MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
4, 11 (1973)

WIELOSTOPNIOWA SYNTEZA MACIERZY SZTYWNOŚCI

KRZYSZTOF DEMS (ŁÓDŹ)

1. Wstęp

Stosowanie metody elementów skończonych do rozwiązywania zagadnień mechaniki ośrodków ciągłych prowadzi w efekcie do układów równań liniowych o dużej liczbie niewiadomych, których wielkość zależy od gęstości podziału ciała na elementy oraz ilości stopni swobody wprowadzonych w każdym węźle siatki narzuconej na ciało. Macierze współczynników otrzymywanych układów są symetrycznymi macierzami pasmowymi o dużej liczbie elementów zerowych. Rozwiązanie tych układów może być przeprowadzone dowolnymi metodami algebry liniowej.

Niezależnie od stosowanej metody proces rozwiązania wymaga wykonania dużej liczby operacji arytmetycznych. Wymaga ponadto maszyn cyfrowych o dużej pojemności pamięci. Istotne staje się zatem opracowanie algorytmów rozwiązania zmniejszających liczbę wykonywanych działań oraz liczbę niezbędnych komórek pamięci maszyny. W literaturze przedmiotu zagadnienie to rozwiązywane jest różnymi metodami [1], [2], [3], [6]. Niniejsza praca przedstawia pewną metodę tworzenia i rozwiązywania układów równań metody elementów skończonych.

Rozwiązanie układu równań postaci

$$[\mathbf{K}]\cdot\{\boldsymbol{\delta}\} = \{\mathbf{R}\}, \tag{1.1}$$

gdzie $[\mathbf{K}]$ jest macierzą współczynników układu, $\{\boldsymbol{\delta}\}$ — wektorem nieznanych stopni swobody, a $\{\mathbf{R}\}$ wektorem sił przyłożonych w węzłach elementów, przeprowadzone jest metodą eliminacji Gaussa.

Symetria macierzy $[\mathbf{K}]$ układu (1.1) pozwala dokonywać wszelkich operacji jedynie na współczynnikach leżących poniżej przekątnej macierzy. Pasmowa budowa tej macierzy pozwala dodatkowo zmniejszyć niezbędną ilość operacji. Eliminując mianowicie niewiadomą z k-tego równania, przekształceniu podlegają jedynie te j-te wiersze macierzy, którym odpowiadają niezerowe współczynniki w k-tym równaniu. Powyższe powoduje, że niezbędna ilość operacji wynosi około 3% ilość operacji wykonywanych na pełnej macierzy współczynników układu [4]. Zmniejsza się również konieczna ilość komórek pamięci maszyny.

Dodatkowe zmniejszenie rozwiązywanego układu równań oraz ilości operacji i liczby komórek pamięci uzyskać można stosując specyficzną metodę tworzenia i rozwiązywania układu (1.1), nazywaną wielostopniową syntezą macierzy sztywności.

2. Zasady podziału ciała na elementy

W większości spotykanych w literaturze prac przyjmuje się podział ciała na elementy niepodlegające dalszemu podziałowi. W pewnych przypadkach podział ciała na elementy może być generowany automatycznie przez maszynę cyfrową [5]. W niniejszej pracy wprowadzono wielostopniowy podział obszaru, dzieląc każdy element na szereg podelementów. Podział ten dokonuje się następująco: Rozpatrywany obszar dzielony jest na skończoną liczbę elementów dowolnego kształtu, połączonych ze sobą w węzłach leżących na liniach (lub powierzchniach) podziału. Elementy te nazwano *elementami rzędu I*. Każdy element rzędu I dzielony jest na dowolną liczbę *elementów rzędu II* zawierających węzły na swoich liniach podziału. Z kolei każdy element rzędu II dzielony jest na *elementy rzędu III* itd.

