, zdaniem autorów, spowodowane są błędami, jakimi obarczone są doświadczenia. Stwierdzono ponadto, iż korzystając z metody elementów skończonych, można stosunkowo łatwo uwzględnić nieliniowość zależności naprężenie-odkształcenie, jak i złożone warunki brzegowe.

DESAI [44] również rozważył nieliniową zależność pomiędzy naprężeniami a odkształceniami. Konstruuje on rozwiązanie przybliżone stosując metodę elementów skończonych w powiązaniu z funkcjami typu *spline* (por. [93a, 153a, 159]).

Obliczenia naprężeń w lessowym gruncie, przy zastosowaniu metody będącej kombinacją metody różnic skończonych i elementów skończonych, dokonano w [164].

THOMAS i ARMAN [129] zbadali stan naprężenia i odkształcenia w podłożu torfowym. Dane doświadczalne porównano z wynikami obliczeń otrzymanych przy zastosowaniu metody elementów skończonych i uwzględnieniu geometrycznej nieliniowości. Obliczenia numeryczne przeprowadzono metodą przyrostów przy linearyzacji zadania, tzn. na każdym

etapie zwiększa się obciążenie o pewną możliwie małą wartość. Istnieje różnica pomiędzy rozwiązaniem tradycyjnym, otrzymanym na bazie wzoru Boussinesqa, a rozwiązaniem podanym w pracy.

W pracy [72] HÖEG rozważył zachowanie się sprężysto-plastycznego ośrodka gliniastego (por. [37]). Stosuje on równania klasycznej teorii plastycznego płynięcia przy uwzględnieniu «rozmiękczenia» (*softening*). Wykorzystując metodę elementów skończonych autor określił krzywą przedstawiającą zależność między naprężeniami a odkształceniami oraz wyznaczył nośność graniczną kołowego podłoża. W dyskusji [87a] oponenti krytykują przyjęty model. Twierdzą oni, iż model powinien uwzględniać zmianę objętości w czasie plastycznego płynięcia materiału, czego jednakże klasyczne teorie plastyczności nie opisują.

Zagadnienia związane z oddziaływaniem podłoże–układ (np. budynek) przedstawiono w pracach [4, 5, 23, 34, 42a, 67, 81, 101, 118, 122a, 160].

2.3. Możliwości zastosowania metody elementów skończonych do analizy nawierzchni dróg rozpatrzono w pracach [2, 14, 131, 137, 139].

AGARWAL i HUDSON [2] podali wyniki doświadczeń laboratoryjnych przeprowadzonych na płytach aluminiowych spoczywających na specjalnie przygotowanym gruncie gliniastym, zawartym w skrzynce, celem wywołania przestrzennego stanu naprężenia. Przedstawiono związek między osiadaniem podłoża a naprężeniami w płycie. Wyniki badań porównano z rezultatami obliczeń płyt (metodą elementów skończonych) przy założeniu hipotezy Winklera o podłożu.

W pracy [131] rozpatrzono wpływ zmian wilgotności oraz temperatury gruntu i warstw nawierzchni drogowej na tworzenie się podłużnych szczelin w nawierzchni. Podano wartości naprężeń rozciągających w nawierzchni asfaltobetonowej, spowodowanych tymi zmianami. Wartości te obliczono na maszynie matematycznej, po uprzednim zastosowaniu metody elementów skończonych.

WANG, SARGIOUS, CHEUNG [139] określili wielkość normalnych naprężeń kontaktowych pomiędzy prostokątną płytą a jednorodną półprzestrzenią. Ponadto określono przemieszczenia pionowe płyty wywołane działaniem obciążenia równomiernie rozłożonego na kole.

W pracy [137] podano porównanie rezultatów badań doświadczalnych z wynikami obliczeń. Mianowicie przeprowadzono badania nawierzchni drogowej składającej się z warstwy gruntu piaszczysto-gliniastego wzmocnionej 3 lub 6-procentową zawartością cementu, poddanej działaniu obciążeń powtarzalnych. Stwierdzono, że zmierzone naprężenia i przemieszczenia zagadzają się z wynikami obliczeń otrzymanych na podstawie rozwiązań teorii sprężystości dla warstwowej półprzestrzeni oraz z rezultatami obliczeń otrzymanych przy zastosowaniu metody elementów skończonych.

Teoretyczne, oparte na metodzie elementów skończonych, jak i doświadczalne badania nawierzchni poddanej obciążeniu impulsowemu przeprowadził BARKSDALE [14].

2.4. Zastosowanie metody elementów skończonych do obliczania zapór przedstawiono w pracach [29, 53, 133a, 154, 155, 161, 167, 168], natomiast tuneli — [38]. Podkreślono konieczność uwzględniania odkształcalności podłoża [133a, 167], jak i efektów reologicznych [161].

2.5. W pracach [30, 43a, 55, 61, 76, 123, 142, 143, 144] rozpatrzono zastosowanie metody elementów skończonych do zagadnień konsolidacji, czyli przyływu płynu przez ośrodki porowate. Interesujące wydają się ujęcia wariacyjne, które pozwalają na stosunkowo łatwe sformułowanie problemu konsolidacji w terminach metody elementów skończonych. W cyklu artykułów [142, 143, 144] sformułowane zostały zasady wariacyjne — dla trójwymiarowej konsolidacji — przy następujących założeniach: 1) grunt (szkielet) jest niejednorodny, anizotropowy i zachowuje się sprężyste, 2) pory wypełnione są nieściśliwą cieczą (wodą), 3) deformacja szkieletu nie zależy od ciśnienia wody, lecz wyłącznie od naprężeń efektywnych, 4) przepływ wody odbywa się zgodnie z prawem Darcy'ego. Podano szczegółowo sformułowanie w terminach metody elementów skończonych (czyli rozwiązanie przybliżone). Rozważania ogólne zilustrowano na kilku przykładach (konsolidacja jednowymiarowa, osiowo-symetryczna).

Korzystając z dynamicznej teorii konsolidacji Biota, w pracy [61] przedstawiono wariacyjne sformułowanie problemu. Następnie dokonano dyskretyzacji zagadnienia stosując metodę elementów skończonych. Podano przykłady obliczeń numerycznych dla półprzestrzeni.

3. Mechanika górotworu

3.1. Ogólną problematykę związaną z zastosowaniem metody elementów skończonych do mechaniki górotworu przedstawiono w pracach [31, 79, 79a, 79b, 94a, 125, 125a, 133, 150].

