MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
4, 11 (1973)

OSOBLIWOŚĆ NAPRĘŻEŃ W LINIOWYM OŚRODKU MIKROPOLARNYM SPOWODOWANA NIECIĄGŁYMI OBCIĄŻENIAMI (II)

JANUSZ DYSZLEWICZ, STANISŁAW MATYSIAK (WARSZAWA)

1. Wprowadzenie

W pracy rozpatrzymy osobliwość naprężeń siłowych i naprężeń momentowych w półprzestrzeni mikropolarnej Ω

(1.1) $$\Omega = \{(x_1, x_2): x_1 \geqslant 0, -\infty < x_2 < \infty\},$$

spowodowaną nieciągłymi obciążeniami statycznymi $p_i(x_2)$, $(i = 1, 2, 3)$ rozłożonymi na jej brzegu. Rozważania dotyczą płaskiego stanu odkształcenia (w ramach liniowej teorii niesymetrycznej sprężystości) reprezentowanego przez wektor przemieszczenia $\mathbf{u}$ i wektor obrotu $\boldsymbol{\varphi}$ postaci [1].

(1.2) $$\mathbf{u}(x_1, x_2) \equiv (u_1, u_2, 0), \qquad \boldsymbol{\varphi}(x_1, x_2) \equiv (0, 0, \varphi_3).$$

O funkcjach obciążeń $p_i(x_2)$ zakładać będziemy, że są nieparzyste, przedziałami ciągłe i bezwzględnie całkowalne w przedziale $(-\infty, \infty)$:

(1.3) $$p_i(-x_2) = -p_i(x_2),$$

(1.4) $$\lim_{x_2 \to 0} p_i(x_2) = p_i^0 \neq 0,$$

(1.5) $$\int_{-\infty}^{\infty} |p_i(x_2)|\, dx_2 < \infty, \qquad (i = 1, 2, 3).$$

W pracy korzystać będziemy z naszych poprzednich wyników [10], gdzie badając wpływ naprężeń momentowych na osobliwości naprężeń pochodzące od skupionych obciążeń podaliśmy, w oparciu o [1] i [2], podstawowe równania i ogólne rozwiązanie dla stanu naprężenia w półprzestrzeni. W ramach teorii naprężeń momentowych zagadnienie rozwiązań osobliwych posiada bogatą literaturę (patrz [1], [3]). Obecna praca, jak również praca [10], zrodziły się niejako na podstawie prac [4] i [5].

2. Ogólne rozwiązanie dla składowych stanu naprężenia

Na podstawie [10] dwuwymiarowy stan naprężenia w półprzestrzeni wyznaczamy ze wzorów

(2.1) $$\sigma_{\alpha\beta} = \sigma'_{\alpha\beta} + \sigma''_{\alpha\beta}, \qquad \sigma_{33} = \sigma'_{33} + \sigma''_{33},$$

(2.2) $$\mu_{\alpha 3} = \mu'_{\alpha 3} + \mu''_{\alpha 3}, \qquad \mu_{3\alpha} = \mu'_{3\alpha} + \mu'_{3\alpha} \qquad (\alpha, \beta = 1, 2).$$

Dla wyznaczenia σ_{33}, σ'_{33}, σ''_{33} oraz $\mu_{3\alpha}$, $\mu'_{3\alpha}$, $\mu''_{3\alpha}$ pozostają słuszne wzory

$$\sigma_{33} = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}(\sigma_{11}+\sigma_{22}), \quad \mu_{3\cdot} = \frac{\gamma-\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\mu_{\alpha 3}, \quad (\alpha = 1, 2). \tag{2.3}$$

Wielkości $\sigma'_{\alpha\beta}$, σ'_{33} są składowymi tensora naprężeń dla odpowiedniego rozwiązania klasycznego. «Primowane» naprężenia momentowe $\mu'_{\alpha 3}$ wyliczamy ze wzorów

$$\begin{aligned} \mu'_{13} &= \frac{\gamma+\varepsilon}{2\mu}(\sigma'_{12,1}-\sigma'_{11,2}+\sigma'_{33,2}), \\ \mu'_{23} &= \frac{\gamma+\varepsilon}{2\mu}(\sigma'_{22,1}-\sigma'_{33,1}-\sigma'_{12,2}). \end{aligned} \tag{2.4}$$

Dla rozwiązania uzupełniającego obejmującego składowe naprężeń siłowych $\sigma''_{\alpha\beta}$, σ''_{33} i naprężeń momentowych $\mu''_{\alpha 3}$, $\mu''_{3\alpha}$ pozostają słuszne wzory w postaci całek Fouriera

$$\begin{aligned} \sigma''_{11} &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\tilde{p}^*(\xi)}{\Delta_0(\xi)}\Big[\big(1-\Delta_0(\xi)\big)(1+|\xi|x_1)e^{-|\xi|x_1}+ \\ &\qquad +2a_0\xi^2\Big(e^{-\rho x_1}-\frac{|\xi|}{\varrho}e^{-|\xi|x_1}\Big)\Big]e^{-i\xi x_2}d\xi, \\ \sigma''_{22} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\tilde{p}^*(\xi)}{\Delta_0(\xi)}\Big[\big(1-\Delta_0(\xi)\big)(-1+|\xi|x_1)e^{-|\xi|x_1}+ \\ &\qquad +2a_0\xi^2\Big(e^{-\rho x_1}-\frac{|\xi|}{\varrho}e^{-|\xi|x_1}\Big)\Big]e^{-i\xi x_2}d\xi, \\ \sigma''_{12} &= -\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\xi}{|\xi|}\frac{\tilde{p}^*(\xi)}{\Delta_0(\xi)}\Big[\big(1-\Delta_0(\xi)\big)|\xi|x_1e^{-|\xi|x_1}+ \\ &\qquad +2a_0\xi^2\frac{|\xi|}{\varrho}(e^{-\rho x_1}-e^{-|\xi|x_1})\Big]e^{-i\xi x_2}d\xi, \\ \sigma''_{21} &= -\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\xi}{|\xi|}\frac{\tilde{p}^*(\xi)}{\Delta_0(\xi)}\Big[\big(1-\Delta_0(\xi)\big)|\xi|x_1e^{-|\xi|x_1}+ \\ &\qquad +2a_0\xi^2\frac{|\xi|}{\varrho}\Big(\frac{\varrho^2}{\xi^2}e^{-\rho x_1}-e^{-|\xi|x_1}\Big)\Big]e^{-i\xi x_2}d\xi \end{aligned} \tag{2.5}$$