Stopnie swobody węzłów leżących na liniach (powierzchniach) podziału między elementami tego samego rzędu zebrano w grupy *własnych stopni swobody elementów* odpowiedniego rzędu, i tak np. stopnie swobody węzłów leżących na liniach granicznych między elementami rzędu I nazwano *własnymi stoniami swobody elementów rzędu I* i analogicznie dla elementów wyższych rzędów. Osobno wydzielona została grupa *stałych stopni swobody* o określonych wartościach. Tak więc wektor stopni swobody wszystkich węzłów ciała przedstawić można jako

$$\{\boldsymbol{\delta}\} = \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \delta_i \\ \cdot \\ \delta_N \\ \delta_s \end{Bmatrix}, \tag{2.2}$$

gdzie $\{\delta_i\}$ jest grupą własnych stopni swobody elementów rzędu i, a $\{\delta_s\}$ jest grupą stałych stopni swobody.

3. Wielostopniowa synteza macierzy sztywności

Rozwiązanie układu równań liniowych (1.1) metodą Gaussa składa się z dwóch etapów. W pierwszym, drogą eliminacji kolejnych niewiadomych z układu (1.1) macierz współczynników tego układu przekształca się na macierz trójkątną. W etapie drugim na drodze postępowania odwrotnego wyznacza się wartości nieznanych stopni swobody.

Zgodnie z ogólną teorią metody elementów skończonych układ równań (1.1) tworzą równania równowagi wszystkich węzłów ciała. Macierz współczynników tego układu powstaje przez odpowiednie zsumowanie macierzy sztywności wszystkich elementów na które podzielono ciało. Traktując wspomnianą macierz jako macierz sztywności całego ciała można ją przedstawić jako odpowiednią sumę macierzy sztywności wszystkich elementów rzędu I, które z kolei powstają przez zsumowanie macierzy sztywności elementów rzędu II w każdym elemencie rzędu I. Podobnie tworzyć można macierze sztywności elementów rzędu II jako sumę macierzy sztywności elementów rzędu III w danym elemencie rzędu II. W ten sposób tworzy się macierze sztywności wszystkich elementów do rzędu $N-1$ włącznie. Macierze sztywności elementów najwyższego rzędu określone są zgodnie z ogólną teorią metody elementów skończonych.

Wydzielając z ciała l-ty element r-tego rzędu, jego równowagę można opisać zależnością

$$[\mathbf{K}]^l \cdot \{\boldsymbol{\delta}\}^l = \{\mathbf{F}\}^l, \tag{3.1}$$

gdzie $[\mathbf{K}]^l$ jest macierzą sztywności tego elementu, $\{\boldsymbol{\delta}\}^l$ — wektorem stopni swobody związanych z rozpatrywanym elementem, a $\{\mathbf{F}\}^l$ wektorem sił węzłowych tego elementu. W ogólnym przypadku w elemencie tym występują stopnie swobody należące do wszystkich grup wprowadzonych w pkt. 2. Równanie (3.1) zapiszemy więc w postaci:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & & & & & & \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} & \text{symetryczne} & & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot & & & & \\ \mathbf{K}_{r1} & \mathbf{K}_{r2} & \cdot\ \cdot & \mathbf{K}_{rr} & & & \\ \mathbf{K}_{r+1,1} & \mathbf{K}_{r+1,2} & \cdot\ \cdot & \mathbf{K}_{r+1,r} & \mathbf{K}_{r+1,r+1} & & \\ \mathbf{K}_{s1} & \mathbf{K}_{s2} & \cdot\ \cdot & & \mathbf{K}_{s,r+1} & \mathbf{K}_{ss} \end{bmatrix}^l \cdot \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\delta}_1 \\ \boldsymbol{\delta}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \boldsymbol{\delta}_r \\ \boldsymbol{\delta}_{r+1} \\ \boldsymbol{\delta}_s \end{Bmatrix}^l = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{F}_r \\ \mathbf{F}_{r+1} \\ \mathbf{F}_s \end{Bmatrix}^l. \tag{3.2}$$

Jeżeli znana jest grupa stałych stopni swobody $\{\boldsymbol{\delta}_s\}^l$ można równanie (3.2) przekształcić do postaci

