

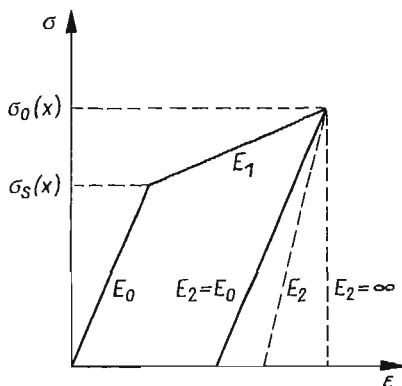
DYNAMIKA SZTYWNEJ PŁYTY SPOCZYWAJĄCEJ NA SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNYM
PODŁOŻU ZE ZMIENNĄ GRANICĄ PLASTYCZNOŚCI

CZĘŚĆ II. SPRĘŻYSTE ODCIĄŻENIE

JERZY BAUER (WROCŁAW), EDWARD WŁODARCZYK (WARSZAWA)

1. Wstęp

W niniejszej drugiej części pracy rozwiążemy badany w [1] problem dla ośrodka (gruntu) ze sprężystym odcieżeniem (przyjmujemy model Prandtla — rys. 1). Matematyczny opis



Rys. 1

problemu przedstawiają równania (2.1)–(2.7) z Cz. I [1], z tym, że związek fizyczny w strefie odcieżenia (2.4) w [1] przyjmuje obecnie postać

$$(1.1) \quad \sigma(\varepsilon, x) = E_2 \varepsilon + [\sigma_s^0 + f(x)] \left(\frac{E_2}{E_0} - \frac{E_2}{E_1} \right) - \sigma_0(x) \frac{E_2 - E_1}{E_1},$$

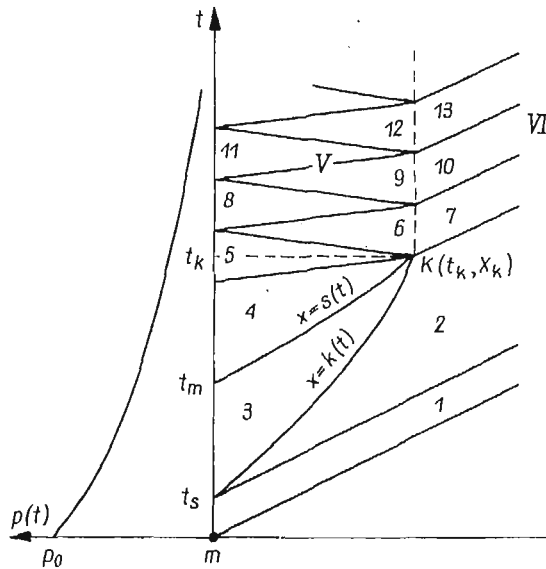
gdzie $\sigma_0(x)$ oznacza napężenie na froncie fali odcieżenia, natomiast E_2 jest modułem odcieżenia. Pozostałe oznaczenia, jak w [1].

Otrzymane w niniejszej pracy wyniki po porównaniu ich z rezultatami części I pozwolą ustalić wnioski, przy jakich wartościach modułu odcieżenia E_2 można stosować w praktyce inżynierskiej bardziej efektywny w obliczeniach model gruntu ze sztywnym odcieżeniem. Obecnie przejdziemy do konstrukcji rozwiązania problemu.

2. Konstrukcja rozwiązania problemu

Dla sformułowanego w [1] problemu, uzupełnionego sprężystym odciążeniem (1.1) falowy obraz rozwiązania przyjmuje postać pokazaną na rys. 2. Analityczne rozwiązanie problemu kształtuje się następująco:

Strefa obciążenia. Strefa obciążenia obejmuje obszary 1, 2 i 3. Rozwiązanie problemu w tych obszarach skonstruowano w [1]. Dlatego ograniczymy się tutaj do przytoczenia



Rys. 2

gotowych wzorów na napężenie i prędkość w obszarze 3 oraz równania określające front plastycznej fali obciążenia, z których będziemy w dalszym ciągu korzystać przy konstrukcji rozwiązania w strefie odciążenia. Zgodnie z [1] mamy

$$(2.1) \quad \sigma_3(x, t) = -\sigma_s^0 + \frac{E_1}{a_1} Lf(x_1) + \frac{E_1}{a_1} Nf(x_2),$$

$$v_3(x, t) = \frac{a_0}{E_0} \sigma_s^0 - Lf(x_1) + Nf(x_2),$$

gdzie

$$x_1 = k\left(t + \frac{x_1 - x}{a_1}\right), \quad x_2 = k\left(t - \frac{x_2 - x}{a_1}\right), \quad L = -\frac{1}{2}\left(\frac{a_0}{E_0} + \frac{a_1}{E_1}\right), \quad N = \frac{1}{2}\left(\frac{a_0}{E_0} - \frac{a_1}{E_1}\right)$$

oraz

$$(2.2) \quad -\sigma_s^0 + \frac{E_1}{a_1} Lf(x_1) + \frac{E_1}{a_1} Nf(x_2) =$$

$$= m \left[-L \frac{a_1 k' \left(t + \frac{x_1}{a_1} \right)}{a_1 - k' \left(t + \frac{x_1}{a_1} \right)} f'(x_1) + N \frac{a_1 k' \left(t - \frac{x_2}{a_1} \right)}{a_1 + k' \left(t - \frac{x_2}{a_1} \right)} f'(x_2) \right] - p(t),$$

gdzie obcnie

$$x_1 = k \left(t + \frac{x_1}{a_1} \right), \quad x_2 = k \left(t - \frac{x_2}{a_1} \right).$$

Strefa sprężystego odciążenia. Ruchem ośrodka zgodnie z (2.1) i (2.2) z [1] oraz (1.1) rządzi tutaj następujące równanie:

$$(2.3) \quad u_{,tt} - a_2^2 u_{,xx} = f'(x) \left(\frac{E_2}{E_0} - \frac{E_2}{E_1} \right) \frac{1}{\rho_0} - \sigma'_0(x) \frac{E_2 - E_1}{\rho_0 E_1}$$

o ogólnym rozwiązaniu

$$(2.4) \quad u(x, t) = \Phi \left(t - \frac{x}{a_2} \right) + \Psi \left(t + \frac{x}{a_2} \right) - \int_0^x \left\{ \left(\frac{1}{E_0} - \frac{1}{E_1} \right) f(\xi) - \right. \\ \left. - \frac{E_2 - E_1}{E_1 E_2} [\sigma_0(\xi) - \sigma_m] \right\} d\xi,$$

gdzie

$$\sigma_m = \sigma_0(0), \quad a_2 = \sqrt{E_2 / \rho_0},$$

Φ i Ψ — dowolne, różniczkowalne funkcje.