oraz

$$\begin{aligned} \mu''_{13} &= -\frac{2ia_0}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\xi\tilde{p}^*(\xi)}{\Delta_0(\xi)}\big[(1-\Delta_0(\xi))e^{-|\xi|x_1}-e^{-\rho x_1}\big]e^{-i\xi x_2}d\xi, \\ \mu''_{23} &= \frac{2a_0}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|\xi|\tilde{p}^*(\xi)}{\Delta_0(\xi)}\Big[(1-\Delta_0(\xi))e^{-|\xi|x_1}-\frac{|\xi|}{\varrho}e^{-\rho x_1}\Big]e^{-i\xi x_2}d\xi, \end{aligned} \tag{2.6}$$

gdzie wprowadzono oznaczenia

$$\varrho = \left(\xi^2 + \frac{1}{l^2}\right)^{1/2}, \quad \Delta_0(\xi) = 1 + 2a_0\xi^2\left(1 - \frac{|\xi|}{\varrho}\right), \tag{2.7}$$

$$l^2 = \frac{(\gamma+\varepsilon)(\mu+\alpha)}{4\alpha\mu}, \quad a_0 = \frac{(\gamma+\varepsilon)(\lambda+2\mu)}{4\mu(\lambda+\mu)}. \tag{2.8}$$

Symbole α, μ, λ, γ, ε oznaczają stałe materiałowe. Wielkość $\tilde{p}^*(\xi)$ oznacza wykładniczą transformację Fouriera [7] wykonaną na funkcji $p^*(x_2)$,

$$\tilde{p}^*(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} p^*(x_2) e^{i\xi x_2} d\xi. \tag{2.9}$$

3. Półprzestrzeń pod działaniem rozłożonych obciążeń normalnych (1), stycznych (2) i momentowych (3)

P r z y p a d e k 1. Obciążenie normalne ($i = 1$).

Warunki brzegowe zapisujemy tu w postaci

$$\sigma_{11}(O, x_2) = -p_1(x_2), \quad \sigma_{12}(O, x_2) = 0, \quad \mu_{13}(O, x_2) = 0. \tag{3.1}$$

Ponadto od rozwiązania określającego $\sigma_{\alpha\beta}$, σ_{33}, $\mu_{\alpha3}$, $\mu_{3\alpha}$ wymaga się, aby dla $(x_1^2+x_2^2)^{1/2} \to \infty$ odpowiednie składowe dążyły do zera. Warunek w nieskończoności uwzględniony jest w rozwiązaniu ogólnym (2.1)÷(2.9), wobec czego przy formułowaniu warunków brzegowych będziemy go pomijać.

Rozwiązanie klasyczne $\sigma'_{\alpha\beta}$ spełnia dwa pierwsze warunki (3.1). Z uwagi na nieparzystość funkcji $p_1(x_2)$ ma ono postać [por. [6], 287]

$$\begin{aligned} \sigma'_{11} &= -\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} (1+\xi x_1) e^{-\xi x_1} \tilde{p}_1(\xi) \sin(\xi x_2) d\xi, \\ \sigma'_{22} &= -\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \tilde{p}_1(\xi)(1-\xi x_1) e^{-\xi x_1} \sin(\xi x_2) d\xi, \\ \sigma'_{12} &= \sigma'_{21} = \frac{2x_1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \tilde{p}_1(\xi) \xi e^{-\xi x_1} \cos(\xi x_2) d\xi. \end{aligned} \tag{3.2}$$

«Primowane» naprężenia momentowe wyznaczamy z (2.4) przy użyciu (2.3) i (3.2)

$$\begin{aligned} \mu'_{13} &= \frac{4a_0}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \tilde{p}_1(\xi) \xi e^{-\xi x_1} \cos(\xi x_2) d\xi, \\ \mu'_{23} &= \frac{4a_0}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \tilde{p}_1(\xi) \xi e^{-\xi x_1} \sin(\xi x_2) d\xi. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Rozwiązanie określające $\sigma''_{\alpha\beta}$ i $\mu''_{\alpha3}$ uzyskujemy ze wzorów (2.5), (2.6) podstawiając

$$\tilde{p}^*(\xi) = \tilde{p}_1(\xi) \tag{3.4}$$

i uwzględniając (1.3). W ten sposób otrzymamy

$$\sigma_{11}'' = -\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{\tilde{p}_1(\xi)}{\Delta_0(\xi)} \Big[\big(1-\Delta_0(\xi)\big)(1+\xi x_1)e^{-\xi x_1} + +2a_0\xi^2\Big(e^{-\rho x_1} - \frac{\xi}{\varrho}e^{-\xi x_1}\Big)\Big]\sin(\xi x_2)d\xi,$$