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_1 & & & \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} & \text{symetryczne} & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot & \\ \mathbf{K}_{r+1,r} & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \mathbf{K}_{r+1,r+1} \end{bmatrix}^l \cdot \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\delta}_1 \\ \boldsymbol{\delta}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \boldsymbol{\delta}_{r+1} \end{Bmatrix}^l = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{F}_{r+1} \end{Bmatrix}^l, \tag{3.3}$$

gdzie nowy wektor sił węzłowych $\{\mathbf{F}\}^l$ będzie dany przez

$$\{\mathbf{F}_i\}^l = \{\mathbf{F}_i\}^l - \{\mathbf{A}_{si}\}^T \cdot \{\boldsymbol{\delta}_s\}^l. \tag{3.4}$$

Usunięte w ten sposób równania odpowiadające stałym stopniom swobody pozwolą w toku postępowania odwrotnego wyznaczyć nieznane siły reakcji w węzłach o założonych pierwotnie wartościach stopni swobody.

Zauważmy dalej, że występujące w równaniu (3.3) niewiadome stopnie swobody $\{\boldsymbol{\delta}_{r+1}\}^l$ nie wystąpią w równaniach opisujących równowagę pozostałych elementów ciała, ponieważ są one stopniami swobody węzłów wewnętrznych rozpatrywanego elementu. Można więc z równania (3.3) wyeliminować tę grupę stopni swobody.

Wyznaczając przy pomocy ostatniego wiersza (3.3) niewiadome $\{\boldsymbol{\delta}_{r+1}\}^l$ otrzymamy

$$\{\boldsymbol{\delta}_{r+1}\}^l = [\mathbf{K}_{r+1\,r+1}]^{-1}(\{\mathbf{F}_{r+1}\} - \sum_{i=1}^{r} [\mathbf{K}_{r+1,i}]\{\boldsymbol{\delta}_i\}^l). \tag{3.5}$$

Wstawiając (3.5) do (3.3) po przekształceniach otrzymamy układ równań postaci:

$$
(3.6)\qquad \begin{bmatrix} \mathbf{K}_1 & & & & \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ \mathbf{K}_{r1} & \mathbf{K}_{r2} & \cdot\ \cdot & \mathbf{K}_{r,r-1} & \mathbf{K}_{rr} \end{bmatrix}^{l} \cdot \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\delta}_1 \\ \boldsymbol{\delta}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \boldsymbol{\delta}_r \end{Bmatrix}^{l} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{F}_r \end{Bmatrix}^{l},
$$

gdzie nowy wektor sił węzłowych określony jest przez

$$
(3.7)\qquad \{\mathbf{F}_i\}^l = \{\mathbf{F}_i\}^l - [\mathbf{K}_{r+1,i}]^T[\mathbf{K}_{r+1,r+1}]^{-1}\{\mathbf{F}_{r+1}\}^l,
$$

a nowe podmacierze macierzy $[\mathbf{K}]^l$ dane są przez

$$
(3.8)\qquad [\mathbf{K}_{ij}] = [\mathbf{K}_{ij}] - [\mathbf{K}_{r+1,i}]^T[\mathbf{K}_{r+1,r+1}]^{-1}[\mathbf{K}_{r+1,j}].
$$

