

PLYTA O ZMIENNYM MODULE ODKSZTAŁCENIA POSTACIOWEGO
SKRĘCANA STEMPLEM KOŁOWYM

WIACZESŁAW RUDNICKI (LWÓW), JAROSŁAW KIZYMA (TARNOPOŁ)

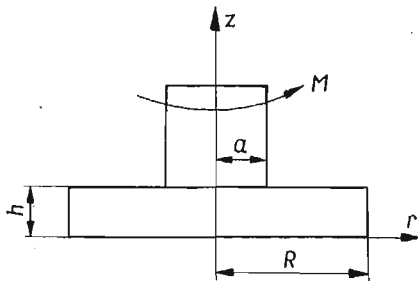
1. Wstęp

Zagadnienie skręcania płyty kołowej jednorodnej zostało rozpatrzone w pracy [3]. Przedmiotem niniejszej publikacji jest zagadnienie skręcania kołowej płyty izotropowej kołowym stemplem. Założymy zmienność modułu odkształcenia postaciowego od współrzędnej z oraz, że płyta jest utwierdzona na powierzchni bocznej lub podstawie.

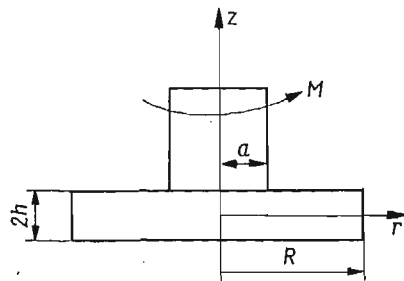
W celu rozwiązania zagadnienia zastosujemy metodę Fouriera. Dla wielkości charakteryzujących stan naprężenia i odkształcenia otrzymaliśmy rozwiązania w postaci jawnej. Wyniki obliczeń zostały przedstawione na wykresach.

2. Wzory podstawowe

Rozpatrzmy stan naprężenia i odkształcenia płyty kołowej o promieniu R i grubości h (rys. 1, 2), zamocowanej na powierzchni bocznej lub czołowej i znajdującej się pod



Rys. 1



Rys. 2

działaniem sztywnego kołowego stempla spojenego z płytą. Będziemy zakładać, że stempel doznaje obrotu o kąt ε pod wpływem momentu M . Powierzchnia płyty na zewnątrz stempla i obszaru utwierdzenia jest swobodna.

Przy tak postawionym zagadnieniu płyta będzie znajdowała się w stanie czystego skręcania, a zagadnienie sprowadzi się do wyznaczenia różnych od zera składowych stanu naprężenia $\tau_{\theta z}$, $\tau_{\theta r}$ spełniających równania

$$(2.1) \quad \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial r} + \frac{2\tau_{\theta r}}{r} = 0$$

i składowej przemieszczenia u_θ związanej z $\tau_{\theta z}$ i $\tau_{\theta r}$ zależnościami

$$(2.2) \quad \tau_{\theta z} = G \frac{\partial u_\theta}{\partial z}, \quad \tau_{\theta r} = G \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right).$$

Tutaj G — moduł odkształcenia postaciowego, r, θ, z — współrzędne walcowe; oś z pokrywa się z osią symetrii płyty. Zakładamy, że moduł $G(z)$ zależy od współrzędnej z .

Podstawiając wielkości (2.2) do (2.1) otrzymamy następujące równanie względem

$$(2.3) \quad \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} + \frac{G'(z) \partial u_\theta}{G(z) \partial z} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r^2} = 0.$$

Rozwiązanie równania (2.3) znajdziemy metodą Fouriera

$$(2.4) \quad u_\theta = R(z)Z(z).$$

Wstawiając (2.4) do (2.3) otrzymamy równania:

$$(2.5) \quad \frac{d^2 R}{dz^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} - \left(\lambda^2 + \frac{1}{r^2} \right) = 0,$$

$$(2.6) \quad \frac{d^2 Z}{dz^2} + \frac{G'(z)}{G(z)} \frac{dZ}{dz} + \lambda^2 Z = 0$$

gdzie λ jest parametrem.