MARTINETTI i RIBACCHI [94a] przedstawili zagadnienia, które rozważano na II Kongresie Międzynarodowego Towarzystwa Mechaniki Górotworu. Kongres ten odbył się w dniach 21—26 września 1970 roku w Belgradzie. Otóż na kongresie tym omówiono również metody obliczeń w mechanice górotworu. Podkreślono, iż należy więcej uwagi poświęcić metodzie elementów skończonych.

STEPHANSSON [125a] omawia treść ośmiu prac doktorskich zrealizowanych na Uniwersytecie Uppsala w Szwecji. W jednej z nich przedstawiono możliwości zastosowania metody elementów skończonych do analizy procesów tektonicznych. Inna praca omawia zastosowanie tej metody do zagadnień stabilności wyrobisk.

W pracy [150] przedstawiono model ośrodka blokowo-warstwowego, a więc takiego z jakim mamy do czynienia w górotworze szczelinowatym. Rozważono możliwości stosowania metody elementów skończonych.

W monografii JAEGERA i COOKA [79a], poświęconej podstawom mechaniki górotworu, rozpatrzono również metodę elementów skończonych (rozdz. 10). Podkreślono zalety tej metody wyrażające się w: 1) możliwości rozpatrywania układów o nieregularnych brzegach, 2) tym, że siły masowe i powierzchniowe mogą być zmienne, 3) fakcie, że materiał może posiadać własności reologiczne lub plastyczne, 4) możliwości uwzględnienia tarcia między blokami skalnymi (na powierzchniach uskoku).

W pracy [31] (por. [79b]) podano sformułowanie macierzy sztywności dla ośrodka liniowo-sprężystego. Podano ogólny schemat programu rozwiązującego podstawowy układ równań liniowych jaki otrzymuje się w tym przypadku.

W pracy [79b] autorzy niesłusznie twierdzą, iż metoda elementów skończonych jest szczególnym przypadkiem metody różnic skończonych. Jest akurat na odwrót: metoda różnic skończonych jest szczególnym przypadkiem metody elementów skończonych.

3.2. Rozpatrzmy obecnie prace poświęcone zagadnieniom określania naprężeń i odkształceń wokół wyrobisk górniczych, otworów strzelniczych i tuneli.

BARLA [15] rozwiązał statyczne zadanie o koncentracji naprężeń wokół pojedynczego wyrobiska w masywie gruntu. Wyrobisko znajduje się na skończonej odległości od powierzchni swobodnej. Przyjęto model ciała liniowo-sprężystego, izotropowego oraz płaski stan odkształcenia. Przedstawiono rozwiązania numeryczne dla wyrobisk o kształcie: okręgu, elipsy, kwadratu, prostokąta i prostokąta o jednym boku w postaci łuku okręgu. Tenże autor [16] (por. [75, 79]) przedstawił rozwiązania numeryczne dla koncentracji naprężeń wokół wyrobiska znajdującego się w nieograniczonym sprężystym ośrodku warstwowym.

DUNS i BUTTERFIELD [49] (por. [48, 50]), stosując metodę elementów skończonych, przedstawili rozwiązanie zadania o oddziaływaniu fal harmonicznym, rozchodzących się w gruncie, z nieskończonej długą powłoką walcową o skończonym promieniu. Powłoka ta znajduje się w gruncie na skończonej głębokości. Przyjęto, że otaczający powłokę grunt jest ośrodkiem liniowo-sprężystym. Stosując metodę elementów skończonych podano przejście od równań różniczkowych do równań algebraicznych. Podano przykład liczbowy.

W pracy [21] przedstawiono zastosowanie metody elementów skończonych do obliczania rozkładu naprężeń w ośrodku sprężystym osłabionym kilkoma równoległymi wyrobiskami.

WINKEL, GERSTLE, KO [140] rozpatrzyli zagadnienie obliczania naprężeń i odkształceń wokół wyrobisk w ośrodkach modelujących sole. Przyjęto, iż ośrodek taki jest sprężysto-lepkoplastyczny. Przy zastosowaniu metody elementów skończonych podano algorytm rozwiązywania zadań brzegowych dla płaskiego stanu odkształcenia.

Analizę podziemnych wyrobisk, przy zastosowaniu metody elementów skończonych i kryterium równowagi granicznej Coulomba przedstawiono w [138] (por. [57]).

HEUZÉ, GOODMAN, BORNSTEIN [69] (por. [35]) analizują możliwości uwzględnienia szczelinowości skał przy określaniu naprężeń wokół otworów wiertniczych. Rozważono dwie metody: 1) «zaburzenia szczeliny» (*joint perturbation*) i 2) «zerowego rozciągania» (*no-tension*). Metoda «zerowego rozciągania» uwzględnia fakt, iż praktycznie rzecz biorąc, wytrzymałość skał szczelinowatych na rozciąganie jest zerowa. Podano istotę tych dwu metod oraz wyniki obliczeń numerycznych (por. [78a]). Obydwie te metody dają wyniki podobne, natomiast istnieje znaczna rozbieżność w porównaniu z wynikami otrzymanymi przy założeniu, że ośrodek jest liniowo-sprężysty.

W pracy [18] przedstawiono wyniki obliczeń naprężeń i odkształceń wokół tunelu kołowego o średnicy 8 m przeprowadzonego na głębokości 500 m (por. [87]). Przyjęto płaski stan odkształcenia. Rozważania przeprowadzono dla dwu przypadków.

W przypadku pierwszym traktuje się ośrodek jako kontinuum sprężyste, natomiast w drugim jako szczelinowaty. W tym drugim przypadku autorzy mówią o «pseudoplastycznym dyskontinuum».

Dla ośrodka szczelinowatego przyjęto, iż szczeliny tworzą jedną rodzinę, określoną przez równoległe płaszczyzny. Podano wyniki obliczeń dla następujących wartości kąta nachylenia szczelin do poziomu: 30° , 45° , 60° , 90° . Wyniki w obydwu przypadkach, tzn. dla kontinuum w porównaniu z «diskontinuum», znacznie się różnią. Omówiono także problem stabilności wyrobisk (por. [124, 145]).

3.3. Zastosowanie metody elementów skończonych do obliczania filarów przedstawiono w pracach [21a, 52].

EDWARDS [52] badał stan naprężenia i odkształcenia filarów w warunkach laboratoryjnych jak i rzeczywistych. Wyniki numeryczne otrzymano stosując metodę elementów skończonych. Badania laboratoryjne przeprowadzono metodą polaryzacyjno-optyczną. Jeśli eksploatacja prowadzona jest w określonych warunkach to wyniki zarówno numeryczne jak i laboratoryjne wykazują obecność znacznej koncentracji naprężeń w filarach. Badano także wpływ podsadzki oraz sposobów wybierania filarów na panujący w nich stan naprężenia.