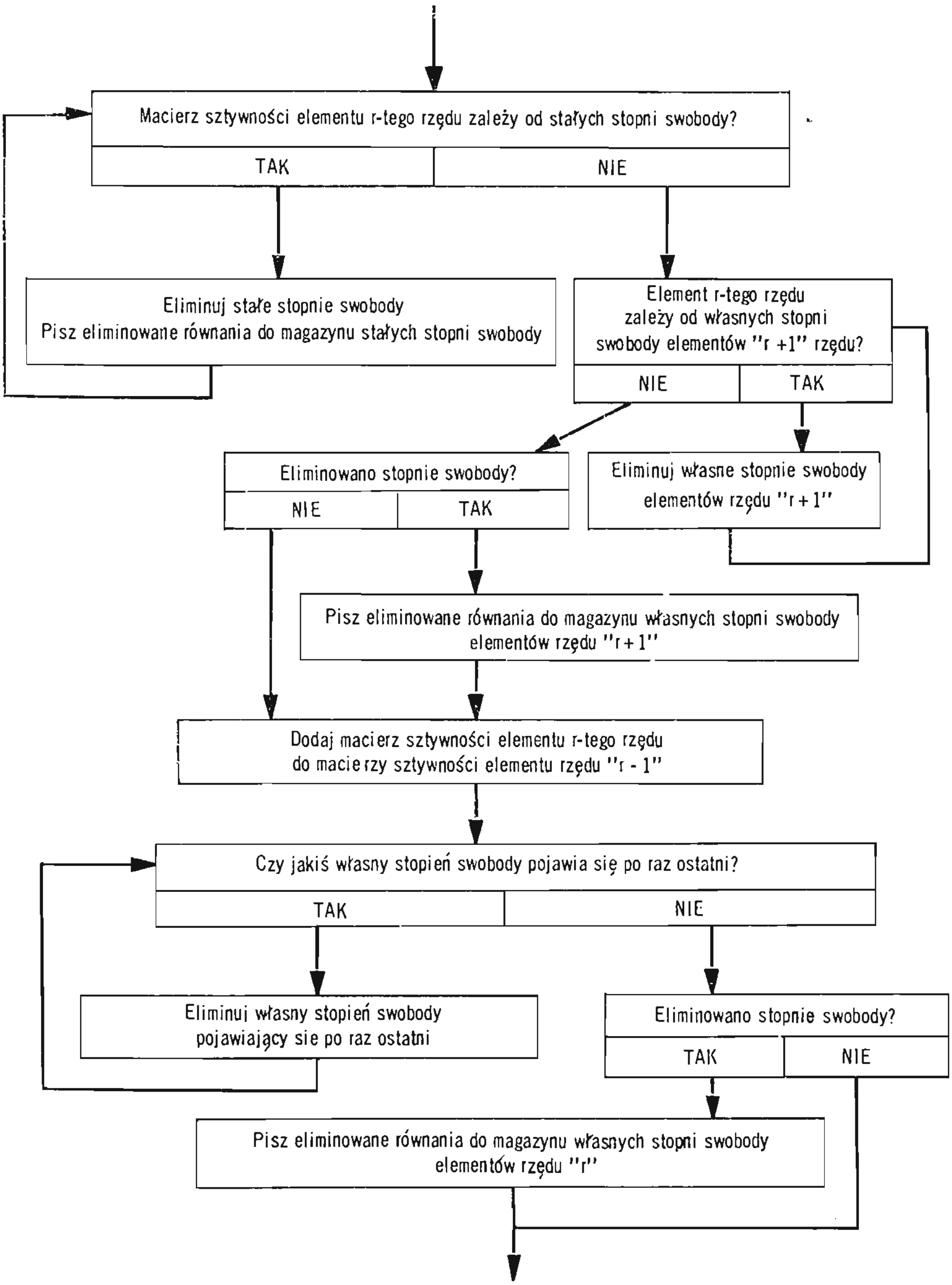
W wyniku opisanego powyżej postępowania w równaniach równowagi elementu r-tego rzędu jako niewiadome występują jedynie własne stopnie swobody elementów do rzędu r włącznie. Macierz $[\mathbf{K}]^l$ jest nową macierzą sztywności tego elementu, związaną jedynie ze stopniami swobody węzłów położonych na liniach granicznych tego elementu. Obliczając podobnie macierze sztywności wszystkich elementów r-tego rzędu tworzących element rzędu $r-1$ i dodając je do siebie tworzymy macierz sztywności elementu rzędu $r-1$ związaną ze stopniami swobody elementów do rzędu r włącznie. Usuwając z niej współczynniki odpowiadające własnym stopniom swobody elementów r-tego rzędu według postępowania opisanego powyżej, otrzymuje się macierz sztywności tego elementu związaną jedynie ze stopniami swobody elementów do rzędu $r-1$ włącznie.