(3.5)
$$\sigma_{22}'' = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{\tilde{p}_1(\xi)}{\Delta_0(\xi)} \Big[\big(1-\Delta_0(\xi)\big)(-1+\xi x_1)e^{-\xi x_1} + +2a_0\xi^2\Big(e^{-\rho x_1} - \frac{\xi}{\varrho}e^{-\xi x_1}\Big)\Big]\sin(\xi x_2)d\xi,$$

$$\sigma_{12}'' = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{\tilde{p}_1(\xi)}{\Delta_0(\xi)} \Big[\big(1-\Delta_0(\xi)\big)\xi x_1 e^{-\xi x_1} + 2a_0\xi^2\frac{\xi}{\varrho}(e^{-\rho x_1} - e^{-\xi x_1})\Big]\cos(\xi x_2)d\xi,$$

$$\sigma_{21}'' = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{\tilde{p}_1(\xi)}{\Delta_0(\xi)} \Big[\big(1-\Delta_0(\xi)\big)\xi x_1 e^{-\xi x_1} + +2a_0\xi^2\frac{\xi}{\varrho}\Big(\frac{\varrho^2}{\xi^2}e^{-\rho x_1} - e^{-\xi x_1}\Big)\Big]\cos(\xi x_2)d\xi$$

oraz

(3.6)
$$\mu_{13}'' = \frac{4a_0}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{\xi\tilde{p}_1(\xi)}{\Delta_0(\xi)} \big[\big(1-\Delta_0(\xi)\big)e^{-\xi x_1} - e^{-\rho x_1}\big]\cos(\xi x_2)d\xi,$$
$$\mu_{23}'' = \frac{4a_0}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{\xi\tilde{p}_1(\xi)}{\Delta_0(\xi)} \Big[\big(1-\Delta_0(\xi)\big)e^{-\xi x_1} - \frac{\xi}{\varrho}e^{-\rho x_1}\Big]\sin(\xi x_2)d\xi.$$

P r z y p a d e k 2. Obciążenia styczne ($i = 2$).

Warunki brzegowe mają tu postać

(3.7) $$\sigma_{11}(0, x_2) = 0, \quad \sigma_{12}(0, x_2) = -p_2(x_2), \quad \mu_{13}(0, x_2) = 0.$$

Rozwiązanie klasyczne [[6] s. 290] ma postać

(3.8)
$$\sigma_{11}' = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \xi\tilde{p}_2(\xi)x_1 e^{-\xi x_1}\cos(\xi x_2)d\xi,$$
$$\sigma_{22}' = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \tilde{p}_2(\xi)(2-\xi x_1)e^{-\xi x_1}\cos(\xi x_2)d\xi,$$
$$\sigma_{12}' = \sigma_{21}' = -\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \tilde{p}_2(\xi)(1-\xi x_1)e^{-\xi x_1}\sin(\xi x_2)d\xi.$$

«Primowane» naprężenia momentowe

$$
\begin{aligned}
\mu'_{13} &= \frac{4a_0}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \xi \tilde{p}_2(\xi) e^{-\xi x_1} \sin(\xi x_2) d\xi, \\
\mu'_{23} &= -\frac{4a_0}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \xi \tilde{p}_2(\xi) e^{-\xi x_1} \cos(\xi x_2) d\xi.
\end{aligned} \tag{3.9}
$$

Podstawiając do wzorów (2.5) i (2.6)

$$
\tilde{p}^*(\xi) = \frac{i|\xi|}{\xi} \tilde{p}_2(\xi) \tag{3.10}
$$

uzyskujemy dla $\sigma''_{\alpha\beta}$ i $\mu''_{\alpha 3}$

$$
\begin{aligned}
\sigma''_{11} &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{\tilde{p}_2(\xi)}{\Delta_0(\xi)} \Bigg[\big(1-\Delta_0(\xi)\big)(1+\xi x_1) e^{-\xi x_1} + \\
&\qquad + 2a_0 \xi^2 \left(e^{-\rho x_1} - \frac{\xi}{\varrho} e^{-\xi x_1} \right) \Bigg] \cos(\xi x_2) d\xi, \\
\sigma''_{22} &= -\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{\tilde{p}_2(\xi)}{\Delta_0(\xi)} \Bigg[\big(1-\Delta_0(\xi)\big)(-1+\xi x_1) e^{-\xi x_1} + \\
&\qquad + 2a_0 \xi^2 \left(e^{-\rho x_1} - \frac{\xi}{\varrho} e^{-\xi x_1} \right) \Bigg] \cos(\xi x_2) d\xi, \\
\sigma''_{12} &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{\tilde{p}_2(\xi)}{\Delta_0(\xi)} \Bigg[\big(1-\Delta_0(\xi)\big) \xi x_1 e^{-\xi x_1} + \\
&\qquad + 2a_0 \xi^2 \frac{\xi}{\varrho} \left(e^{-\rho x_1} - e^{-\xi x_1} \right) \Bigg] \sin(\xi x_2) d\xi, \\
\sigma''_{21} &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{\tilde{p}_2(\xi)}{\Delta_0(\xi)} \Bigg[\big(1-\Delta_0(\xi)\big) \xi x_1 e^{-\xi x_1} + \\
&\qquad + 2a_0 \xi^2 \frac{\xi}{\varrho} \left(\frac{\varrho^2}{\xi^2} e^{-\rho x_1} - e^{-\xi x_1} \right) \Bigg] \sin(\xi x_2) d\xi
\end{aligned} \tag{3.11}
$$

oraz

$$
\begin{aligned}
\mu''_{13} &= \frac{4a_0}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{\xi \tilde{p}_2(\xi)}{\Delta_0(\xi)} \left[\big(1-\Delta_0(\xi)\big) e^{-\xi x_1} - e^{-\rho x_1} \right] \sin(\xi x_2) d\xi, \\
\mu''_{23} &= -\frac{4a_0}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{\xi \tilde{p}_2(\xi)}{\Delta_0(\xi)} \left[\big(1-\Delta_0(\xi)\big) e^{-\xi x_1} - \frac{\xi}{\varrho} e^{-\rho x_1} \right] \cos(\xi x_2) d\xi.
\end{aligned} \tag{3.12}
$$

P r z y p a d e k 3. Obciążenia momentowe ($i = 3$).