Przeprowadzono pomiary naprężeń i odkształceń w warunkach naturalnych. Czas trwania pomiarów wynosił półtora roku. Stwierdzono rozbieżność pomiędzy wynikami laboratoryjnymi a wynikami otrzymanymi w warunkach naturalnych.

3.4. W pracach [24, 26, 45, 92, 106] przedstawiono zastosowanie metody elementów skończonych do analizy próbek cylindrycznych. I tak celem pracy [106] było otrzymanie informacji odnośnie wpływu tarcia na końcach próbki poddanej ścisłaniu oraz wpływu współczynnika Poissona na tworzenie się szczelin w materiałach skalnych (por. [24, 26, 45]).

LUCKS, CHRISTIAN, BRANDOW, HOËG [92] badali na specjalnym urządzeniu, próbki cylindryczne poddane ścinaniu i ścisłaniu. Obciążenie jest tak przyłożone, iż otrzymuje się niesymetryczny rozkład naprężeń względnie osi próbki. Analizę numeryczną trójwymiarowego stanu naprężenia przeprowadzono stosując metodę elementów skończonych. Podano wykresy rozkładu naprężeń dla różnych przekrojów próbki.

3.5. GOLDIN i TROICKI [156] określili stan naprężenia i odkształcenia u podstawy i krawędzi bocznych skalnego kanionu.

W pracy [56] rozpatrzono zagadnienie obliczania podziemnych tam zaporowych zabezpieczających wyrobiska przed zatopieniem.

Możliwości zastosowania metody elementów skończonych do zagadnień kotwienia przedstawiono w pracach [36, 71].

NAIR [105] przeprowadził obliczenia przemieszczeń powierzchni na terenie objętym eksploatacją górniczą. Wyniki obliczeń osiadania niecki przedstawiono w postaci wykresów.

Wciskanie stempla betonowego w ośrodek szczelinowaty przedstawił MALINA [93]. Podano istotę sformułowania uwzględniającego warunek graniczny Mohra i wpływ tarcia między blokami skalnymi.

BARTH [17] przedstawił obliczenia kawerny, w której znajdować się będzie hala maszyn podziemnej siłowni. Obliczenia przeprowadzono stosując trójkątne elementy skończone o siatce zagęszczonej w pobliżu konturu.

Zastosowanie metody elementów skończonych do zagadnień kruszenia (drobnienia) przedstawiono w [78]. Kruszenia dokonuje się stosując materiały wybuchowe.

4. Uwagi końcowe

Wydaje się, iż w masie prac poświęconych zastosowaniu metody elementów skończonych do zagadnień mechaniki ciała stałego, problemom mechaniki gruntów i mechaniki górotworu poświęcono zbyt mało uwagi. Stan ten wynika między innymi ze złożoności problemów. Nie są nam znane artykuły, w których stosowano by metodę elementów skończonych do zagadnień tąpnięcia.

Istniejące prace z dziedziny mechaniki gruntów i mechaniki górotworu, których przeglądu dokonaliśmy, mają raczej charakter inżynierski, praktyczny. Dlatego też nie przeprowadzono w nich analizy błędów i nie rozważono zagadnienia zbieżności. Należy tutaj podkreślić, iż istnieją już teoretyczne opracowania tych zagadnień dla kontinuum materialnego (porównaj np. [108]).

Literatura cytowana w tekście

1. E. ABSI, *Méthode des éléments finis*, Ann. Inst. techn. bâtim. et trav. publics, 262, **22** (1969), 1595–1621.
2. S. L. AGARWAL, W. R. HUDSON, *Experimental verification of discrete-element solutions for pavement slabs*, Highway Res. Rec. No 329 (1971), 1–19.
3. H. ALLIK, T. J. R. HUGHES, *Finite element method for piezoelectric vibration*, Int. J. Num. Meth. Eng., **2** (1970), 151–157.
4. D. J. D'APPOLONIA, T. W. LAMBE, *Method for predicting initial settlement*, Proc. ASCE, J. Soil Mech. and Found. Div., **2**, **96** (1970), 523–544.
5. D. J. D'APPOLONIA, H. G. POULOS, C. C. LADD, *Initial settlement of structures on clay*, Proc. ASCE, J. Soil Mech. and Found. Div., **10**, **97** (1971), 1359–1377.
6. E. R. de ARANTES e OLIVEIRA, *Theoretical foundations of the finite element method*, Int. J. Solids and Structures, **4** (1968), 929–952.
7. E. R. de ARANTES e OLIVEIRA, *Completeness and convergence in the finite element method*, Técnica, No 403, **33** (1970), 190–124.
8. J. H. ARGYRIS, *Recent advances in matrix methods of structural analysis*, Pergamon Press, 1964.
9. J. H. ARGYRIS, *The impact of the digital computer on engineering sciences*, Part I, Aeronaut. J., No 709, **74** (1970), 13–41.
10. J. H. ARGYRIS, D. E. BRÖNLUND, J. R. ROY, D. W. SCHARPF, *A direct modification procedure for the displacement method*, AIAA J., **9**, **9** (1971), 1861–1864.
11. J. H. ARGYRIS, A. S. L. CHAN, *Applications of the method of finite elements in space and time*, Ing. Archiv, **4**, **41** (1972), 235–257.
12. S. ATLURI, *A new assumed stress hybrid finite element model for solid continua*, AIAA J., **8**, **9** (1971), 1647–1649.
13. I. BABUSKA, *The finite element method for elliptic equations with discontinuous coefficients*, Computing, **3**, **5** (1970), 207–213.
- 13a. I. BABUSKA, M. B. ROSENZWEIG, *A finite element scheme for domains with corners*, Num. Math., **1**, **20** (1972), 1–21.
- 13b. M. H. BALUCH, J. E. GOLDBERG, S. L. KOH, *Finite element approach to plane microelasticity*, Proc. ASCE J. Struct. Div., **9**, **98** (1972), 1957–1964.
14. R. D. BARKSDALE, *Compressive stress pulse times in flexible pavements for use in dynamic testing*, Highway Res. Rec., No 345 (1971), 32–44.
15. G. BARLA, *Stresses around a single underground opening near a traction-free surface*, Int. J. Rock Mech. and Mining Sci., **1**, **9** (1972), 103–126.