Stosując wielokrotnie powyższą syntezę macierzy sztywności wyznacza się macierze sztywności wszystkich elementów rzędu I, których współczynniki związane są jedynie z własnymi stopniami swobody elementów rzędu I. Tworząc, przy pomocy tych macierzy, równania równowagi całego ciała i rozwiązując otrzymany układ wyznacza się nieznane stopnie swobody elementów rzędu I. Następnie, drogą postępowania odwrotnego, korzystając z wzorów podobnych do (3.5) wyznaczyć można stopnie swobody wszystkich grup $\{\delta_i\}$. Na końcu wreszcie wyznacza się reakcje $\{F_s\}$ odpowiadające stałym stopniom swobody.

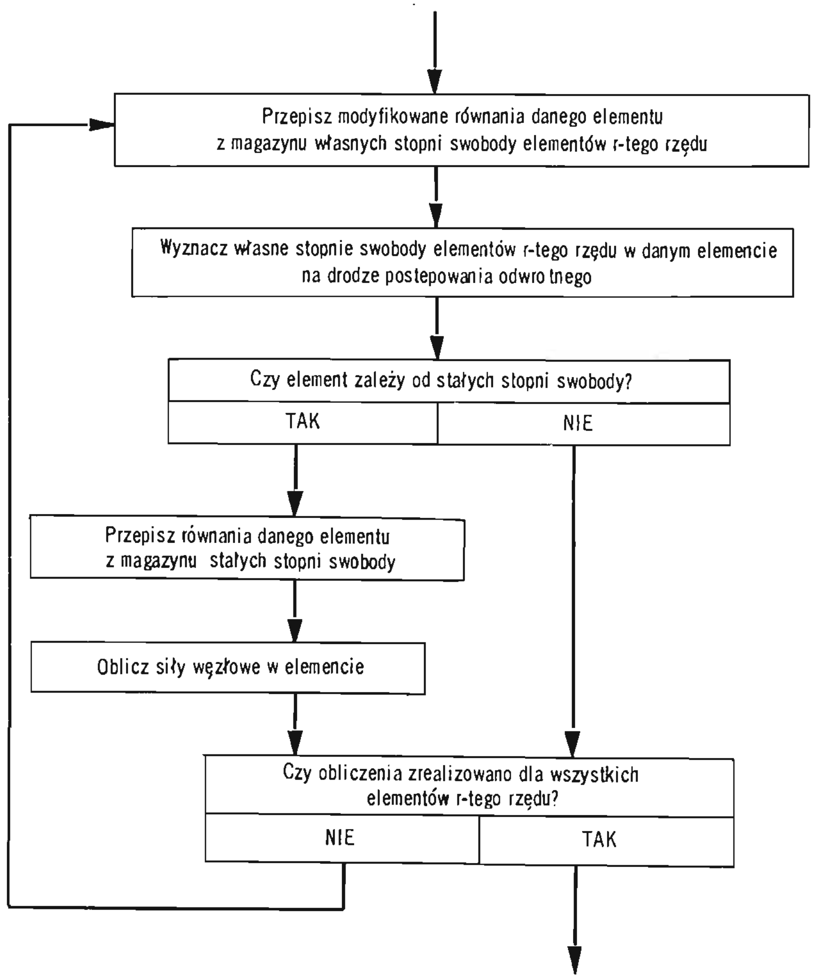
Omówiony schemat wielostopniowej syntezy macierzy sztywności wskazuje drogę postępowania, pozwalającą na prowadzenie procesu eliminacji nie dla całego układu równań (1.1) lecz dla jego kolejnych fragmentów odpowiadających elementom kolejnych rzędów. Stwarza to możliwość rozwiązywania dużych układów równań przy wykorzystaniu małych maszyn cyfrowych.