Warunki brzegowe są przyjęte w postaci

$$\sigma_{11}(0, x_2) = 0, \quad \sigma_{12}(0, x_2) = 0, \quad \mu_{13}(0, x_2) = -p_3(x_2). \tag{3.13}$$

Rozwiązanie «primowane», jak łatwo się przekonać, znika,

$$\sigma'_{\alpha\beta} \equiv 0, \quad \mu'_{\alpha 3} \equiv 0 \quad (\alpha, \beta = 1, 2). \tag{3.14}$$

Ostateczna postać rozwiązania wynika ze wzorów (2.5), (2.6) po uwzględnieniu warunku (1.3) i podstawieniu

$$\tilde{p}^*(\xi) = \frac{i}{2a_0 \xi} \tilde{p}_3(\xi). \tag{3.15}$$

Dla naprężeń siłowych otrzymamy

$$\sigma_{11} = -\frac{1}{a_0\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{\tilde{p}_3(\xi)}{\xi \Delta_0(\xi)} \Big[\big(1-\Delta_0(\xi)\big)(1+\xi x_1) e^{-\xi x_1} + $$
$$+ 2a_0 \xi^2 \Big(e^{-\rho x_1} - \frac{\xi}{\varrho} e^{-\xi x_1} \Big) \Big] \cos(\xi x_2)\, d\xi,$$

$$\sigma_{22} = -\frac{1}{a_0\sqrt{2\pi}} \frac{\tilde{p}_3(\xi)}{\xi \Delta_0(\xi)} \Big[\big(1-\Delta_0(\xi)\big)(-1+\xi x_1) e^{-\xi x_1} + $$
$$+ 2a_0 \xi^2 \Big(e^{-\rho x_1} - \frac{\xi}{\varrho} e^{-\xi x_1} \Big) \Big] \cos(\xi x_2)\, d\xi,$$

(3.16)

$$\sigma_{12} = \frac{1}{a_0\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{\tilde{p}_3(\xi)}{\xi \Delta_0(\xi)} \Big[\big(1-\Delta_0(\xi)\big) \xi x_1 e^{-\xi x_1} + $$
$$+ 2a_0 \xi^2 \frac{\xi}{\varrho} (e^{-\rho x_1} - e^{-\xi x_1}) \Big] \sin(\xi x_2)\, d\xi,$$

$$\sigma_{21} = \frac{1}{a_0\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{\tilde{p}_3(\xi)}{\xi \Delta_0(\xi)} \Big[\big(1-\Delta_0(\xi)\big) \xi x_1 e^{-\xi x_1} + $$
$$+ 2a_0 \xi^2 \frac{\xi}{\varrho} \Big(\frac{\varrho^2}{\xi^2} e^{-\rho x_1} - e^{-\xi x_1} \Big) \Big] \sin(\xi x_2)\, d\xi,$$

dla naprężeń momentowych zaś mamy:

$$\mu_{13} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{\tilde{p}_3(\xi)}{\Delta_0(\xi)} \big[\big(1-\Delta_0(\xi)\big) e^{-\xi x_1} - e^{-\rho x_1} \big] \sin(\xi x_2)\, d\xi,$$

(3.17)

$$\mu_{23} = -\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{\tilde{p}_3(\xi)}{\Delta_0(\xi)} \Big[\big(1-\Delta_0(\xi)\big) e^{-\xi x_1} - \frac{\xi}{\varrho} e^{-\rho x_1} \Big] \cos(\xi x_2)\, d\xi.$$

4. Osobliwość naprężeń spowodowana obciążeniami $p_i(x_2)$ ($i = 1, 2, 3$)

Badanie osobliwości naprężeń dla obciążeń nieciągłych $p_i(x_2)$ ($i = 1, 2, 3$) sprowadza się do badania funkcji podcałkowych we wzorach (3.5), (3.6), (3.11), (3.12), (3.16), (3.17) w punkcie $(0, 0; \xi)$ przy $\xi \to \infty$, o ile nieciągłość $p_i(x_2)$ zjawia się tylko w punkcie $x_2 = 0$. Całki we wzorach (3.2), (3.3), (3.8), (3.9), jak się przekonamy, dadzą się wyrazić w postaci zamkniętej. W celu wyznaczenia charakteru osobliwości naprężeń wykorzystamy następujące rozwinięcia asymptotyczne:

$$\varrho = \sqrt{\xi^2 + \frac{1}{l^2}} = \xi + \frac{1}{2\xi l^2} + 0(\xi^{-3}) \quad \text{dla} \quad \xi \to \infty \tag{4.1}$$

oraz

$$\begin{aligned} \Delta_0(\xi) &= 1 + 2a_0\xi^2\left(1 - \frac{\xi}{\varrho}\right) = 1 + \frac{a_0}{l^2} + 0(\xi^{-2}), \\ e^{-\varrho x_1} &= e^{-\xi x_1}\left[1 - \frac{x_1}{2\xi l^2} + \frac{x_1^2}{8\xi^2 l^2} + 0(\xi^{-3})\right] \quad \text{dla} \quad \xi \to \infty. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Transformantę sinusową obciążenia $p_i(\xi)$ przedstawiamy w postaci wzoru [8]

$$\tilde{p}_i(\xi) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{p_i^0}{\xi} + 0(\xi^{-3}), \quad \text{dla } \xi \to \infty. \tag{4.3}$$

Symbol $0(\xi^{-n})$ oznacza wyrażenie, które przy $\xi \to \infty$ zachowuje się jak ξ^{-n}.