16. G. BARLA, *The distribution of stress around a single underground opening in a layered medium under gravity loading*, Int. J. Rock Mech. and Mining Sci., 1, 9 (1972), 127–154.
17. S. BARTH, *Felsmechanische Probleme beim Entwurf der Kaverne des Pumpspeicherwerkes Waldecke II*, Bautechnik, 3, 49 (1972), 73–83.
18. M. BAUDENDISTEL, H. MALINA, L. MÜLLER, *Einfluss von Diskontinuitäten auf die Spannungen und Deformationen in der Umgebung einer Tunnelröhre*, Rock Mechanics, 1, 2 (1970), 17–40.
19. Z. P. BAŽANT, *Matrix differential equation and higher — order numerical methods for problems of non-linear creep, viscoelasticity and elasto-plasticity*, Int. J. Numer. Meth. Eng., 1, 4 (1971), 11–25.
20. G. BIRKHOFF, M. H. SCHULTZ, R. S. VARGA, *Piecewise Hermite interpolation in one and two variables with applications to partial differential equations*, Num. Math., 11 (1968), 232–256.
21. J. P. BLAKELEY, *The stresses around openings in rocks*, N. Z. Eng. 4, 26 (1971), 105–110.
- 21a. W. BLAKE, *Destressing test at the Galena Mine Wallace, Idaho*. Trans. Soc. Min. Eng. AIME. 3, 252 (1972), 294–299.
22. J. M. BOISSERIE, *Generation of two- and three-dimensional finite element*, Int. J. Num. Meth. Eng., 3, 3 (1971), 327–347.
23. E. BOTEA, I. MANOLIU, *O aplicare a metodei elemente lor finite la calculul tasarilor unei constructii*, Bul. sti. Inst. constr. Bucuresti, 3, 13 (1970), 107–114.
24. B. I. BRADY, *Initiation of failure in radially end-constrained circular cylinder of brittle rock*, Int. J. Mech. and Mining Sci., 4, 8 (1971), 371–387.
25. C. A. BREBBIA, *Integration of area and volume coordinates in the finite-element method*, AIAA J., 6, 7 (1969), 1212.
26. E. T. BROWN, J. A. HUDSON, M. P. HARDY, C. F. FAIRHURST, *Controlled failure of hollow rock cylinders in uniaxial compression*, Rock Mechanics, 1, 4 (1972), 1–24.
27. P. BURTON, *The shifting roles of computers; experiments and analysis in applied mechanics*, Exp. Mech., 9, 11 (1971), 385–393.
28. G. CANTIN, *An equation solver of very large capacity*, Int. J. Num. Meth. Eng. 3, 3 (1971), 379–388.
29. A. K. CHOPRA, P. R. PERUMALSWAM, *Dynamics of earth dams with foundation interaction*, Proc. ASCE, J. Eng. Mech. Div., 2, 97 (1971), 181–191.
30. J. T. CHRISTIAN, J. W. BOEHMER, *Authors closure to discussion on the paper: „Plane strain consolidation by finite elements”*, Proc. ASCE, J. Soil Mech. and Found Div., 11, 97 (1971), 1596–1597.
31. S. CHWAŁA, L. GŁADYSZ, Z. KURCZABIŃSKI, *Możliwości wykorzystania metody elementów skończonych w mechanice górotworu*, Przegl. Górniczy, 4, 28 (1972), 133–138.
32. P. G. CIARLET, M. H. SCHULTZ, R. S. VARGA, *Numerical methods of high-order accuracy for nonlinear boundary value problems. II. Nonlinear boundary conditions*, Num. Math. 4, 11 (1968), 331–345.
33. P. G. CIARLET, P. A. RAVIART, *Interpolation de Lagrange sur des éléments finis courbes dans R^n* , C. R. Acad. Sc. Paris, 274 (21 février 1972), A640–A643.
34. G. W. CLOUGH, J. M. DUNCAN, *Finite element analyses of retaining wall behavior*, Proc. ASCE, J. Soil Mech. and Found. Div., 12, 97 (1971), 1657–1673.
35. D. F. COATES, Y. S. YU, *A note on the stress concentrations at the end of a cylindrical hole*, Int. J. Rock Mech. Min. Sciences 6, 7 (1970), 583–588.
36. D. F. COATES, Y. S. YU, *Rock anchor design mechanics*. «Mines Branch. Dep. Energy, Mines and Resour. Ottawa Res. Rept.», No R 223 (1971).
37. COMSA RADU; POPOVICI LASCAR, *Asupra analizei prin metoda elementului finit a stărilor de eforturi și deformării din masivele de pamint*, Stud. geotehn., fund. și constr. hidrotehn., 15 (1970), 299–336.
38. M. COTES et al. *Stress distribution analysis in solids by the finite element method: application to a tunnel with a semicircular cross section driven at little depth* (in French), Annales des Ponts et Chaussées, 4, 138 (1968), 211–223.
39. CRASTAN, *Eine Verallgemeinerung der Elementenmethode*, Nucl. Eng. and Des., 2, 15 (1971), 113–120.
40. J. G. A. CROLL, A. C. WALKER, *The finite difference and localized Ritz methods*, Int. J. Num. Eng. 2, 3 (1971), 155–160.
41. J. G. A. CROLL, *Boundary simulation in the localised collocation and localised Ritz methods*, Wiss. Z. Hochschule für Arch. und Bauwesen, Weimar, 2, 19 (1972), 145–150.