Zajmiemy się obecnie konstrukcją rozwiązania w obszarze 4. Wykorzystując (2.4), pole naprężeń i prędkości zapiszemy następującymi wzorami:

$$(2.5) \quad \sigma_4(x, t) = -\frac{E_2}{a_2} \Phi'_4 \left(t - \frac{x}{a_2} \right) + \frac{E_2}{a_2} \Psi'_4 \left(t + \frac{x}{a_2} \right) - \sigma_m \frac{E_2 - E_1}{E_1} + \sigma_s^0 \left(\frac{E_2}{E_0} - \frac{E_2}{E_1} \right), \\ v_4(x, t) = \Phi'_4 \left(t - \frac{x}{a_2} \right) + \Psi'_4 \left(t + \frac{x}{a_2} \right).$$

Z warunków ciągłości naprężeń i prędkości na froncie fali odciążenia $x = s(t)$ otrzymujemy

$$(2.6) \quad -\Phi'_4 \left[t - \frac{s(t)}{a_2} \right] = \sigma_m \frac{E_2 - E_1}{2E_1 E_2} a_2 - \frac{1}{2} \sigma_s^0 a_2 \left(\frac{1}{E_0} - \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} + \frac{a_0}{E_0 a_2} \right) + \\ + \frac{1}{2} L \left(\frac{a_1}{a_2} + 1 \right) f(x_1) + \frac{1}{2} N \left(\frac{a_1}{a_2} - 1 \right) f(x_2), \\ \Psi'_4 \left[t + \frac{s(t)}{a_2} \right] = \sigma_m \frac{E_2 - E_1}{2E_1 E_2} a_2 - \frac{1}{2} \sigma_s^0 a_2 \left(\frac{1}{E_0} - \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} - \frac{a_0}{E_0 a_2} \right) + \\ + \frac{1}{2} L \left(\frac{a_1}{a_2} - 1 \right) f(x_1) + \frac{1}{2} N \left(\frac{a_1}{a_2} + 1 \right) f(x_2),$$

gdzie

$$L = -\frac{1}{2} \left(\frac{a_0}{E_0} + \frac{a_1}{E_1} \right), \quad N = \frac{1}{2} \left(\frac{a_0}{E_0} - \frac{a_1}{E_1} \right), \\ x_1 = k \left[t - \frac{s(t)}{a_1} + \frac{x_1}{a_1} \right], \quad x_2 = \left[t + \frac{s(t)}{a_1} - \frac{x_2}{a_1} \right].$$

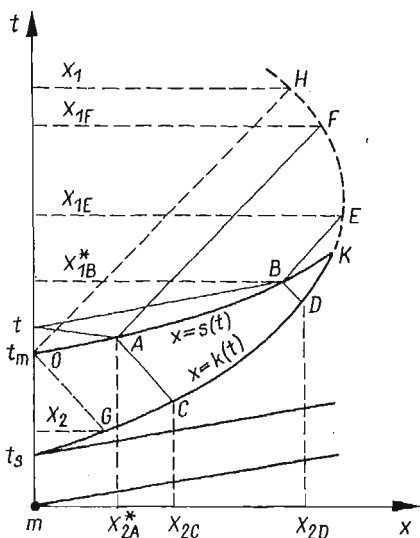
Załóżmy chwilowo, że funkcje $s(t)$ i $k(t)$ są znane. Wówczas naprężenie $\sigma_4(x, t)$ i prędkość $v_4(x, t)$ można przedstawić w następującej postaci:

$$(2.7) \quad \begin{aligned} \sigma_4(x, t) = & -\sigma_s^0 + \frac{1}{2}L\left(\frac{a_1}{a_2} + 1\right)\frac{E_2}{a_2}f(x_{1E}) + \frac{1}{2}N\left(\frac{a_1}{a_2} - 1\right)\frac{E_2}{a_2}f(x_{2D}) + \\ & + \frac{1}{2}L\left(\frac{a_1}{a_2} - 1\right)\frac{E_2}{a_2}f(x_{1F}) + \frac{1}{2}N\left(\frac{a_1}{a_2} + 1\right)\frac{E_2}{a_2}f(x_{2C}), \\ v_4(x, t) = & \sigma_s^0 \frac{a_0}{E_0} - \frac{1}{2}L\left(\frac{a_1}{a_2} + 1\right)f(x_{1E}) - \frac{1}{2}N\left(\frac{a_1}{a_2} - 1\right)f(x_{2D}) + \\ & + \frac{1}{2}L\left(\frac{a_1}{a_2} - 1\right)f(x_{1F}) + \frac{1}{2}N\left(\frac{a_1}{a_2} + 1\right)f(x_{2C}), \end{aligned}$$