Równanie (2.5) nie zależy od zmiennego modułu $G(z)$. Rozwiązaniami szczególnymi (2.5) są zmodyfikowane funkcje Bessela oraz funkcje McDonalda $I_1(\lambda r)$ i $K_1(\lambda r)$. Rozwiązanie ogólne ma postać

$$(2.7) \quad R = AI_1(\lambda r) + BK_1(\lambda r).$$

Rozwiązania równania (2.6) będziemy poszukiwać dla trzech przypadków:

I $G(z) = G_0 + G_1 z,$

II $G(z) = G_0 e^{-\alpha z},$

III $G(z) = \text{const.}$

Podstawiając wyrażenia $G(z)$ do równania (2.6) otrzymamy odpowiednio rozwiązania:

$$(2.8) \quad Z(z) = C J_0 \left(\lambda \frac{G_0 + G_1 z}{G_1} \right) + D Y_0 \left(\lambda \frac{G_0 + G_1 z}{G_1} \right),$$

$$(2.9) \quad Z(z) = e^{-\frac{\alpha z}{2}} \left[C \sin \left(\sqrt{\lambda^2 - \frac{\alpha^2}{4}} z \right) + D \cos \left(\sqrt{\lambda^2 - \frac{\alpha^2}{4}} z \right) \right],$$

$$(2.10) \quad Z(z) = C \sin \lambda z + D \cos \lambda z.$$

Rozwiązanie ogólne jest sumą (2.8)–(2.10) i całek szczególnych, które mają postać:

$$(2.11) \quad u_\theta^0 = A_0 r \ln(G_0 + G_1 z) + B_0 r,$$

$$(2.12) \quad u_\theta^0 = A_0 r e^{-\alpha z} + B_0 r,$$

$$(2.13) \quad u_\theta^0 = A_0 r z + B_0 r.$$

Wykorzystując (2.2), (2.4), (2.7), (2.8)–(2.13) dla naprężeń $\tau_{\theta z}$, $\tau_{\theta r}$ i przemieszczenie u_θ otrzymamy następujące wzory:

I — dla $G(z)$ zmieniającego się w sposób liniowy

$$\begin{aligned}
 u_\theta(r, z) &= A_0 r \ln(G_0 + G_1 z) + B_0 r + \sum_{k=1}^{\infty} [A_k I_1(\lambda_k r) + B_k K_1(\lambda_k r)] \times \\
 &\quad \times \left[C_k I_0 \left(\lambda_k \frac{G_0 + G_1 z}{G_1} \right) + D_k Y_0 \left(\lambda_k \frac{G_0 + G_1 z}{G_1} \right) \right], \\
 \tau_{\theta z}(r, z) &= G_1 A_0 r - (G_0 + G_1 z) \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k [A_k I_1(\lambda_k r) + B_k K_1(\lambda_k r)] \times \\
 (2.14) \quad &\quad \times \left[C_k I_1 \left(\lambda_k \frac{G_0 + G_1 z}{G_1} \right) + D_k Y_1 \left(\lambda_k \frac{G_0 + G_1 z}{G_1} \right) \right], \\
 \tau_{\theta r}(r, z) &= (G_0 + G_1 z) \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k [A_k I_2(\lambda_k r) - B_k K_2(\lambda_k r)] \times \\
 &\quad \times \left[C_k I_1 \left(\lambda_k \frac{G_0 + G_1 z}{G_1} \right) + D_k Y_1 \left(\lambda_k \frac{G_0 + G_1 z}{G_1} \right) \right];
 \end{aligned}$$

II — dla $G(z)$ zmniejszającego się w sposób wykładniczy:

$$\begin{aligned}
 u_\theta(r, z) &= A_0 r e^{-\alpha z} + B_0 r + e^{-\frac{\alpha z}{2}} \sum_{k=1}^{\infty} (A_k I_1(\lambda_k r) + B_k K_1(\lambda_k r)) \times \\
 &\quad \times \left[C_k \sin \left(\sqrt{\lambda_k^2 - \frac{\alpha^2}{4}} z \right) + D_k \cos \left(\sqrt{\lambda_k^2 - \frac{\alpha^2}{4}} z \right) \right], \\
 \tau_{\theta z}(r, z) &= -A_0 \alpha G_0 e^{-\alpha z} r + e^{-\frac{\alpha z}{2}} \sum_{k=1}^{\infty} [A_k I_1(\lambda_k r) + B_k K_1(\lambda_k r)] \times \\
 (2.15) \quad &\quad \times \left\{ C_k \left[-\frac{\alpha}{2} \sin \left(\sqrt{\lambda_k^2 - \frac{\alpha^2}{4}} z \right) + \sqrt{\lambda_k^2 - \frac{\alpha^2}{4}} \cos \left(\sqrt{\lambda_k^2 - \frac{\alpha^2}{4}} z \right) \right] - \right. \\
 &\quad \left. - D_k \left[\frac{\alpha}{2} \cos \left(\sqrt{\lambda_k^2 - \frac{\alpha^2}{4}} z \right) + \sqrt{\lambda_k^2 - \frac{\alpha^2}{4}} \sin \left(\sqrt{\lambda_k^2 - \frac{\alpha^2}{4}} z \right) \right] \right\}, \\
 \tau_{\theta r}(r, z) &= G_0 e^{-\frac{\alpha z}{2}} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k [A_k I_2(\lambda_k r) + B_k K_2(\lambda_k r)] \times \\
 &\quad \times \left[C_k \sin \left(\sqrt{\lambda_k^2 - \frac{\alpha^2}{4}} z \right) + D_k \cos \left(\sqrt{\lambda_k^2 - \frac{\alpha^2}{4}} z \right) \right];
 \end{aligned}$$