42. J. G. CROSE, *Bandwidth minimization of stiffness matrices*, Proc. ASCE, J. Eng. Mech. Div. 1, 97 (1971), 163–167.
- 42a. R. E. DAVIS, A. E. BACHER, *Concrete arch culvert behavior — phase 2*, Proc. ASCE, J. Struct. Div., 11, 98 (1972), 2329–2350.
43. F. H. DEIST, C. DIMITRIOU, *The finite element method*, S. Afric. Mech. Engr., 5, 19 (1969), 124–126.
- 43a. CH. S. DESAI, *Seepage analysis of earth banks under drawdown*, Proc. ASCE, J. Soil Mech. Found. Div., 11, 98 (1972), 1143–1162.
44. CH. S. DESAI, *Nonlinear analyses using spline functions*, Proc. ASCE, J. Soil Mech. and Found., 10, 97 (1971), 1461–1480. Closure to discussion: 9, 98 (1972), 967–971.
45. C. DINIS da GAMA, *Análise da compressão uniaxial de provetes de rocha pelo método dos elementos finitos*, Técnica, 403, 33 (1970), 143–155.
46. L. J. DOCTORS, *An application of the finite element technique to boundary value problems of potential flow*, Int. J. Num. Meth. Eng., 2 (1970), 243–252.
47. I. J. MAC-DONALD, *A general matrix statement of multi-dimensional interpolation*, J. Sound and Vibr., 1, 14 (1971), 137–138.
48. C. S. DUNS, R. BUTTERFIELD, *Flexible buried cylinders. Part I. Static response*, Int. J. Rock Mech. and Mining Sci., 6, 18 (1971), 577–600.
49. C. S. DUNS, R. BUTTERFIELD, *Flexible buried cylinders. Part II. Dynamic response*, Int. J. Rock Mech. and Mining Sci., 6, 8 (1971), 601–612.
50. C. S. DUNS, R. BUTTERFIELD, *Flexible buried cylinders. Part III. Buckling behavior*, Int. J. Rock Mech. and Mining Sci., 6, 8 (1971), 613–627.
51. G. DUPUIS, J. J. GOËL, *Finite element with high degree of regularity*, Int. J. Num. Meth. Eng., 4, 2 (1970), 563–577.
52. D. B. EDWARDS, *Horizontal pillar extraction on Mt. Isa mines limited — some rock mechanics aspects*, Proc. 1 st Aust. — N. Z. Cont. Geomech., Melbourne, 1971, vol. 1, Sydney 1971, 73–79.
53. Z. EISENSTEIN, *Metoda konečných prvků v mechanice zemin*, Inž. stavby, 2, 19 (1971).
54. D. J. EWING, A. J. FAWKES, J. GRIFFITHS, *Rules governing the numbers of nodes and elements in a finite element mesh*, Int. J. Num. Meth. Eng., 2, 4 (1970), 597–600.
55. W. D. L. FINN, P. M. BYRNE, F. BUCHER, *Discussion on the paper: «Plane strain consolidation by finite elements»*, by J. T. CHRISTIAN, J. W. BOEHMER, Proc. ASCE, J. Soil and Found. Div., 5, 97 (1971), 808–809.
56. W. FÖRSTER, P. SITZ, *Untersuchungen zur Beanspruchung und Gestaltung von untertätigen Pfropfen und Dämmen*, Neue Bergbautechnik, 8, 1 (1971), 595–603.
57. W. FÖRSTER, *Zur Anwendung der Methode finiter Elemente bei der Lösung bodenmechanischer Probleme*, Neue Bergbautechnik, 2, 2 (1972), 134–138.
58. M. FRÉMOND, *Formulations duales des énergies potentielles et complémentaires, Application a la méthode des éléments finis*, C. r. Acad. Sci., 17, 273 (1971), A 775–A 777.
59. I. FRIED, *Discretization and computational errors in high-order finite elements*, AIAA J., 10, 9 (1971), 2071–2073.
60. C. C. FU, *On the stability of explicit methods for the numerical integration of the equations of motion in finite element methods*, Int. J. Num. Meth. Eng., 1, 4 (1972), 95–107.
61. J. GHABOUSSI, E. L. WILSON, *Variational formulation of dynamics of fluid-saturated porous elastic solid*, Proc. ASCE, J. Eng. Mech. Div., 4, 98 (1972), 947–963.
62. C. GILLES, *Rigid body motions in curved finite elements*, AIAA J., 7, 8 (1970).
63. J. P. GIROUD, H. WATISSEE, A. RABATEL, *Tassements et contraintes dans une couche de sol élastique supportant une charge uniformément répartie*, Bull. Liais. Lab. rout. pont et chaussées, No 48 (1970).
64. J. J. GOËL, *Construction of basic functions for numerical utilisation of Ritz's method*, Numer. Math., 5, 12 (1968), 435–447.
65. H. R. GROOMS, *Algorithm for matrix bandwidth reduction*, Proc. ASCE, J. Struct. Div., 1, 98 (1972) 203–214.
66. P. GUELLEC, A. DUBOUCHET, *Programmes de calcul par la méthode des éléments finis à la section de mécanique des roches du LCPC*, Bull. Liais. Lab. ponts et chausees, No 57 (1972).

67. M. J. HADDIN, *Mats and combined footings — analysis by the finite element method*, J. Amer. Concrete Inst. 12, **68** (1971), 945–949.
68. G. C. HART, J. D. COLLINS, *The treatment of randomness in finite elements modelling*, SAE Preprints, No 700842.
69. F. E. HEUZÉ, R. E. GOODMAN, A. BORNSTEIN, *Numerical analyses of deformability tests in jointed rock — «joint perturbation» and «no tension» finite element solutions*, Rock Mech., 1, **3** (1971), 13–24.
70. P. G. HODGE, *A consistent finite element model for the two-dimensional continuum*, Ing. — Archiv. **39** (1970), 375–382.
71. G. W. HOLLINGSHEAD, *Stress distribution in rock anchors*, Can. Geotechn. J., 4, **8** (1971), 588–592.
72. K. HÖEG, *Finite element analysis of strainsoftening clay*, Proc. ASCE, J. Soil Mech. and Found. Div., 1, **98** (1972), 43–58.
73. D. A. HUNT, *Discrete element structural theory of fluids*, AIAA J., 3, **9** (1971), 457–464.
74. S. G. HUTTON, D. L. ANDERSON, *The finite element method: a Galerkin approach*, Proc. 3 rd Can. Congr. Appl. Mech., Calgary, 1971, 733–734.
75. W. HÜLS, *Die Anwendung der Finite-Element-Methode zur Lösung geomechanischer Aufgaben*, Bergakademie, 10, **21** (1969), 600–604.
76. C. T. HWANG, N. R. MORGENSTERN, D. W. MURRAY, *On solutions of plane strain consolidation problems by finite element methods*, Can. Geotechn. J., 1, **8** (1971), 109–118.
77. B. M. IRONS, *A frontal solution program for finite element analysis*, Int. J. Num. Meth. Eng., 1, **2** (1970), 5–32.
78. ITO ITIRO, SASA, KOYTI, TANIMOTO TIKAOA, *Zastosowanie metody elementów skończonych do zagadnień strzelania*, J. Ind. Explos. Soc. Jap. 1, **32** (1971), 13–17 (po japońsku).
- 78a. ITOW TOMIO, FUJII KIYOSHI, UESAKA TSUNEO, *No tension analysis on use of rock bolts*, Techn. Repts. Osaka Univ. **22** (1972), 273–283.
79. F. JABUREK, G. HÖFLER, F. STURM, *Elementenmethode zur Berechnung ebener Spannungs — und Verformungszustände — ein Hilfsmittel der Gebirgsmechanik*, Berg — und Hüttenmann Monatsh., 2, **115** (1970), 32–35.
- 79a. J. C. JAEGER, N. G. W. COOK, *Fundamentals of rock mechanics*, Chapman and Hall Ltd., 1971.
- 79b. J. JĘGIER, M. STOPYRA, *Zarys metody elementów skończonych i możliwości jej zastosowania w górnictwie*, Przegląd Górniczy, 9 (1972), 389–394.
80. W. M. JENKINS, *Matrix and digital computer methods in structural analysis*, London (New York) McGraw-Hill, 1969.
81. M. J. KALDIJIAN, *Torsional stiffness of embedded footings*, Proc. ASCE, J. Soil Mech. and Found. Div., 7, **97** (1971), 969–980.
82. H. KARDENSTUNCER, *K-tensors in discrete mechanics*, ZAMM, 1–4, **50** (1970).
83. KAWAI TADAHIKO, *Współczesne kierunki badań w metodzie elementów skończonych*, Seisan Kenkyu, Mon. J. Inst. Ind. Sci. Univ. Tokyo, 1, **22** (1970), 33–44 (po japońsku).
84. M. KINZE, *Berechnung ebener erdstatischer Probleme nach der Elementenmethode*, Baup. — Bautechn., 9, **24** (1970), 452–456.
- 84a. I. KISIEL, *O podstawach metody elementów skończonych*, Archiwum Hydrotechniki 3, **19** (1972), 341–358.
85. V. KOLÁR, *The influence functions in the finite element method*, ZAMM Sonderheft, **50** (1970), T 129–T 131.
86. V. KOLÁR, *The influence of division on the results in the finite element method*, ZAMM, Sonderheft, **51** (1971), T 59–T 60.
87. K. KOVARI, *On the dimensioning of underground structures* (in German), Schweizerische Bauzeitung, 37, **87** (1969), 687–697.
- 87a. KWAN Y. LO, C. F. LEE, *Discussion of paper: «Finite element analysis of strain — softening clay» by K. HÖEG*, Proc. ASCE, J. Soil Mech. Found. Div., 9, **98** (1972), 981–983.
88. C. A. LABERGE, A. PAQUETTE, *An electrical analogy to the finite element method*, Proc. 3 rd Can. Congr. Appl. Mech., Calgary 1971, 225–226.