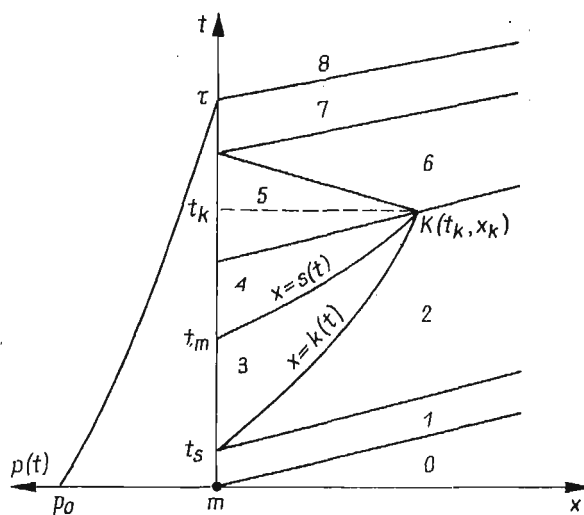
gdzie

$$(2.8) \quad \begin{aligned} x_{1B}^* &= s\left(t - \frac{x}{a_2} + \frac{x_{1B}^*}{a_2}\right), & x_{2A}^* &= s\left(t + \frac{x}{a_2} - \frac{x_{2A}^*}{a_2}\right), \\ x_{1E} &= k\left(t - \frac{x_{1B}^*}{a_1} + \frac{x_{1B}^*}{a_2} + \frac{x_{1E}}{a_1}\right), & x_{2D} &= k\left(t + \frac{x_{1B}^*}{a_1} + \frac{x_{1B}^*}{a_2} - \frac{x_{2D}}{a_1}\right), \\ x_{1F} &= k\left(t - \frac{x_{2A}^*}{a_1} - \frac{x_{2A}^*}{a_2} + \frac{x_{1F}}{a_1}\right), & x_{2C} &= k\left(t + \frac{x_{2A}^*}{a_1} - \frac{x_{2A}^*}{a_2} - \frac{x_{2C}}{a_1}\right). \end{aligned}$$

Interpretacja geometryczna tych wielkości podana jest na rys. 3. Argumenty w nawiasach wyrażeń (2.8) można uważać jako współrzędne na osi t , kolejno punktów $A, B,$



Rys. 3



Rys. 4

C, D, E, F . Przyspieszenie na brzegu $\dot{v}_4(0, t)$ otrzymujemy różniczkując wyrażenie (2.7)₂ po podstawieniu $x = 0$ we wzorach (2.8)_{1,2}.

Uwzględnienie tak otrzymanego przyspieszenia i naprężenia w warunku brzegowym (2.6) w [1] prowadzi do równania na front fali sprężystego odciążenia

$$(2.9) \quad -\sigma_s^0 + \frac{1}{2}L\left(\frac{a_1}{a_2} + 1\right)\frac{E_2}{a_2}f(x_{1E}) + \frac{1}{2}N\left(\frac{a_1}{a_2} - 1\right)\frac{E_2}{a_2}f(x_{2D}) + \\ + \frac{1}{2}L\left(\frac{a_1}{a_2} - 1\right)\frac{E_2}{a_2}f(x_{1F}) + \frac{1}{2}N\left(\frac{a_1}{a_2} + 1\right)\frac{E_2}{a_2}f(x_{2C}) = m\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{a_1}{a_2} + 1\right)f'(x_{1E})\dot{x}_{1E} - \right. \\ \left. - \frac{1}{2}N\left(\frac{a_1}{a_2} - 1\right)f'(x_{2D})\dot{x}_{2D} + \frac{1}{2}L\left(\frac{a_1}{a_2} - 1\right)f'(x_{1F})\dot{x}_{1F} + \frac{1}{2}N\left(\frac{a_1}{a_2} + 1\right)f'(x_{2C})\dot{x}_{2C}\right] - p(t),$$

gdzie obecnie

$$(2.9a) \quad x_{1B}^* = s\left(t + \frac{x_{1B}^*}{a_2}\right), \quad x_{2A}^* = s\left(t - \frac{x_{2A}^*}{a_2}\right).$$

Wielkości x_{1E} , x_{1F} , x_{2D} i x_{2C} obliczamy według (2.8) uwzględniając (2.9a). Pozostałe wielkości dane są wzorami:

$$(2.10) \quad \dot{x}_{1E} = x'_{1E}\left[1 + \left(-\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}\right)\dot{x}_{1B}^*\right], \quad \dot{x}_{2D} = x'_{2D}\left[1 + \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}\right)\dot{x}_{1B}^*\right], \\ \dot{x}_{1F} = x'_{1F}\left[1 + \left(-\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2}\right)\dot{x}_{2A}^*\right], \quad \dot{x}_{2C} = x'_{2C}\left[1 + \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2}\right)\dot{x}_{2A}^*\right].$$

Wprowadzając pochodne w poszczególnych punktach frontu odciążenia (A, B) i obciążenia (C, D, E, F) mamy

$$(2.11) \quad \dot{x}_{1B}^* = \frac{a_2 s'_B}{a_2 - s'_B}, \quad \dot{x}_{2A}^* = \frac{a_2 s'_A}{a_2 + s'_A}, \\ x'_{1E} = \frac{a_1 k'_E}{a_1 - k'_E}, \quad x'_{2D} = \frac{a_1 s'_D}{a_1 + s'_D}, \\ x'_{1F} = \frac{a_1 k'_F}{a_1 - k'_F}, \quad x'_{2C} = \frac{a_1 s'_C}{a_1 + s'_C}.$$

Wyrażenia (2.9) — (2.11) łącznie stanowią równanie określające front fali sprężystego odciążenia z warunkiem początkowym $x = s(t_m) = 0$.

Równanie to jest ważne w przedziale $t_m \leq t \leq t_K - \frac{x_K}{a_2}$. Po rozwiązaniu równań określających front plastycznej fali obciążenia i front fali sprężystego odciążenia możemy przystąpić do konstruowania pól naprężeń i prędkości w pozostałych obszarach płaszczyzny fazowej (rys. 2). Wykorzystanie jednorodnych warunków początkowych w obszarach 7, 10, ..., $3n+1$, oraz warunków ciągłości na granicach poszczególnych obszarów ($n \geq 2$), pozwala napisać rozwiązanie ogólne w postaci:

obszary 7, 10, ..., $3n+1$

$$(2.12) \quad \sigma_{3n+1} = -\frac{a_0}{E_0} \Phi'_{3n+1}; \quad v_{3n+1} = \Phi'_{3n+1};$$

obszar 5

$$\sigma_5 = -\frac{E_2}{a_2} \Phi'_5 + \frac{E_2}{a_2} \Psi'_4 - \sigma_m \frac{E_2 - E_1}{E_1} + \sigma_s^0 \left(\frac{E_2}{E_0} - \frac{E_2}{E_1} \right),$$

$$v_5 = \Phi'_5 + \Psi'_4;$$

obszary 8, 11, ..., 3n-1

$$(2.13) \quad \sigma_{3n-1} = -\frac{E_2}{a_2} \Phi'_{3n-1} + \frac{E_2}{a_2} \Psi'_{3(n-1)} - \sigma_m \frac{E_2 - E_1}{E_1} + \sigma_s^0 \left(\frac{E_2}{E_0} - \frac{E_2}{E_1} \right),$$