Wykorzystując rozwinięcia (4.1)÷(4.3) i biorąc pod uwagę tylko te części funkcji podcałkowych, które przy $x_1 = x_2 = 0$ i przy $\xi \to \infty$ są rzędu $0(\xi^{-1})$ lub większego [por. [3÷5], [7]], oraz korzystając z [9], otrzymamy

P r z y p a d e k 1.

Naprężenia siłowe

$$\begin{aligned} \sigma_{11}(x_1, x_2) &= -\frac{2p_1^0}{\pi}\left(\tan^{-1}\frac{x_2}{x_1} + \frac{x_1 x_2}{r^2}\right) + \frac{4p_1^0}{\pi}\frac{a_0}{a_0 + l^2}\frac{x_1 x_2}{r^2} + 0(1), \\ \sigma_{22}(x_1, x_2) &= -\frac{2p_1^0}{\pi}\left(\tan^{-1}\frac{x_2}{x_1} - \frac{x_1 x_2}{r^2}\right) + \\ &\quad + \frac{4p_1^0}{\pi}\frac{a_0}{a_0 + l^2}\left(\tan^{-1}\frac{x_2}{x_1} - \frac{x_1 x_2}{r^2}\right) + 0(1), \\ \sigma_{12}(x_1, x_2) &= \frac{2p_1^0}{\pi}\frac{x_1^2}{r^2} - \frac{4p_1^0}{\pi}\frac{a_0}{a_0 + l^2}\frac{x_1^2}{r^2} + 0(1), \\ \sigma_{21}(x_1, x_2) &= \frac{2p_1^0}{\pi}\frac{x_1^2}{r^2} - \frac{4p_1^0}{\pi}\frac{a_0}{a_0 + l^2}\left(\frac{x_1^2}{2r^2} + \log r\right) + 0(1). \end{aligned} \tag{4.4}$$

Naprężenie momentowe

$$\begin{aligned} \mu_{13}(x_1, x_2) &= -\frac{2p_1^0}{\pi}\frac{a_0}{a_0 + l^2}x_1 \log r + 0(1), \\ \mu_{23}(x_1, x_2) &= \frac{2p_1^0}{\pi}\frac{a_0}{a_0 + l^2}x_1 \tan^{-1}\frac{x_2}{x_1} + 0(1). \end{aligned} \tag{4.5}$$

P r z y p a d e k 2.
Naprężenie siłowe

$$\sigma_{11}(x_1, x_2) = \frac{2p_2^0}{\pi}\frac{x_1^2}{r^2} - \frac{4p_2^0}{\pi}\frac{a_0}{a_0+l^2}\frac{x_1^2}{r^2} + 0(1),$$

$$\sigma_{22}(x_1, x_2) = -\frac{4p_2^0}{\pi}\left(\log r + \frac{x_1^2}{2r^2}\right) + \frac{4p_2^0}{\pi}\frac{a_0}{a_0+l^2}\left(\log r + \frac{x_1^2}{r^2}\right) + 0(1),$$

$$\sigma_{12}(x_1, x_2) = -\frac{2p_2^0}{\pi}\left(\tan^{-1}\frac{x_2}{x_1} - \frac{x_1 x_2}{r^2}\right) - \frac{4p_2^0}{\pi}\frac{a_0}{a_0+l^2}\frac{x_1 x_2}{r^2} + 0(1), \tag{4.6}$$

$$\sigma_{21}(x_1, x_2) = -\frac{2p_2^0}{\pi}\left(\tan^{-1}\frac{x_2}{x_1} - \frac{x_1 x_2}{r^2}\right) + $$

$$+ \frac{4p_2^0}{\pi}\frac{a_0}{a_0+l^2}\left(\tan^{-1}\frac{x_2}{x_1} - \frac{x_1 x_2}{2r^2}\right) + 0(1).$$

Naprężenia momentowe

$$\mu_{13}(x_1, x_2) = \frac{2p_2^0}{\pi}\frac{a_0}{a_0+l^2}\frac{x_1 x_2}{r^2} + 0(1),$$

$$\mu_{23}(x_1, x_2) = -\frac{2p_2^0}{\pi}\frac{a_0}{a_0+l^2}\frac{x_1^2}{r^2} + 0(1). \tag{4.7}$$

P r z y p a d e k 3.
Naprężenia siłowe

$$\sigma_{11}(x_1, x_2) = -\frac{2p_3^0}{\pi}\frac{1}{a_0+l^2}x_1 \log r + 0(1),$$

$$\sigma_{22}(x_1, x_2) = -\frac{2p_3^0}{\pi}\frac{1}{a_0+l^2}x_1 \log r + 0(1), \tag{4.8}$$

$$\sigma_{12}(x_1, x_2) = -\frac{2p_3^0}{\pi}\frac{1}{a_0+l^2}x_1 \tan^{-1}\frac{x_2}{x_1} + 0(1),$$

$$\sigma_{21}(x_1, x_2) = -\frac{p_3^0}{\pi}\frac{1}{a_0+l^2}x_1 \tan^{-1}\frac{x_2}{x_1} + 0(1).$$

Naprężenia momentowe

$$\mu_{13}(x_1, x_2) = -\frac{2p_3^0}{\pi}\tan^{-1}\frac{x_2}{x_1} + 0(1),$$

$$\mu_{23}(x_1, x_2) = -\frac{2p_3^0}{\pi}\log r + 0(1). \tag{4.9}$$

We wzorach (4.4)÷(4.9) symbol 0(1) oznacza część regularną rozwiązania.