89. P. LAUNAY, *The three-dimensional thermoelastic computer code «Titus»*, Prepr. 1 st Int. Conf. Struct. Mech. React. Technol. Berlin, 1971, vol. 5, Part M, M5-4/1-M5-4/21.
- 89a. I. K. LEE, J. R. HERINGTON, *Discussion of paper: «Finite element analyses of retaining wall behavior»*, by G. W. CLUOGH, J. M. DUNCAN, Proc. ASCE, J. Soil Mech. Found. Div., 9, 98 (1972), 973-974.
90. J. W. LEONARD, *Discussion of papers: «A general theory of finite elements, Parts 1-2»*, by J. T. ODEN, Int. J. Num. Meth. Eng., 3, 2 (1970), 295-297.
91. J. W. LEONARD, T. T. BRAMLETTE, *Finite element solutions of differential equations*, Proc. ASCE, J. Eng. Mech., Div., 6, 96 (1970), 1271-1283.
92. A. LUCKS, J. T. CHRISTIAN, G. E. BRANDOW, H. HOËG, *Stress conditions in NGI simple shear test*, Proc. ASCE, J. Soil Mech. and Found. Div., 1, 98 (1972), 155-160.
93. H. MALINA, *The numerical determination of stresses and deformations in rock taking into account discontinuities*, Rock Mech., 1, 2 (1970), 1-16.
- 93a. L. MANSFIELD, *On the variational characterization and convergence of bivariate splines*, Num. Math., 2, 20 (1972), 99-114.
94. S. MARTINETTI, G. MONTANI, R. RIBACCHI, R. RICCIONI, *L'impiego de elementi finiti di alto ordine nella meccanica dei terreni e delle rocce*, Riv. ital. geotecn., No 4 bis, 5 (1971), 328-335.
- 94a. S. MARTINETTI, R. RIBACCHI, *Secondo Congresso della Societa internazionale di meccanica delle rocce*. Riv. Ital. Geotech. 1, 6 (1972), 37-67.
95. F. MELKES, *The finite element method for non-linear problems*, Applikace Mat., 3, 15 (1970).
96. P. M. MEBANE, J. A. STRICKLIN, *Implicit rigid body motion in curved finite element*, AIAA J., 2, 9 (1971), 344-345.
97. D. MILOVIČ, *Naponi i pomeranja u sloju organiĉene debljine proizvedeni kruŹnim temeljem*, Građevinar, 8, 23 (1971), 247-252.
98. D. MILOVIČ, *Naponi i pomeranja u sloju ograniĉene debljine proizvedeni kruŹnim temeljem*, Izgradnja, 7, 25 (1971), 3-12.
99. D. MILOVIČ, *Moguĉnost primene metode koraĉnik elemenata na nehe probleme mehanike tla*, Tehnika, 4, 26 (1971), Nase gradev, 4, 25 (1971), 649-653.
100. D. MILOVIČ, *Naponi i pomeranja u izotropnom ili anizotropnom tlu usled krutog kruŹnog temelja*, Izgradnja, 4, 26 (1972), 1-14.
101. D. MILOVIČ, *Stresses and displacements in an anisotropic layer due to a rigid circular foundation*, Géotechnique, 1, 22 (1972), 169-174.
102. D. MILOVIČ, J. P. TOURNIER, G. TOUZOT, *Une application de la méthode des elements finis a la mécanique des sols*, Ing.-constr., 147, 68 (1970), 39-41.
103. A. R. MITCHELL, *Variational principles and the finite-element method in partial differential equations*, Proc. Roy. Soc. Lond., A 323 (1971), 211-217.
104. N. MORIN, *Higher order stiffness tensors for nonlinear finite element analysis*, Proc. 3 rd Can. Congr. Appl. Mech., Calgary 1971, 221-222.
105. K. NAIR, *Analytical methods for predicting subsidence*, «Land subsidence. Proc. Tokyo Symp., 1969», vol. 2, Paris 1970, 588-595.
106. Y. NIWA, S. KOBAYASHI, K. NAKAGAWA, *The influence of end friction and Poisson's ratio on stresses in compressed specimens*, J. Soc. Mat. Sciences, 196, 19 (1970), 63-69.
107. J. T. ODEN, *Note on an approximate method for computing nonconservative generalized forces on finitely deformed finite elements*, AIAA J., 11, 8 (1970), 2088-2090.
108. J. T. ODEN, *Finite elements of nonlinear continua*, McGraw-Hill, 1972.
109. J. T. ODEN, H. J. BRAUCHLI, *On the calculation of consistent stress distributions in finite element approximations*, Int. J. Num. Meth. Eng., 3, 3 (1971), 317-325.
110. J. T. ODEN, B. E. KELLEY, *Finite element formulation of general electrothermoelasticity problems*, Int. J. Num. Meth. Eng., 2, 3 (1971), 161-179.
111. J. T. ODEN, T. J. CHUNG, J. E. KEY, *Analysis of nonlinear thermoelastic and thermoplastic behavior of solids of revolution by the finite element method*, Prepr. 1 st Int. Conf. Struct. Mech. React. Techn., Berlin 1971, vol. 5, Part M, M5-6/1-M5-6/19.