$$v_{3n-1} = \Phi'_{3n-1} + \Psi'_{3(n-1)};$$

obszary 6, 9, ..., 3n

$$(2.14) \quad \sigma_{3n} = -\frac{E_2}{a_2} \Phi'_{3n-1} + \frac{E_2}{a_2} \Psi'_{3n} - \sigma_m \frac{E_2 - E_1}{E_1} + \sigma_s^0 \left(\frac{E_2}{E_0} - \frac{E_2}{E_1} \right),$$

$$v_{3n} = \Phi'_{3n-1} + \Psi'_{3n}.$$

Nieznane funkcje wyznaczmy kolejno; Φ'_{3n-1} z warunku brzegowego, a Ψ'_{3n} i Φ'_{3n+1} z warunków ciągłości naprężeń i prędkości na linii $x = x_k$. Dla wyznaczenia funkcji Φ'_{3n+1} , z warunku brzegowego otrzymujemy równanie różniczkowe pierwszego rzędu. Warunek początkowy dla tego równania dostajemy z założenia ciągłości prędkości pod obiektem, co pociąga za sobą i ciągłość naprężenia (fale słabej nieciągłości).

Rozwiązanie w obszarach $n \geq 5$ można również otrzymać wykorzystując związki na charakterystykach (metoda charakterystyk).

Przykładowo podajemy wyznaczenie pola naprężenia i prędkości w obszarze 5. Uwzględnienie (2.12)₂ i (2.6)₂ w warunku brzegowym pozwala, po spełnieniu warunku ciągłości prędkości w punkcie $(0, t_k - \frac{x_k}{a_2})$, wyznaczyć nieznaną funkcję $\Phi_5(t - \frac{x}{a_2})$. Tak więc pola naprężeń i prędkości mają postać

$$(2.15) \quad \sigma_5(x, t) = -\frac{E_2}{a_2} G + \frac{E_2}{a_2} L \left(\frac{a_1}{a_2} - 1 \right) f(x_{1F}) + \frac{E_2}{a_2} N \left(\frac{a_1}{a_2} + 1 \right) f(x_{2C}) -$$

$$-\frac{E_2}{a_2} V_1 e^{-l \left(t - t_k + \frac{x_k - x}{a_2} \right)},$$

$$v_5(x, t) = -\frac{a_2}{E_2} \sigma_5(x, t) + L \left(\frac{a_1}{a_2} - 1 \right) f(x_{1F}) + N \left(\frac{a_1}{a_2} + 1 \right) f(x_{2C}),$$

gdzie

$$G = l e^{-l \left(t - t_k + \frac{x_k - x}{a_2} \right)} \int_{t_k - \frac{x_k}{a_2}}^{t - \frac{x}{a_2}} \left\{ L \left(\frac{a_1}{a_2} - 1 \right) f[x_{1F}(\xi)] + \right.$$

$$\left. + N \left(\frac{a_1}{a_2} + 1 \right) f[x_{2C}(\xi)] + \frac{p(\xi)}{lm} \right\} e^{l \left(\xi - t_k + \frac{x_k}{a_2} \right)} d\xi,$$

$$(2.16) \quad V_1 = \sigma_s^0 \frac{a_0}{E_0} - \frac{1}{2} L \left(\frac{a_1}{a_2} + 1 \right) f(x_K) - \frac{1}{2} N \left(\frac{a_1}{a_2} - 1 \right) f(x_K) + \\ + \frac{L}{2} \left(\frac{a_1}{a_2} - 1 \right) f(\bar{x}_{1F}) + \frac{N}{2} \left(\frac{a_1}{a_2} + 1 \right) f(\bar{x}_{2C}),$$

$$I = \frac{E_2}{ma_2}.$$

Pozostałe wielkości obliczamy według wzorów

$$(2.17) \quad x_2^*(\xi) = s \left(\xi - \frac{x_2^*(\xi)}{a_2} \right),$$

$$x_{1F}(\xi) = k \left(\xi - \frac{x_2^*(\xi)}{a_1} - \frac{x_2^*(\xi)}{a_2} + \frac{x_{1F}(\xi)}{a_1} \right),$$

$$x_{2C}(\xi) = k \left(\xi + \frac{x_2^*(\xi)}{a_1} - \frac{x_2^*(\xi)}{a_2} - \frac{x_{2C}^*(\xi)}{a_1} \right);$$

\bar{x}_{1F} i \bar{x}_{2C} otrzymujemy z powyższych wzorów wstawiając

$$\xi = t_K - \frac{x_K}{a_2}.$$

3. Analiza osobliwości równania frontu fali sprężystego odciążenia

Zajmiemy się zbadaniem charakteru krzywej $x = s(t)$ w otoczeniu punktu $0, t_m$ (początek fali odciążenia). Informacje te są konieczne przy ustawianiu algorytmu numerycznych obliczeń w strefie odciążenia.

Jeżeli w obszarze odciążenia, dla $x = 0$, z czasem t będziemy dążyć do t_m , to punkty A, B pokryją się z punktem 0 , punkty E, F z punktem H , a punkty C, D z punktem G (rys. 3). W konsekwencji przyjęcia, że $t = t_m$ z (2.8) otrzymamy

$$x_1^* = x_2^* = 0, \quad x_1(t_m) = x_{1E} = x_{1F}, \quad x_2(t_m) = x_{2D} = x_{2C}.$$

Wzory (2.10) dla czasu $t = t_m$ dają wyrażenia

$$(3.1) \quad \dot{x}_{1B}^* = \frac{a_2 s_0'}{a_2 - s_0'}, \quad \dot{x}_{2A}^* = \frac{a_2 s_0'}{a_2 + s_0'},$$

$$x_1' = \frac{a_1 k_H'}{a_1 - k_H'}, \quad x_2' = \frac{a_1 k_G'}{a_1 + k_G'}.$$