Podstawowe operacje etapu eliminacji w wielostopniowej syntezie macierzy sztywności sprowadzają się do operacji na dwóch macierzach sztywności: macierzy sztywności elementu rzędu $r-1$ oraz macierzy sztywności elementu r-tego rzędu wchodzącego w skład elementu rzędu $r-1$. Schemat blokowy operacji dokonywanych na tych macierzach przedstawiony jest na rys. 1.

W wyniku eliminacji wszystkich stopni swobody rozwiązywanego układu w pamięci pomocniczej maszyny cyfrowej zapisane są przekształcone równania układu. Za ich pomocą w drodze postępowania odwrotnego wyznacza się wartości stopni swobody i reakcji według schematu z rys. 2.



Rys. 1. Schemat blokowy podstawowych operacji w etapie eliminacji stopni swobody



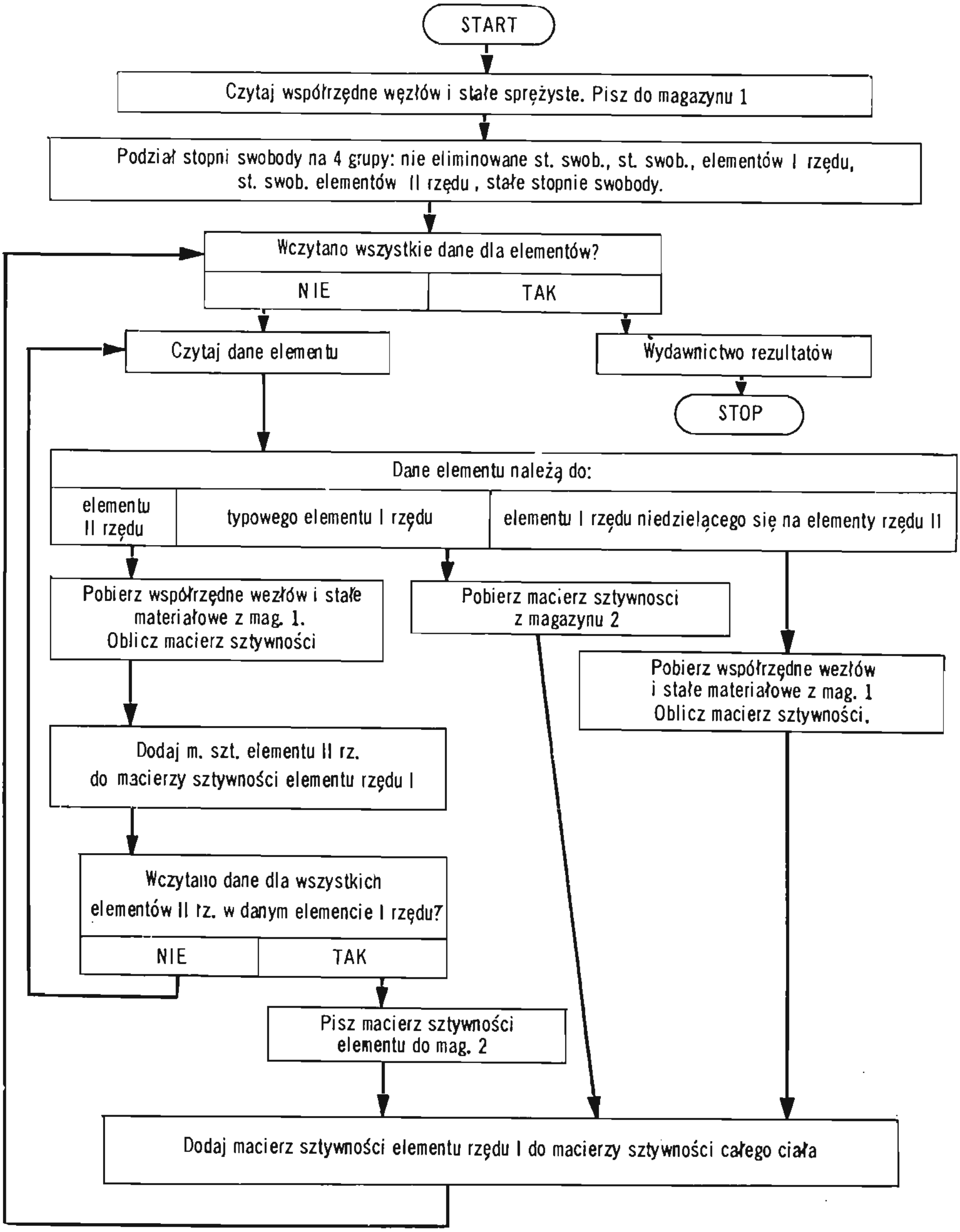
Rys. 2. Schemat blokowy podstawowych operacji w etapie postępowania odwrotnego