III — dla $G(z) = \text{const}$:

$$\begin{aligned}
 u_\theta &= A_0 r z + B_0 r + \sum_{k=1}^{\infty} [A_k I_1(\lambda_k r) + B_k K_1(\lambda_k r)] (C_k \sin \lambda_k z + D_k \cos \lambda_k z), \\
 (2.16) \quad \tau_{\theta z}(r, z) &= G_0 A_0 r + G_0 \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k [A_k I_1(\lambda_k r) + B_k K_1(\lambda_k r)] (C_k \cos \lambda_k z - D_k \sin \lambda_k z), \\
 \tau_{\theta r}(r, z) &= G_0 \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k [A_k I_2(\lambda_k r) - B_k K_2(\lambda_k r)] (C_k \sin \lambda_k z + D_k \cos \lambda_k z).
 \end{aligned}$$

W powyższych wzorach $A_0, B_0, A_k, C_k, B_k, D_k$ są dowolnymi stałymi, $J_1(x), Y_1(x), I_1(x), K_1(x)$ są funkcjami Bessela pierwszego rzędu odpowiednio pierwszego i drugiego rodzaju zmiennej rzeczywistej i urojonej.

Stałe A_0, B_0, A_k, B_k i wartości własne wyznaczymy odpowiednio z warunków brzegowych:

a) utwierdzenie powierzchni bocznej (rys. 1)

$$(2.17) \quad \text{przy } z = 0, \quad \tau_{\theta z} = 0, \quad 0 \leq r \leq R,$$

$$(2.18) \quad \text{przy } z = h, \quad u_\theta = \varepsilon r, \quad 0 \leq r \leq a,$$

$$(2.19) \quad \tau_{\theta z} = 0, \quad a \leq r \leq R,$$

$$(2.20) \quad \text{przy } z = R, \quad u_\theta = 0; \quad -h \leq z \leq h;$$

b) utwierdzenie podstawy dolnej (rys. 2)

$$(2.21) \quad \text{przy } z = -h, \quad u_\theta = 0, \quad 0 \leq r \leq R,$$

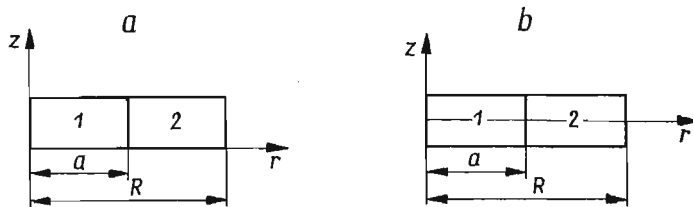
$$(2.22) \quad \text{przy } z = h, \quad u_\theta = \varepsilon r, \quad 0 \leq r \leq a,$$

$$(2.23) \quad \tau_{\theta z} = 0, \quad 0 \leq z \leq h,$$

$$(2.24) \quad \text{przy } z = R, \quad \tau_{\theta z} = 0, \quad 0 \leq z \leq h.$$

3. Przykłady liczbowe

Rozpatrzmy szczegółowo przypadek, kiedy moduł skręcania jest wielkością stałą. W celu otrzymania rozwiązania obszar przekroju osiowego płyty (rys. 3a, b) podzielmy na dwa obszary: $0 \leq z \leq h, 0 \leq r \leq a$ (obszar 1) i $0 \leq z \leq h, a \leq r \leq R$ (obszar 2).



Rys. 3

Rozwiązania dla każdego z znajdziemy oddzielnie. Przez $u_\theta^{(1)}, \tau_{\theta r}^{(1)}, \tau_{\theta z}^{(1)}, u_\theta^{(2)}, \tau_{\theta r}^{(2)}, \tau_{\theta z}^{(2)}$ oznaczymy wielkości odnoszące się odpowiednio do obszaru 1 i obszaru 2. Przy takim sposobie postępowania oprócz warunków brzegowych (2.17) — (2.20), (2.21) — (2.24) winny być spełnione warunki zgodności

$$(3.1) \quad u_\theta^{(1)} = u_\theta^{(2)}, \quad \tau_{\theta r}^{(1)} = \tau_{\theta r}^{(2)},$$

przy $r = a$.