Czas t_m określamy z faktu, że naprężenie pod płytą osiąga dla $t = t_m$ ekstremum, zatem

$$(3.2) \quad \sigma_{3,t}(0, t_m) = 0.$$

Równość ta po wykorzystaniu (2.1)₁ ma postać

$$(3.3) \quad Lf'(x_1)\dot{x}_1 + Nf'(x_2)\dot{x}_2 = 0.$$

Po zróżniczkowaniu po t obu stron równania (2.2) i podstawieniu $t = t_m$, lewa strona równania, a więc i prawa, ma wartość zero jako pochodna naprężenia w jego ekstremum. W wyniku tego otrzymujemy

$$(3.4) \quad m[-Lf''(x_1)(\dot{x}_1)^2 - Lf'(x_1)\ddot{x}_1 + Nf''(x_2)(\dot{x}_2)^2 + Nf'(x_2)\ddot{x}_2] - p'(t_m) = 0.$$

Poza tym równanie (2.2) można zapisać w następującej skróconej formie:

$$(3.5) \quad -\sigma_s^0 + \frac{E_1}{a_1} Lf(x_1) + \frac{E_1}{a_1} Nf(x_2) + mLf'(x_1)\dot{x}_1 - mNf'(x_2)\dot{x}_2 + p(t_m) = 0.$$

W powyższych zapisach przyjęto: $x_1(t_m) = x_1$, $x_2(t_m) = x_2$,

$$\begin{aligned} x_1 &= k\left(t_m + \frac{x_1}{a_1}\right), & x_2 &= k\left(t_m - \frac{x_2}{a_1}\right), \\ \dot{x}_1 &= \frac{a_1 k' \left(t_m + \frac{x_1}{a_1}\right)}{a_1 - k' \left(t_m + \frac{x_1}{a_1}\right)}, & \dot{x}_2 &= \frac{a_1 k' \left(t_m - \frac{x_2}{a_1}\right)}{a_1 + k' \left(t_m - \frac{x_2}{a_1}\right)}. \end{aligned}$$

W ten sposób otrzymaliśmy trzy tożsamości (3.3)–(3.5), które wykorzystamy przy badaniu frontu fali sprężystego odciążenia.

Równanie frontu sprężystego odciążenia (2.9), po uwzględnieniu (2.10), można wyrazić w sposób następujący:

$$(3.6) \quad M_1 \dot{x}_{1B}^* + M_2 \dot{x}_{2A}^* = R,$$

gdzie

$$M_1 = \frac{m(a_2^2 - a_1^2)}{2a_1 a_2^2} [Lf'(x_{1E})x'_{1E} + Nf'(x_{2D})x'_{2D}],$$

$$M_2 = \frac{m(a_2^2 - a_1^2)}{2a_1 a_2^2} [Lf'(x_{1F})x'_{1F} + Nf'(x_{2C})x'_{2C}],$$

$$\begin{aligned} R &= -\sigma_s^0 + \frac{1}{2}L\left(\frac{a_1}{a_2} + 1\right)\frac{E_2}{a_2}f(x_{1E}) + \frac{1}{2}N\left(\frac{a_1}{a_2} - 1\right)\frac{E_2}{a_2}f(x_{2D}) + \\ &+ \frac{1}{2}L\left(\frac{a_1}{a_2} - 1\right)\frac{E_2}{a_2}f(x_{1F}) + \frac{1}{2}N\left(\frac{a_1}{a_2} + 1\right)\frac{E_2}{a_2}f(x_{2C}) + m\frac{1}{2}L\left(\frac{a_1}{a_2} + 1\right)f'(x_{1E})\dot{x}_{1E} + \\ &+ m\frac{1}{2}N\left(\frac{a_1}{a_2} - 1\right)f'(x_{2D})\dot{x}_{2D} - m\frac{1}{2}L\left(\frac{a_1}{a_2} - 1\right)f'(x_{1F})\dot{x}_{1F} - \\ &- m\frac{1}{2}N\left(\frac{a_1}{a_2} + 1\right)f'(x_{2C})\dot{x}_{2C} + p(t). \end{aligned}$$

Dla czasu $t = t_m$ współczynniki równania (3.6) M_1 , M_2 , R są równe zero ze względu na (3.3)–(3.5). Nie można więc ze wzoru (3.6), po uwzględnieniu w nim wyrażen na \dot{x}_{1B}^* i \dot{x}_{2A}^* z (3.1), obliczyć początkowej prędkości frontu fali odciążenia s_0' . Dowodzi to, że równanie (3.6) posiada punkt osobliwy. W celu znalezienia początkowej prędkości frontu fali odciążenia przeprowadzimy analizę punktu osobliwego, uogólniając metodę FROMMERA [3].

W bezpośrednim otoczeniu punktu $x = 0$, $t = t_m$, po przyjęciu oznaczeń $x_1^* = x_{1B}^*$, $x_2^* = x_{2A}^*$, wielkościom x_1^* i x_2^* nadajemy znaczenie zmiennych niezależnych. Przy tym założeniu współczynniki równania (3.6) M_1 , M_2 , R są funkcjami trzech zmiennych niezależnych t , x_1^* , x_2^* . Obliczmy różniczki zupełne współczynników równania (3.6) zachowując postać tej równości

$$(3.7) \quad (M_{1,t}dt + M_{1,x_1^*}dx_1^* + M_{2,x_2^*}dx_2^*)\dot{x}_1^* + (M_{2,t}dt + M_{2,x_1^*}dx_1^* + M_{2,x_2^*}dx_2^*)\dot{x}_2^* = \\ = R_{,t}dt + R_{,x_1^*}dx_1^* + R_{,x_2^*}dx_2^*.$$

Występujące w tym wyrażeniu pochodne cząstkowe, po podstawieniu w nich $x_1^* = x_2^* = 0$ i $t = t_m$ oraz po uwzględnieniu (3.3)–(3.5), mają wartości

$$(3.8) \quad \begin{aligned} M_{1,x_2^*} &= M_{2,x_1^*} = R_{,t} = 0, \\ M_{1,x_1^*} &= \frac{T_1}{a_2} + \frac{T_2}{a_1}, \quad M_{2,x_2^*} = -\frac{T_1}{a_2} + \frac{T_2}{a_1}, \\ M_{1,t} &= T_1, \quad M_{2,t} = T_1, \\ R_{,x_1^*} &= -T_1, \quad R_{,x_2^*} = -T_1, \end{aligned}$$

gdzie

$$(3.9) \quad \begin{aligned} T_1 &= \frac{m(a_2^2 - a_1^2)}{2a_1a_2^2} [Lf''(x_1)(\dot{x}_1)^2 + Lf'(x_1)\ddot{x}_1 + Nf''(x_2)(\dot{x}_2)^2 + Nf'(x_2)\ddot{x}_2], \\ T_2 &= \frac{m(a_2^2 - a_1^2)}{2a_1a_2^2} [-Lf''(x_1)(\dot{x}_1)^2 - Lf'(x_1)\ddot{x}_1 + Nf''(x_2)(\dot{x}_2)^2 + Nf'(x_2)\ddot{x}_2]. \end{aligned}$$