Ponadto zachodzi

$$-\frac{\pi}{2} < \tan^{-1}\frac{x_2}{x_1} < \frac{\pi}{2}, \qquad r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}.$$

W przypadku 1 ze wzorów (4.4) i (4.5) widać, że dla $r \to 0$ osobliwość rzędu $0(\log r)$ wykazuje składowa σ_{21}. Pozostałe naprężenia są rzędu $0(1)$.

W przypadku 2 osobliwość logarytmiczną wykazują składowe σ_{22}, σ_{33} (wzory (2.3) i $(4.6)_2$). Natomiast pozostałe składowe pozostają skończone.

W przypadku 3 (wzory (4.8) i (4.9)) składowe naprężeń siłowych oraz μ_{13} są rzędu $0(1)$, natomiast dla $r \to 0$ μ_{23} i μ_{32} wykazują osobliwość logarytmiczną (wzór $(2.3)_2$ i $(4.9)_2$).

Wprowadźmy biegunowy układ współrzędnych (r, θ):

$$x_1 = r\sin\theta, \quad x_2 = r\cos\theta, \quad \tan^{-1}\frac{x_2}{x_1} = \frac{\pi}{2} - \theta \quad (0 \leqslant \theta \leqslant \pi) \tag{4.10}$$

i zapiszmy wzory (4.4)÷(4.9) w tym układzie.

Przypadek 1.

Naprężenia siłowe

$$\begin{aligned}
\sigma_{11}(r,\theta) &= -\frac{p_1^0}{\pi}(\pi-2\theta+\sin 2\theta)+\frac{2p_1^0}{\pi}\frac{a_0}{a_0+l^2}\sin 2\theta+0(1),\\
\sigma_{22}(r,\theta) &= -\frac{p_1^0}{\pi}(\pi-2\theta-\sin 2\theta)+\frac{2p_1^0}{\pi}\frac{a_0}{a_0+l^2}(\pi-2\theta-\sin 2\theta)+0(1),\\
\sigma_{12}(r,\theta) &= \frac{2p_1^0}{\pi}\sin^2\theta-\frac{4p_1^0}{\pi}\frac{a_0}{a_0+l^2}\sin^2\theta+0(1),\\
\sigma_{21}(r,\theta) &= \frac{2p_1^0}{\pi}\sin^2\theta-\frac{4p_1^0}{\pi}\frac{a_0}{a_0+l^2}\left(\log r+\frac{1}{2}\sin^2\theta\right)+0(1).
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Naprężenia momentowe

$$\begin{aligned}
\mu_{13}(r,\theta) &= -\frac{2p_1^0}{\pi}\frac{a_0}{a_0+l^2}r\sin\theta\log r+0(1),\\
\mu_{23}(r,\theta) &= \frac{2p_1^0}{\pi}\frac{a_0}{a_0+l^2}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)r\sin\theta+0(1).
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Przypadek 2.

Naprężenia siłowe

$$\begin{aligned}
\sigma_{11}(r,\theta) &= \frac{2p_2^0}{\pi}\sin^2\theta-\frac{4p_2^0}{\pi}\frac{a_0}{a_0+l^2}\sin^2\theta+0(1),\\
\sigma_{22}(r,\theta) &= -\frac{4p_2^0}{\pi}\left(\log r+\frac{1}{2}\sin^2\theta\right)+\frac{4p_2^0}{\pi}\frac{a_0}{a_0+l^2}(\log r+\sin^2\theta)+0(1),\\
\sigma_{12}(r,\theta) &= -\frac{p_0^2}{\pi}(\pi-2\theta-\sin 2\theta)-\frac{2p_2^0}{\pi}\frac{a_0}{a_0+l^2}\sin 2\theta+0(1),\\
\sigma_{21}(r,\theta) &= -\frac{p_2^0}{\pi}(\pi-2\theta-\sin 2\theta)-\frac{2p_2^0}{\pi}\frac{a_0}{a_0+l^2}\left(\frac{1}{2}\sin 2\theta-\pi+2\theta\right)+0(1).
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Naprężenia momentowe

$$
(4.14)\qquad \begin{aligned}
\mu_{13}(r,\theta) &= \frac{p_2^0}{\pi}\frac{a_0}{a_0+l^2}\sin 2\theta+0(1),\\
\mu_{23}(r,\theta) &= -\frac{2p_2^0}{\pi}\frac{a_0}{a_0+l^2}\sin^2\theta+0(1).
\end{aligned}
$$

P r z y p a d e k 3.
Naprężenia siłowe

$$
(4.15)\qquad \begin{aligned}
\sigma_{11}(r,\theta) &= -\frac{2p_3^0}{\pi}\frac{1}{a_0+l^2}r\sin\theta\log r+0(1),\\
\sigma_{22}(r,\theta) &= -\frac{2p_3^0}{\pi}\frac{1}{a_0+l^2}r\sin\theta\log r+0(1),\\
\sigma_{12}(r,\theta) &= -\frac{2p_3^0}{\pi}\frac{1}{a_0+l^2}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)r\sin\theta+0(1),\\
\sigma_{21}(r,\theta) &= -\frac{p_3^0}{\pi}\frac{1}{a_0+l^2}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)r\sin\theta+0(1).
\end{aligned}
$$

Naprężenia momentowe

$$
(4.16)\qquad \begin{aligned}
\mu_{13}(r,\theta) &= -\frac{2p_3^0}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+0(1),\\
\mu_{23}(r,\theta) &= -\frac{2p_3^0}{\pi}\log r+0(1).
\end{aligned}
$$