112. J. T. ODEN, D. M. RIGSBY, D. CORNETT, *On the numerical solution a class of problems in a linear first strain-gradient theory of elasticity*, Int. J. Num. Meth. Eng., 2, 2 (1970), 159–174.
113. G. OLTEANU, *Evaluarea fortelar nodale echivalente pentru elementele finite liniare*, Bul. sti. Inst. constr. Bucuresti, 1/2, 14 (1971), 227–250.
114. W. C. PAULSEN, *Finite element stress analysis*, Part 1, Mach. Des., 24, 43 (1971), 46–52.
115. W. C. PAULSEN, *Finite element stress analysis*, Part 2, Mach. Des., 25, 43, (1971), 146–150.
116. W. C. PAULSEN, *Finite element stress analysis*, Part 3, Mach. Des., 26, 43 (1971), 90–94.
117. J. V. PERUMPRAL, J. B. LILJEDAHL, W. H. PERLOFF, *The finite element method for predicting stress distribution and soil deformation under a tractive device*, Trans. ASAE, 6, 14, (1971), 1184–1188.
118. P. E. PINTO, *Sulla dinamica del complesso suolo — struttura*, G. del Genio Civile, 9–10, 108 (1970), 601–636.
119. *Programy metody elementów skończonych*. Praca zb. pod red. J. SZMELTERA, Arkady (w druku).
120. N. RADHAKRISHNAN, L. C. REESE, *A review of applications of the finite element method of analysis to problems in soil and rock mechanics*, Soils and Found., 3, 10, (1970), 95–112.
121. Y. R. RASHID, T. Y. CHANG, *Stress analysis of two-dimensional problems under simultaneous creep and plasticity*, Prepr. 1. st Int. Conf. Struct. Mech. React. Technol., Berlin, 1971, vol. 5, Part L, L4–5/1.
122. J. ROBINSON, G. W. HAGGENMACHER, *Optimization of redundancy selection in the finite-element force method*, AIAA J., 8, 8 (1970), 1429–1433.
- 122a. R. S. SANDHU, E. L. WILSON, *Finite element analysis of land subsidence*, «Land subsidence. Proc. Tokyo Symp., 1969. vol. 2». Paris, 1970, 393–400.
- 122b. G. SCHMID, *Die Methode der finiten Elemente als Sonderfall der Methode der gewichteten Residuen*, ZAMM, 9, 52 (1972), 461–469.
123. R. S. SKJOLINGSTAD, Y. K. CHEUNG, *Three-dimensional field problems by higher order finite elements*, Rev. Roum. Sci. Techn. Mec. Appl., 2, 16 (1971), 359–373.
124. T. R. STACEY, *Application of the finite element method in the field of rock mechanics with particular reference to slope stability*, S. Afric. Mech. Eng., 5, 19 (1969), 131–134.
125. K. G. STAGG, O. C. ZIENKIEWICZ, *Rock mechanics in engineering practice*, N. Y. John Wiley and Sons, 1968.
- 125a. O. STEPHANSSON, *Theoretical and experimental studies in tectonics and rock mechanics.*, Acta Univ. Uppsal. Abstrs. Uppsala Diss. Fac. Sci, 197 (1972).
126. J. SZMELTER, M. WIECZOREK, *Wykresy warstwowe funkcji $F(x, y)$ wykonywane na maszynie cyfrowej*, Biul. WAT, 5, 20 (1971), 21–36.
127. J. J. TELEGA, *Zastosowanie programowania liniowego do wyznaczania nośności granicznej konstrukcji*, Mech. Teor., Stos. 1, 9 (1971), 7–52.
128. J. J. TELEGA, *Wyznaczanie nośności granicznej konstrukcji przy pomocy programowania matematycznego*, Rozprawa doktorska, Gliwice 1972.
129. R. L. THOMAS, A. ARMAN, *Photoelastic and finite element analysis of embankments constructed over soft soils*, Highway Res. Rec., No 323 (1971), 71–86.
130. P. TONG, Y. C. FUNG, *Slow particulate viscous flow in channels and tubes — application to biomechanics*, Trans. ASME, J. appl. mech., 4, 38 (1971), 721–728.
131. J. UZMAN, M. LIVNEH, E. SHKLARSKY, *Cracking mechanism of flexible pavements*, Proc. ASCE, Transp. Eng. J., 1, 98 (1972), 17–36.
132. C. VALENTIN, *Anwendung eines «Elementen-Methode» Programmes zur Lösung von Temperaturverteilungsproblemen*, Nucl. Eng. and Des., 1, 15 (1971), 56–64.
133. S. VALLIAPPAN, *Nonlinear stress analysis of two-dimensional problems with special reference to rock and soil mechanics*, Ph. D. Thesis University of Wales.
- 133a. R. S. VARSHNEY, *Effect of foundation elasticity on stresses in gravity dams*, Cem. and Concr. 3, 12 (1971), 239–254.
134. G. de VRIES, D. H. NORRIE, *The application of the finite-element technique to potential flow problems*, Trans. ASME, J. appl. mech., 4, 38 (1971), 798–802.
135. J. WALSH, *Finite-difference and finite-element method of approximation*, Proc. Roy. Soc. Lond., A 323 (1971), 155–165.