Równość (3.7) nie jest prawdziwa dla dowolnych przyrostów dt , dx_1^* i dx_2^* . Mamy prawo żądać spełnienia tej równości tylko wtedy, jeżeli do punktu 0 będziemy zdążać po krzywej $s(t)$, a to prowadzi do zależności

$$(3.10) \quad \frac{dx_1^*}{dt} = \dot{x}_1^* = \frac{a_2 s'_0}{a_2 - s'_0}, \quad \frac{dx_2^*}{dt} = \dot{x}_2^* = \frac{a_2 s'_0}{a_2 + s'_0}.$$

Uwzględniając (3.10) w (3.7) otrzymamy równanie algebraiczne stopnia czwartego na początkową prędkość frontu fali odciążenia s'_0

$$(3.11) \quad -\frac{(s'_0)^4}{a_2^3} + \frac{(s'_0)^2}{a_2} + 2\frac{T_1}{T_2} \frac{a_1}{a_2} s'_0 = 0.$$

Równanie to posiada dwa rzeczywiste pierwiastki. Rozwiązanie $s'_0 = 0$ należy odrzucić, ponieważ jest sprzeczne z warunkami ciągłości w otoczeniu punktu 0, t_m .

Prędkość początkową określa drugi pierwiastek

$$(3.12) \quad s'_0 = a_2 \sqrt[3]{-\frac{T_1 a_1}{T_2 a_2} + \left(\frac{T_1^2 a_1^2}{T_2^2 a_2^2} + \frac{1}{27}\right)^{1/2}} - a_2 \sqrt[3]{\frac{T_1 a_1}{T_2 a_2} + \left(\frac{T_1^2 a_1^2}{T_2^2 a_2^2} + \frac{1}{27}\right)^{1/2}}.$$

Na podstawie (3.9) i (3.3) mamy

$$(3.13) \quad \frac{T_1}{T_2} = 2mN \frac{f''(x_2)(\dot{x}_2)^2 + f'(x_2)\ddot{x}_2}{p'(t_m)} - 1.$$

Rozpatrzmy kilka praktycznie ważnych przypadków postaci wzoru (3.12) w zależności od stosunku T_1/T_2 .

1. Wzrost granicy plastyczności ośrodka jest liniową funkcją głębokości $f(x) = Ax$. Wówczas mamy

$$(3.14) \quad \frac{T_1}{T_2} = 2 \frac{mAN\ddot{x}_2}{p'(t_m)} - 1.$$

2. Ośrodek jednorodny $f(x) \equiv 0$. W tym wypadku front fali plastycznej degeneruje się do charakterystyki plastycznej $x = a_1(t - t_s)$.

W konsekwencji $\ddot{x}_2 = \ddot{x}_1 = 0$, a zatem

$$(3.15) \quad \frac{T_1}{T_2} = -1.$$

3. Sztywne odciążenie. Dla sztywnego odciążenia $a_2 \rightarrow \infty$ i po przejściu granicznym w (3.12) — mamy

$$(3.16) \quad s'_0 = -2a_1 \frac{T_1}{T_2},$$

co się pokrywa ze wzorem (4.15) w [1] otrzymanym dla sztywnego odciążenia w części I.

Tym samym pokazaliśmy, że istnieje krzywa całkowa równania (2.9) przechodząca przez punkt $x = 0$, $t = t_m$ i znaleźliśmy styczną (prędkość) z jaką startuje z punktu osobliwego front fali sprężystego odciążenia. Postać frontu fali odciążenia określimy z równania (2.9), rozwiązując go metodą Runge-Kutta [4].

4. Przykład liczbowy

W niniejszym punkcie, w oparciu o wyprowadzone wyżej wzory, zbadamy ilościowy wpływ parametrów ośrodka i przyłożonego obciążenia na ruch płyty i reakcję przekazywaną przez nią na ośrodek.

Celem przeprowadzonych obliczeń numerycznych jest określenie wartości współczynnika odciążenia $\mu_1 = a_2/a_1$, dla którego można stosować w praktyce inżynierskiej bardziej wygodny i efektywny w obliczeniach model podłoża ze sztywnym odciążeniem.

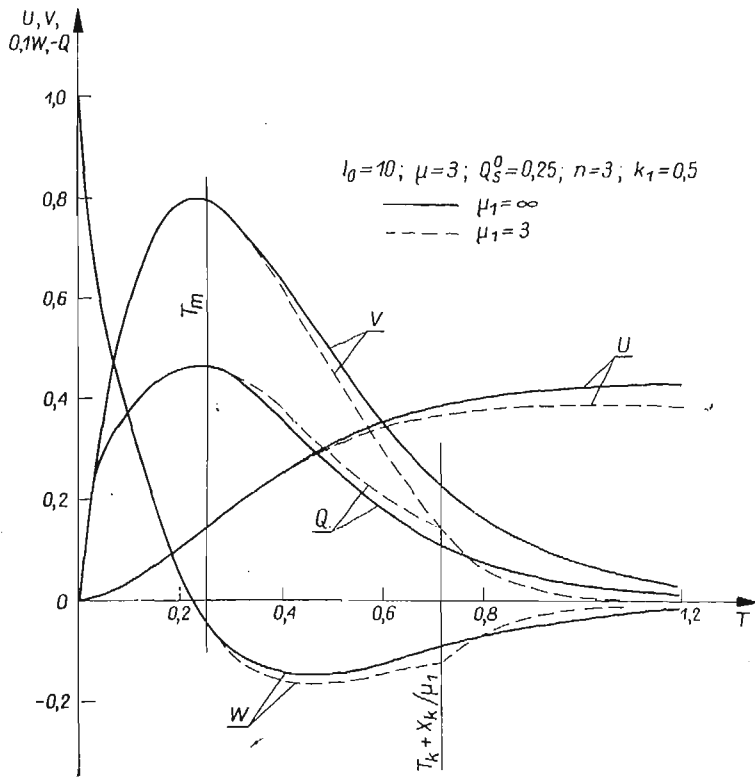
Największy wpływ sprężystego odciążenia występuje dla $E_2 = E_0$ (patrz rys. 1). Z tego powodu w obliczeniach przyjęto $a_2 = a_0$, co oznacza, że $\mu_1 = \mu = a_0/a_1$. Poza tym założono