4. Wnioski

Przedstawiona metoda wskazuje prostą drogę postępowania przy układaniu i rozwiązywaniu dużych układów równań liniowych występujących przy stosowaniu metody elementów skończonych. Umożliwia ona zmniejszenie wymaganej liczby komórek pamięci maszyny cyfrowej oraz zmniejszenie wymaganej liczby działań arytmetycznych, szczególnie w etapie eliminacji niewiadomych.

Metoda ta jest bardzo korzystna szczególnie w przypadku, jeżeli w rozpatrywanym ciele dają się wyróżnić elementy geometrycznie i mechanicznie podobne. Dla takich elementów macierz sztywności związaną z własnymi stopniami swobody elementów rzędu I można obliczać jednokrotnie. W ten sposób zmniejsza się ilość równań które należy rozwiązać.

Metoda stwarza ponadto możliwość rozwiązywania bardzo dużych problemów nawet przy zastosowaniu małych maszyn cyfrowych drogą kilkukrotnego wyznaczania



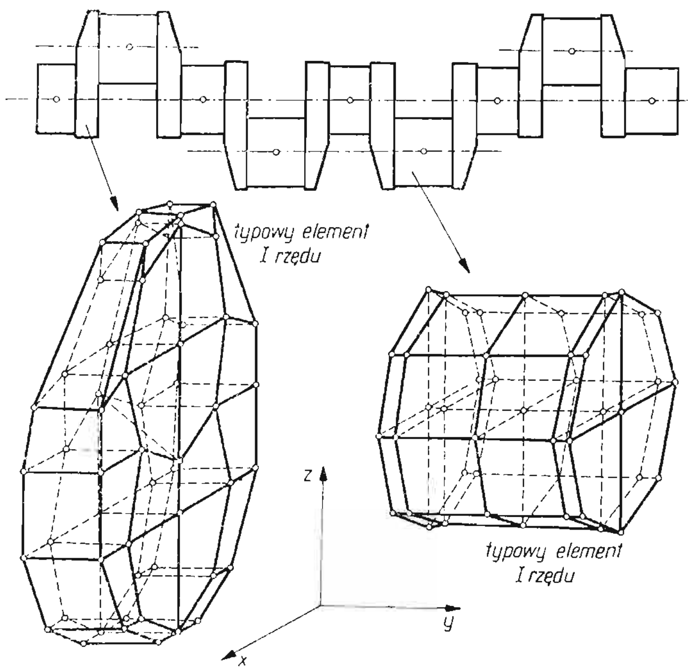
Rys. 3. Schemat blokowy programu wyznaczającego współczynniki wpływu

kolejnych grup stopni swobody bez konieczności pamiętania niektórych przekształconych równań. To ostatnie uzyskiwane jest oczywiście kosztem dłuższego czasu rozwiązania zagadnienia.

Program układający i rozwiązujący równania metody elementów skończonych według przedstawionej metody opracowany został w języku SAKO na maszynę cyfrową ZAM-41. W programie wprowadzono elementy I i II rzędu.

5. Przykład

Jednym z przykładów zastosowania wielostopniowej syntezy macierzy sztywności jest wykorzystanie jej do wyznaczania współczynników wpływowych ciała uzależnionych od stopni swobody pewnych wybranych węzłów ciała.