Rozwiązania w obszarze 1 spełniające warunki brzegowe (2.17)–(2.20), (2.21)–(2.24) i (dążące do zera) ograniczone przy $r = 0$ mają postać:

Przypadek a)

$$(3.2) \quad \begin{aligned} u_0^{(1)} &= \frac{\varepsilon}{h} r z + \sum_{k=1}^{\infty} N_k I_1(\lambda_k r) \sin \lambda_k (h-z), \\ \tau_{0z}^{(1)} &= G \frac{\varepsilon}{h} r - G \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k N_k I_1(\lambda_k r) \cos \lambda_k (h-z), \\ \tau_{0r}^{(1)} &= G \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k N_k I_1(\lambda_k r) \sin \lambda_k (h+z). \end{aligned}$$

Przypadek b)

$$(3.3) \quad \begin{aligned} u_0^{(1)} &= \frac{\varepsilon}{h} r z + \sum_{k=1}^{\infty} A_k I_1(\mu_k r) \sin \mu_k z, \\ \tau_{0z}^{(1)} &= G \frac{\varepsilon}{h} r + G \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k A_k I_1(\mu_k r) \cos \mu_k z, \\ \tau_{0r}^{(1)} &= G \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k A_k I_2(\mu_k r) \sin \mu_k z. \end{aligned}$$

Kładąc $A_0 = 0$ dla obszaru 2 znajdujemy:

Przypadek a)

$$(3.4) \quad \begin{aligned} u_0^{(2)} &= \sum_{k=1}^{\infty} M_k \frac{I_1(2\mu_k R) K_1(2\mu_k r) - I_1(2\mu_k r) K_1(2\mu_k R)}{I_1(2\mu_k R)} \cos 2\mu_k (h-z), \\ \tau_{0z}^{(2)} &= 2G \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k M_k \frac{I_1(2\mu_k R) K_1(2\mu_k r) - I_1(2\mu_k r) K_1(2\mu_k R)}{I_1(2\mu_k R)} \sin 2\mu_k (h-z), \\ \tau_{0r}^{(2)} &= -2G \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k M_k \frac{K(2\mu_k R) I_2(2\mu_k r) + I_1(2\mu_k R) K_2(2\mu_k r)}{I_1(2\mu_k R)} \cos 2\mu_k (h-z). \end{aligned}$$

Przypadek b)

$$(3.5) \quad \begin{aligned} u_0^{(2)} &= \sum_{k=1}^{\infty} D_k \frac{I_1(2\lambda_k r) K_2(2\lambda_k R) + K_1(2\lambda_k r) I_2(2\lambda_k R)}{I_2(2\lambda_k R)} \sin 2\lambda_k z, \\ \tau_{0z}^{(2)} &= 2G \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k D_k \frac{I_1(2\lambda_k r) K_2(2\lambda_k R) + K_1(2\lambda_k r) I_2(2\lambda_k R)}{I_2(2\lambda_k R)} \cos 2\lambda_k z, \\ \tau_{0r}^{(2)} &= 2G \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k D_k \frac{I_2(2\lambda_k r) K_2(2\lambda_k R) - I_2(2\lambda_k R) K_2(2\lambda_k r)}{I_2(2\lambda_k R)} \sin 2\lambda_k z. \end{aligned}$$

Tutaj

$$\lambda_k = \frac{2k \cdot 1}{h} \frac{\pi}{4}; \quad \mu_k = \frac{k}{h} \frac{\pi}{2}, \quad (k = 1, 2, 3 \dots).$$

N_k, M_k, A_k i D_k są nowymi stałymi, które wyznaczymy z warunków zgodności (3.2) uwzględniając ortogonalność funkcji trygonometrycznych. Ostatecznie w celu wyznaczenia stałych otrzymujemy nieskończony układ równań algebraicznych:

dla przypadku a)

$$(3.6) \quad \sum_{k=1}^{\infty} L_k \frac{(4k-1)[ak(2k-1)+2kbn]}{(2k-1)^2-4n^2} = \frac{(-1)^{n+2}-1}{n} 2b_n;$$

dla przypadku b)

$$(3.7) \quad \sum_{k=1}^{\infty} B_k \frac{4k[2kC_k-(2n-1)dn](-1)^{k+n}}{4k^2-(2n-1)^2} = \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)} d_n;$$