$$(4.1) \quad f(x) = Ax,$$

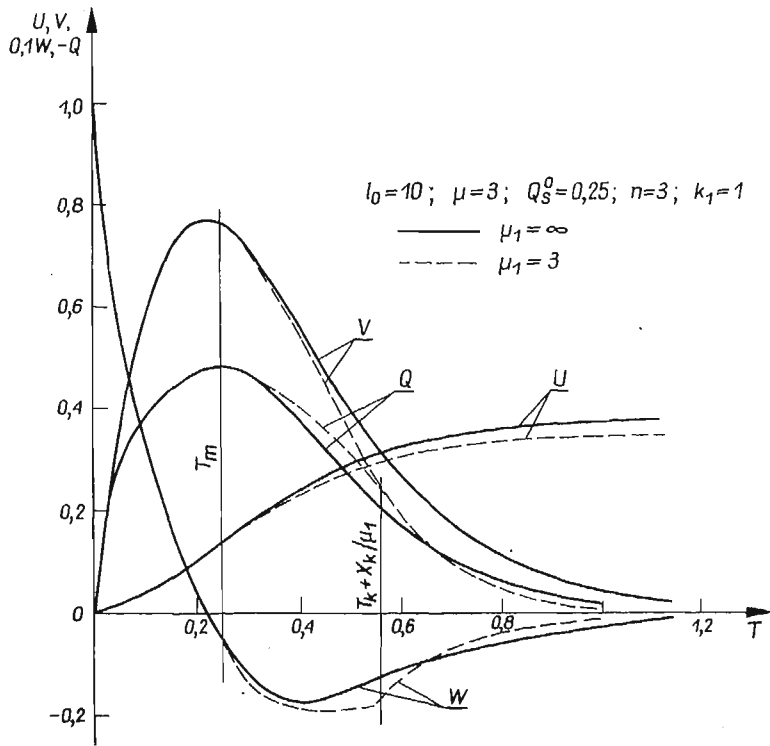
$$(4.2) \quad p(t) = p_0 \left(1 - \frac{t}{\tau}\right)^n.$$

Wielkości bezwymiarowe, potrzebne do przeprowadzenia obliczeń numerycznych przyjmujemy takie same, jak w części I [1].

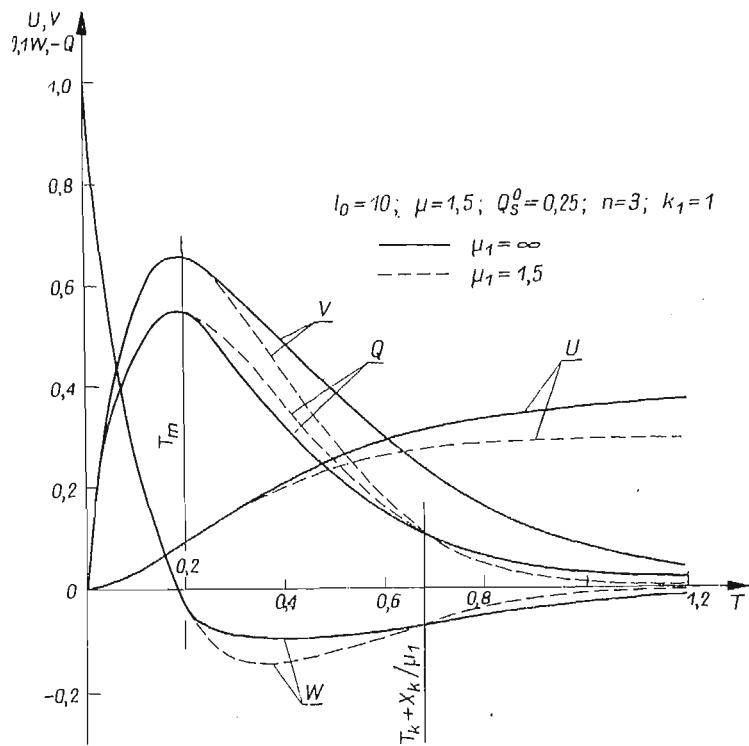
Jak już wspomniano w poprzednich punktach front plastycznej fali obciążenia określono za pomocą zmodyfikowanej metody kroków, natomiast do rozwiązania równania na front fali sprężystego odciążenia zastosowano metodę Runge-Kutta. Znajomość do-