Rozpatrzmy przypadki graniczne ($\alpha\to 0$ i $\alpha\to\infty$) korzystając ze związków

$$
(4.17)\qquad \lim_{\alpha\to 0}\frac{a_0}{a_0+l^2}=0,\qquad \lim_{\alpha\to\infty}\frac{a_0}{a_0+l^2}=\frac{2(1-\nu)}{(3-2\nu)}.
$$

Dla $\alpha\to 0$, zarówno dla przypadku ($i=1$) jak i dla ($i=2$) zachodzi

$$
(4.18)\qquad \sigma''_{\alpha\beta}\to 0,\qquad \mu_{\cdot 3}\to 0\qquad (\alpha,\beta=1,2).
$$

We wzorach (4.4), (4.6), (4.11), (4.13) pozostają tylko naprężenia $\sigma'_{\alpha\beta}$ reprezentujące odpowiednie rozwiązania klasyczne (por. [6]). Gdy $\alpha\to\infty$ otrzymujemy wyniki teorii ze związanymi obrotami [por. [4]]:

P r z y p a d e k 1 ($\alpha=0$).
Naprężenia siłowe

$$
(4.19)\qquad \begin{aligned}
\sigma_{11}(r,\theta) &= -\frac{p_1^0}{\pi}\left(\pi-2\theta-\frac{1-2\nu}{3-2\nu}\sin 2\theta\right)+0(1),\\
\sigma_{22}(r,\theta) &= -\frac{p_1^0}{\pi}\frac{1-2\nu}{3-2\nu}(-\pi+2\theta+\sin 2\theta)+0(1),\\
\sigma_{12}(r,\theta) &= -\frac{2p_1^0}{\pi}\frac{1-2\nu}{3-2\nu}\sin^2\theta+0(1),\\
\sigma_{21}(r,\theta) &= -\frac{8p_1^0}{\pi}\frac{1-\nu}{3-2\nu}\log r+0(1).
\end{aligned}
$$

Naprężenia momentowe

$$\mu_{13}(r, \theta) = 0(1), \quad \mu_{23}(r, \theta) = 0(1). \tag{4.20}$$

P r z y p a d e k 2 ($\alpha = \infty$).

Naprężenia siłowe

$$\begin{aligned}
\sigma_{11}(r, \theta) &= -\frac{2p_2^0}{\pi}\frac{1-2\nu}{3-2\nu}\sin^2\theta+0(1),\\
\sigma_{22}(r, \theta) &= -\frac{4p_2^0}{\pi}\frac{1}{3-2\nu}\log r+0(1),\\
\sigma_{12}(r, \theta) &= -\frac{p_2^0}{\pi}\left(\pi-2\theta+\frac{1-2\nu}{3-2\nu}\sin^2 2\theta\right)+0(1),\\
\sigma_{21}(r, \theta) &= -\frac{p_2^0}{\pi}\frac{1-2\nu}{3-2\nu}(-\pi+2\theta+\sin 2\theta)+0(1).
\end{aligned} \tag{4.21}$$

Naprężenia momentowe

$$\mu_{13}(r, \theta) = 0(1), \quad \mu_{23}(r, \theta) = 0(1). \tag{4.22}$$

Dyskusja wzorów (4.15) i (4.16) dotycząca przypadku (3) wymaga zanotowania granic

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{1}{a_0+l^2} = 0, \quad \lim_{\alpha\to\infty}\frac{1}{a_0+l^2} = \frac{1}{(3-2\nu)}\frac{1}{(l^*)^2}; \tag{4.23}$$

l^* oznacza tu wymiarową stałą sprężystości z teorii ze związanymi obrotami. Dla $\alpha \to 0$ otrzymujemy ośrodek mikropolarny przenoszący tylko naprężenia momentowe (wzory (4.16)).

Podstawiając $(4.23)_2$ do wzorów (4.15) otrzymujemy, w połączeniu z niezmienionymi wzorami (4.16), rozwiązanie teorii ze związanymi obrotami w układzie (r, θ) lub wzory (4.8), (4.9) w układzie (x_1, x_2).

5. Uwagi końcowe

W klasycznej teorii sprężystości w punkcie nieciągłości obciążenia $p_\alpha(x_2)$ ($\alpha = 1, 2$) wszystkie składowe naprężeń są skończone dla przypadku 1, natomiast dla przypadku 2 tylko składowe σ_{22} i σ_{33} wykazują osobliwość logarytmiczną przy $r \to 0$. Wszystkie składowe natomiast (w obu przypadkach) są nieciągłe w początku układu współrzędnych w tym sensie, że przy ustalonych θ dla $r \to 0$ otrzymujemy różne wartości naprężeń.

W teorii mikropolarnej, analizując przypadek 1 i 2, oprócz nieciągłości naprężeń w punkcie skoku obciążenia $p_\alpha(x_2)$ i osobliwości logarytmicznej składowych σ_{22}, σ_{33} (przypadek 2), zwraca uwagę logarytmiczna osobliwość składowej σ_{21} (przypadek 1) przy $r \to 0$. Stanowi to istotną różnicę w odniesieniu do rozwiązania klasycznego. Pozostałe składowe naprężeń zarówno siłowych jak i momentowych są rzędu 0(1).