Rys. 4. Zastępczy model wału

Opracowany został program wyznaczający współczynniki wpływowe przy uwzględnieniu podziału ciała na elementy I i II rzędu. Dla elementów rzędu I geometrycznie i mechanicznie podobnych macierz sztywności wyznaczana jest jednokrotnie. Schemat blokowy programu napisanego w języku SAKO dla maszyny ZAM-41 przedstawiono na rys. 3.

Za pomocą wspomnianego programu wyznaczono współczynniki wpływu dla wału korbowego czterocylindrowego silnika spalinowego. Wał przybliżono modelem zawierającym 17 elementów I rzędu. 8 elementów rzędu I zawierało po 20 elementów II rzędu, 7 elementów I rzędu zawierało po 16 elementów rzędu II i 2 elementy I rzędu zawierały po 12 elementów rzędu II. Model zastępczy wału (pokazany na rys. 4) zawierał 2373 stopnie swobody. Poprzez wprowadzenie 8 typowych elementów I rzędu rozwiązywany układ zmniejszył się do 1227 niewiadomych. Tak więc poprzez wprowadzenie elementów geometrycznie i mechanicznie podobnych ilość równań zmniejszyła się o około 50%. Czas rozwiązywania zagadnienia stanowił około 50% czasu niezbędnego na rozwiązanie problemu przy wprowadzeniu jednokrotnego podziału na elementy.

Podziękowanie

Autor chciałby podziękować Prof. J. SZMELTEROWI z Wojskowej Akademii Technicznej w Warszawie za Jego uprzejmą pomoc przy opracowaniu tego artykułu.

Literatura cytowana w tekście

1. G. GANTIN, *An Equation Solver of Very Large Capacity*, Int. J. Num. Meth. Engng. 3, (1971), 379—388
2. B. M. IRONS, *A Frontal Solution Program for Finite Element Analysis*, Int. J. Num. Meth. Engng., 2, (1970) 5—32.
3. J. SZMELTER, S. DOBROCIŃSKI, *Program rozwiązujący równania metody elementów skończonych*, Biuletyn WAT, 6 (266), (1971), 43—51.
4. O. C. ZIENKIEWICZ, *The Finite Element Method in Engineering Science*, London 1971.
5. O. C. ZIENKIEWICZ, D. V. PHILLIPS, *An Automatic Mesh Generation Scheme for Plane and Curved Surface by Isoparametric' Coordinates*, Int. J. Num. Meth. Engng., 3, (1971), 519—528.
6. K. DEMS, *Wielostopniowa synteza oraz wielomiany Hermite'a w metodzie elementów skończonych*, Rozprawa doktorska, Politechnika Łódzka, Łódź 1971.

Р е з ю м е

МНОГОСТАДИЙНЫЙ СИНТЕЗ МАТРИЦ ЖЕСТКОСТИ

Представлен метод образования и решения систем уравнений методом конечных элементов. Введен многостадийный раздел тела путем раздела каждого элемента на ряд подэлементов. Представлены основы метода и блочные схемы программ для электронно-вычислительной машины ЗАМ 41. Предлагаемый метод позволяет сократить размеры памяти машины, а также уменьшить число необходимых арифметических действий. Предлагаемым методом можно решать большие задачи даже на небольших электронно-вычислительных машинах.

S u m m a r y

A MULTI-STAGE SYNTHESIS OF THE STIFFNESS MATRICES

The paper presents a method of constructing and solving the systems of equations of the finite element method. A multi-stage division of the space is introduced by dividing each element into a series of subelemets. The principles of the method are described and the flow diagrams of programs prepared for the ZAM-41 digital computer are given. The method presented enables us to reduce the required number of digital computer storage words, as well as that of the arithmetical operations. The method also creates a possibility of solving very extensive problems by means of even relatively small digital computers.

POLITECHNIKA ŁÓDZKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 19 lutego 1973 r.