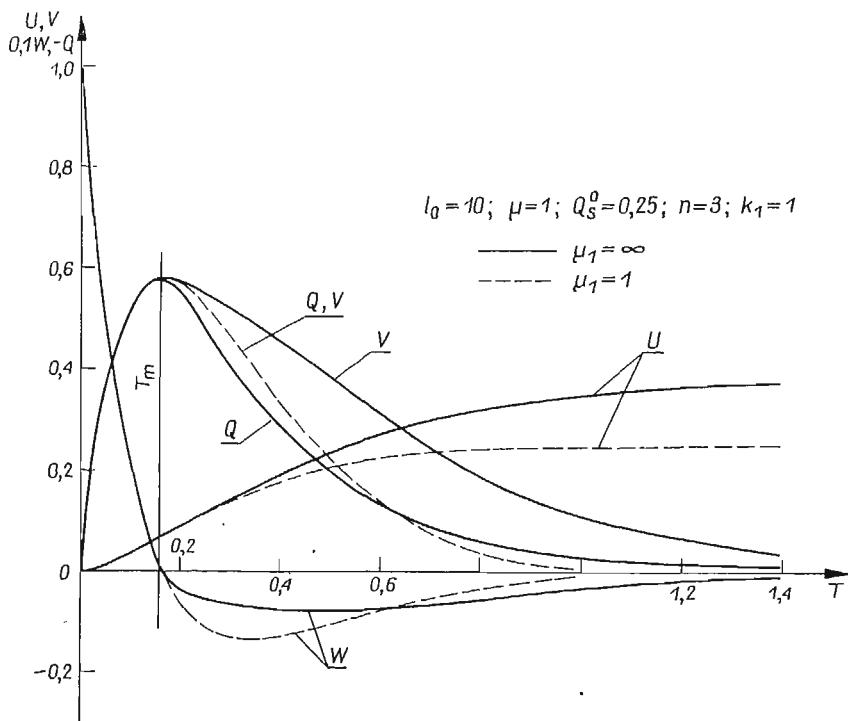
Rys. 5



Rys. 6



Rys. 7



Rys. 8

kladnej wartości początkowej prędkości frontu fali odciążenia (patrz wzór (3.12)), oraz fakt, że osobliwość równania (2.9) w punkcie $0, t_m$ jest typu siodła, zwiększyły w znacznym stopniu dokładność obliczeń — praktycznie w badanych przedziałach uzyskano ściśle wyniki na parametry ruchu płyty i reakcję przekazywaną przez nią na podłoże.

Przykładowe wyniki obliczeń parametrów ruchu płyty, tj. bezwymiarowe współczynniki: przemieszczenia U , prędkości V , przyspieszenia W oraz reakcji pod płytą Q pokazane są na rys. 5–8.

Z wykresów zamieszczonych na rys. 5 i 6 można zauważyć, że zwiększenie gradientu wzrostu granicy plastyczności ośrodka (wzrost k_1) powoduje zmniejszenie wpływu sprężystego odciążenia (linia przerywana) w stosunku do sztywnego odciążenia (linia ciągła). Wynika to z faktu malenia pętli strat na odkształcenia plastyczne ze wzrostem k_1 .

Na rys. 6, 7 i 8 pokazujemy zwiększanie się wpływu sprężystego odciążenia na parametry ruchu płyty w miarę malenia współczynnika $\mu_1 = \mu$. Największą możliwą różnicę pomiędzy sztywnym a sprężystym odciążeniem, dla ustalonych pozostałych parametrów, pokazują wykresy na rys. 8. Linia przerywana reprezentuje tutaj stan sprężysty ośrodka, a linia ciągła model liniowy ze sztywnym odciążeniem po przekroczeniu granicy plastyczności.

Reasumując można stwierdzić, że wpływ sprężystego odciążenia na pole naprężeń generowane w podłożu, na którym spoczywa płyta, jest minimalny.

Większe znaczenie ma sprężyste odciążenie przy obliczaniu parametrów ruchu płyty (przemieszczenia, prędkości i przyspieszenia).

Otrzymane wyniki pozwalają wyciągnąć wniosek, że dla współczynników sprężystego odciążenia $\mu_1 \geq 3$ wpływ sprężystego odciążenia jest zanedbywalny i w praktycznych obliczeniach można stosować bardziej efektywny model gruntu ze sztywnym odciążeniem.

Literatura cytowana w tekście

1. J. BAUER, E. WŁODARCZYK, *Dynamika sztywnej płyty spoczywającej na sprężysto-plastycznym podłożu ze zmienną granicą plastyczności. Część I. Sztywne odciążenie.*, Mech. Teor. i Stos., 1, 9 (1971).
2. E. WŁODARCZYK, *Wpływ liniowo-sprężystego odciążenia na parametry ruchu sztywnej płyty spoczywającej na sprężysto-plastycznym gruncie*, Biul. WAT, 7 (203), (1969).
3. W. W. СТЕПАНОВ, *Równania różniczkowe*, PWN, Warszawa 1956.
4. L. COLLATZ, *Metody numeryczne rozwiązywania równań różniczkowych*, PWN, Warszawa 1960.

Резюме

ДИНАМИКА ЖЕСТКОЙ ПЛИТЫ, РАСПОЛОЖЕННОЙ НА УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОМ ОСНОВАНИИ С ПЕРЕМЕННЫМ ПРЕДЕЛОМ ТЕКУЧЕСТИ ЧАСТЬ II. УПРУГАЯ РАЗГРУЗКА

Во второй части работы исследовано влияние упругой разгрузки на нестационарное движение жесткой плиты, расположенной на упруго-пластическом основании с переменным (возрастающим вглубь основания) пределом текучести. Фронт волны разгрузки описан нелинейным дифференциальным уравнением со смещенным аргументом, которое затем решено при помощи метода Рунге-Кутты. Выведена замкнутая формула для начальной скорости распространения волны разгрузки, из которой в предельном переходе получается скорость волны для жесткой разгрузки, приведенная в ч. I [1].

Параметры движения плиты и среды, находящейся под плитой, определены при помощи фронтов волн пластической нагрузки и упругой разгрузки. На основе полученных формул произведен достаточно широкий численный анализ задачи. В результате этого анализа установлено, что для величин коэффициентов упругой разгрузки $\mu_1 = a_2/a_1 \geq 3$ влиянием упругой разгрузки можно пренебречь, а в инженерной практике можно применять более эффективную в расчетах модель грунта с жесткой разгрузкой.

Summary

DYNAMICS OF A RIGID PLATE RESTING ON ELASTIC-PLASTIC FOUNDATION WITH VARIABLE PLASTICITY LIMIT PART II. ELASTIC UNLOADING

In the second part of the paper the influence of elastic unloading on non-stationary motion of a rigid plate resting on elastic-plastic foundation with variable (increasing with the depth) limit of plasticity has been investigated. The front of the unloading wave is presented in the form of a non-linear equation with a shifted argument. The equation is solved by the Runge-Kutt method. The initial velocity of propagation of the unloading wave is found in a closed form. From this formula the limiting case of the rigid unloading wave velocity given in part I can be obtained.

The parameters of motion of the plate and the medium lying under the plate are evaluated by means of wave fronts of plastic loading and elastic unloading. On the basis of the formulae obtained the detailed numerical analysis of the problem is carried out.

As a result of the analysis it has been found that for the coefficients of elastic unloading $\mu_1 = a_2/a_1 \geq 3$ the influence of elastic unloading can be neglected, and therefore in the case of practical engineering calculations a more effective model of soil with rigid unloading can be applied.

WOJSKOWA AKADEMIA TECHNICZNA

Praca została złożona w Redakcji dnia 27 stycznia 1971 r.