W stosunku do teorii ze związanymi obrotami teoria mikropolarnej sprężystości nie wnosi żadnych różnic odnośnie rzędu osobliwości składowych naprężeń. Różnica tkwi we współczynnikach intensywności i w możliwości otrzymania przypadków granicznych ($\alpha = 0$, $\alpha = \infty$). Jak widać ze wzorów (4.4)÷(4.7) oraz ze wzorów (4.11)÷(4.14), współczynniki intensywności osobliwości teorii mikropolarnej odpowiadające naprężeniom $\sigma''_{\alpha\beta}$, $\mu''_{\alpha 3}$ są bezwymiarowe i zależą od stałych materiałowych. Nie można tego powiedzieć o osobliwościach teorii ze związanymi obrotami, gdzie współczynniki intensywności osobliwości naprężeń zależą (przypadek 1, 2) od wymiarowej stałej sprężystości l^* (por. [3÷5]). W teorii tej przejście z $l^* \to 0$ nie prowadzi do rozwiązania klasycznego. Szczegółowe omówienie i wyjaśnienie tego faktu znaleźć można w pracy [3] na 41.

Oddzielnego omówienia wymaga przypadek 3. Nieklasyczny charakter obciążenia (warunki brzegowe (3.13)) powoduje, że rozwiązanie klasyczne jest tożsamościowe równe zeru i rozwiązanie teorii mikropolarnej jest określone przez naprężenia z dwiema kreskami. Rozwiązanie to dla $\alpha \to 0$ nie dąży do zera jak w przypadku 1 i 2 (pozostają naprężenia momentowe różne od zera) i nie prowadzi do rozwiązania dla klasycznego ośrodka Hooke'a, lecz do pewnego ośrodka hipotetycznego, w którym możliwe są tylko obroty φ_3. Rezultat ten jest usprawiedliwiony tym, że obciążenie momentowe na brzegu półprzestrzeni powinno być zrównoważone pewnym polem naprężeń momentowych w jej wnętrzu.

Zwraca tu również uwagę fakt, że współczynnik intensywności osobliwości naprężeń momentowych [wzory (4.9) lub (4.16)] jest bezwymiarowy i nie zależy od stałych materiałowych, natomiast dla naprężeń siłowych współczynnik ten [wzory (4.8) lub (4.15)] zależy od stałych materiałowych i przestaje być bezwymiarowy. Przejście do teorii ze związanymi obrotami ($\alpha \to \infty$) daje dla naprężeń siłowych współczynnik intensywności zależny od stałej sprężystości l^*. Zauważmy wreszcie, że dla $r \to 0$ wzory (4.15) i (4.16) implikują osobliwość logarytmiczną dla μ_{23} i μ_{32} oraz osobliwość rzędu 0(1) dla μ_{13} i μ_{31}.

Literatura cytowana w tekście

1. W. NOWACKI, *Teoria niesymetrycznej sprężystości*, PWN, Warszawa 1971.
2. W. NOWACKI, *Plane problems of micropolar elasticity*, Arch. Mech. Stos., 5, **23** (1971), 587—611.
3. M. SOKOŁOWSKI, *O teorii naprężeń momentowych*, PWN, Warszawa 1972.
4. D. B. BOGY and ELI STERNBERG, *The effect of couple-stresses on singularities due to discontinuous loadings*, Int. J. Solids Structures, 3, 757 (1967).
5. ROKURO MUKI and ELI STERNBERG, *The influence of couple-stresses on singular stress concentrations in elastic solids*, Z. angew. Math. Phys., 16, 611 (1965).
6. W. NOWACKI, *Teoria sprężystości*, PWN, Warszawa 1970.
7. I. N. SNEDDON, *Fourier transforms*, Mc Graw-Hill Book Company, Inc. New York—Toronto—London 1951.
8. A. ERDELYI, *Rozwinięcie asymptotyczne*, PWN, Warszawa 1967.
9. И. С. ГРАДШТЕЙН, И. М. РИЖИК, *Таблицы интегралов, сумм, рядов, произведений*, Изд. Наука, Москва 1971.
10. J. DYSZLEWICZ, S. MATYSIAK, *Osobliwość naprężeń siłowych i naprężeń momentowych w ciele mikropolarnym wywołana obciążeniami skupionymi* (I), Mech. Teor. i Stos., 4, **11** (1973), 363—391.

Р е з ю м е

СИНГУЛЯРНОСТИ НАПРЯЖЕНИЙ В ЛИНЕЙНОЙ МИКРОПОЛЯРНОЙ СРЕДЕ, ВЫЗВАННЫЕ РАЗРЫВАМИ НАГРУЗОК (II)

В рамах линейной микрополярной среды рассмотрена статическая задача об упругом полупространстве в плоском деформированном состоянии, описываемом векторами $\mathbf{u}(u_1, u_2, 0)$ и $\boldsymbol{\varphi}(0, 0, \varphi_3)$ на край полупространства воздействуют статические распределенные разрывные нагрузки (касательные, нормальные и моментные). Дан анализ характера особенностей в силовых и моментных напряжениях в точке разрыва нагрузок. Рассмотрены предельные случаи классической упругости ($\alpha = 0$) и связанных вращений ($\alpha = \infty$).

Summary

STRESS SINGULARITY IN A LINEAR MICROPOLAR MEDIUM PRODUCED BY DISCONTINUOUS LOADS

The static problem of a micropolar elastic half-space in a plane state of strain (represented by the vectors $\mathbf{u}$ $(u_1, u_2, 0)$ and $\boldsymbol{\varphi}$ $(0, 0, \varphi_3)$ due to discontonuous (normal, tangential and couple) loadings at the boundary is considered. For these loadings, the singularites of stresses and couple-stresses are discussed. Two limiting cases are considered: $\alpha \to 0$ (classical theory of elasticity) and $\alpha \to \infty$ (couple-stress theory of elasticity).

INSTYTUT MECHANIKI UNIWERSYTETU WARSZAWSKIEGO

Praca została złożona w Redakcji dnia 5 marca 1973 r.