136. CHU-KIA WANG, *Matrix methods of structural analysis*, Scranton, Internat. Textbook, 1970.
137. M. C. WANG, J. K. MITCHELL, *Stress-deformation prediction in cement-treated soil pavements*, Highway Res. Rec., 351 (1971), 93–111.
138. F. D. WANG, L. A. PANEK, M. C. SUN, *Stability analysis of underground openings using a Coulomb failure criterion*, Trans. Soc. Mining Eng. AIME, 4, 250 (1971), 317–321.
139. S. K. WANG, M. SARGIOUS, Y. K. CHEUNG, *Advanced analysis of rigid pavements*, Proc. ASCE, Transp. Eng. J., 1, 98 (1972), 37–44.
140. B. V. WINKEL, K. H. GERSTLE, H. Y. KO, *Analysis of time-dependent deformations of openings in salt media*, Int. J. Rock Mech. and Mining Sci., 2, 9 (1972), 249–260.
141. W. WUNDERLICH, *Ein verallgemeinertes Variationsverfahren zur vollen oder teilweisen Diskretisierung mehrdimensionaler Elastizitätsprobleme*, Ing., Archiv., 39 (1970), 230–247.
142. YOSHITSURA YOKOO, KUNIO YAMAGATA, HIROAKI NAGAOKA, *Finite element method applied to Biot's consolidation theory*, Soils and Found., 1, 11 (1971), 29–46.
143. YOSHITSURA YOKOO, KUNIO YAMAGATA, HIROAKI NAGAOKA, *Variational principles for consolidation*, Soils and Found., 4, 11 (1971), 25–35.
144. YOSHITSURA YOKOO, KUNIO YAMAGATA, HIROAKI NAGAOKA, *Finite element analysis of consolidation following undrained deformation*, Soils and Found., 4, 11 (1971), 37–58.
145. Y. S. YU, D. F. COATES, *Analysis of rock slopes, using the finite element method*, Mines Branch, Dep. Energy, Mines and Resour Ottawa. Res. Rept., No R 229, 1970(71).
146. A. ZENIŠEK, *Některé typy prvků a náhradních funkcí v metodě konečných prvků*, Stavebn. časop., 1, 18 (1970), 48–62.
147. A. ZENIŠEK, *Interpolation polynomials on the triangle*, Numer. Math., 4, 15 (1970), 283–296.
148. O. C. ZIENKIEWICZ, *The finite element method: from intuition to generality*, Appl. Mech. Rev., 3 (1970), 249–256.
149. O. C. ZIENKIEWICZ, *Metoda elementów skończonych*, Arkady, Warszawa 1972 (tł. z języka angielskiego).
150. O. C. ZIENKIEWICZ, G. C. NAYAK, D. R. J. OWEN, *Composite and overlay models in numerical analysis of elasto-plastic continua*, «Foundations of plasticity. Warsaw 1972», Noordhoff Int. Publ. Groningen, 107–123.
151. M. ZLAMAL, *On the finite element method*, Num. Math., 5, 12 (1968), 394–409.
152. M. ZLAMAL, *On some finite element procedures for solving second order boundary value problems*, Num. Math., 1, 14 (1969), 42–49.
153. Д. В. ВАЙНБЕРГ, А. С. ГОРОДЕЦКИЙ, В. В. КИРИЧЕВСКИЙ, А. С. САХАРОВ. *Метод конечного элемента в механике деформируемых тел*, Прикл. Мех., 8, 8 (1972), 3–28.
- 153а. В. Л. ВИЛЕНКИН, *О наилучшем приближении сплайн-функциями на классах непрерывных функций*, Мат. Заметки, 8 (1970).
154. М. В. ВИТЕНБЕРГ, *Влияние характеристик деформируемости и фактора постепенности возведения на напряженно-деформированное состояние поперечного сечения плотины с ядром*, «Тр. ВНИИ водоснабж., канализ., гидротех. соор. и инж. гидрогеол», 34, (1972), 37–42.
155. Хр. ГАНЕВ, Ст. ГРИГОРОВ, *Някои допълнения към решаване на дъговите язовирни стени чрез «петмоментни уравнения»*, Изв. ин-та техн. мех. Бълг. АН., 7 (1970), 157–176.
156. А. Л. ГОЛЬДИН, А. П. ТРОИЦКИЙ, *Использование метода конечных элементов для расчета напряженно-деформированного состояния треугольного каньона*, Изв. ВНИИ гидротехн., 95 (1971) 98–107.
157. В. П. КАНДИДОВ, Е. П. ХЛЫБОВ, *О сходимости метода конечных элементов при расчете динамики мембран*, Прикл. Мат. Мех., 3 (1972), 561–565.
158. В. Г. КОРНЕВ, *О методе конечных элементов для решения задач упругого равновесия*, В сб. «Строит. мех. соор.», Л., 1971, 28–46.
159. А. С. ЛОГИНОВ, *Об одном предельном соотношении приближения сплайн-функциями*, Укр. Мат. Журнал, 5, 24 (1972), 695–699.
160. Э. Ш. МЕЛАМЕД, Е. А. ЭРЕЗ, *Матричный алгоритм расчета конструкции на упругом основании с использованием метода конечных элементов*, Тр. Моск. ин-та инж. ж.-д. трансп., 342 (1969), 81–87.

161. Л. Н. Рассказов, М. В. Витенберг, *Напряженно-деформированное состояние плотин из местных материалов и их устойчивость*, Тр. ВНИИ водоснабж., канал., гидротехн. соор. и инж. гидрогеол., 34, (1972), 18–32.
162. Л. А. Розин, *О связи метода конечных элементов с методами Бубнова-Галеркина и Рунца*, В сб. «Строит. мех. соор.», Л., 1971, 6–28.
163. Л. А. Розин, *Метод конечных элементов в строительной механике*, Строит. мех. расч. соор., 5 (1972), 1–7.
164. Э. М. Садетова, Я. Д. Гильман, Ю. Н. Музыченко, *Распределение напряжений в лёссовом основании в процессе его увлажнения*, Изв. высш. учеб. завед., Стр-о и архит., 6 (1972), 36–40.
165. Ю. Е. Скабицкий, М. Ф. Федосов, *Определение тензора напряжения упругого тела методом конечного элемента*, Сб. научн. тр. Киев. ин-т инж. гражд. авиации, 3 (1969), 161–166.
166. И. Г. Терегулов, *О методах сведения континуальных нелинейных задач механики твердого деформируемого тела к задачам дискретным*, Мех. тв. тела, 5 (1972), 21–27.
167. А. П. Троицкий, *Определение напряженного состояния плотин из местных материалов методом конечных элементов*, Изв. ВНИИ гидротех., 95 (1971), 108–121.
168. А. П. Троицкий, *Применение метода конечных элементов к расчету земляных плотин на сейсмические воздействия*, Тр. координац. совещ. по гидротехн., 65 (1971), 130–138.

Р е з ю м е

МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В МЕХАНИКЕ ГРУНТОВ И В МЕХАНИКЕ ГОРНЫХ МАССИВОВ

В работе дан обзор новейших работ, посвященных применениям метода конечных элементов к задачам механики грунтов и механики горных массивов.

S u m m a r y

FINITE ELEMENT METHOD IN SOIL AND ROCK MECHANICS

The paper presents a review of recent achievements in the field of application of the finite elements method to the problems of soil and rock mechanics.

POLITECHNIKA ŚLĄSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 29 stycznia 1973 r.