gdzie

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{I_2(\lambda_k a)}{I_1(\lambda_k a)}, & C_k &= \frac{I_2(2\mu_k a)}{I_1(2\mu_k a)}, \\ b_n &= \frac{K_1(\mu_n R)I_2(\mu_n a) + I_1(\mu_n R)K_2(\mu_n a)}{I_1(\mu_n R)K_1(\mu_n a) - I_1(\mu_n a)K_1(\mu_n R)}, \\ d_n &= \frac{I_2(2\mu_n a)K_2(2\mu_n R) - K_2(2\mu_n a)I_2(2\mu_n R)}{I_1(2\mu_n a)K_2(2\mu_n R) + K_1(2\mu_n a)I_2(2\mu_n R)}, \\ L_k &= \frac{N_k I_1(\lambda_k a) \pi}{2\epsilon a}; & B_k &= \frac{A_k I_1(2\lambda_k a) \pi}{4\epsilon a}. \end{aligned}$$

Stałe M_k i D_k wyrażają się przez L_k i B_k następującymi związkami:

$$\begin{aligned} M_n &= -\frac{2}{\pi} \frac{\mu_n^{-1} I_2(\mu_n a)}{I_2(\mu_n a)K_1(\mu_n R) + I_1(\mu_n R)K_2(\mu_n a)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k L_k a_k (4k-1)}{(2k-1)^2-4n^2}, \\ D_n &= \frac{2}{\pi} \frac{\lambda_k^{-1} I_2(2\lambda_k R)}{I_2(2\lambda_k a)K_2(2\lambda_k R) - K_2(2\lambda_k a)I_2(2\lambda_k R)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_k C_k 4k (-1)^{k+n} B_k}{4k^2-(2n-1)^2}. \end{aligned}$$

Dla wyznaczenia związku między kątem obrotu podstawy ϵ i momentem M przyłożonym do kołowego stempla wykorzystamy związek

$$(3.8) \quad M = 2\pi \int_0^a \rho^2 \tau_{\theta z}^{(1)}(\rho) d\rho.$$

Podstawiając $\tau_{\theta z}^{(1)}$ do równania (3.8) i po scałkowaniu otrzymamy:
przypadek a)

$$M = \frac{G\epsilon a^3}{4\pi} \left[\pi \frac{a}{h} - 8 \sum_{k=1}^{\infty} 4k \frac{I_2(\lambda_k a)}{I_1(\lambda_k a)} \right];$$

przypadek b)

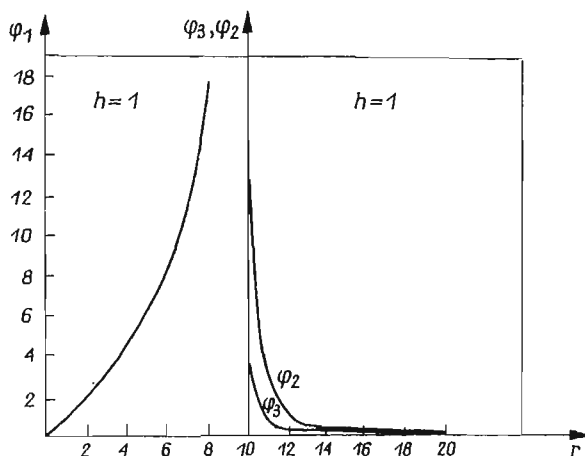
$$M = \frac{4\epsilon a^3}{\pi} \left[\frac{\pi}{16} \frac{a}{h} + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \frac{I_2(\mu_k a)}{I_1(\mu_k a)} \right].$$

Z powyższych rozważań widzimy, że rozwiązanie zagadnienia sprowadza się do wyznaczenia stałych L_k i B_k z nieskończonego układu równań algebraicznych (3.6), (3.7). Wykonano obliczenia numeryczne i stwierdzono, że układy (3.6) i (3.7) mają macierze współczynników symetryczne i współczynniki ich nie mają osobliwości.

Z układu (3.7) wyznaczono 18 stałych dla parametrów $\frac{R}{a} = 2$, $\frac{R}{a} = 20$.

Na podstawie wzorów (3.3) i (3.5) obliczono naprężenia kontaktowe pod stemplem i przemieszczenia na zewnątrz stempla. Wyniki obliczeń pokazano na wykresach.

Na rys. 4 przedstawiono wielkości $\varphi_1 = \frac{h\pi}{4\epsilon G} \tau_{\theta z}^{(1)}$, $\varphi_2 = \frac{1}{\epsilon G} u_b^{(2)}$, $\varphi_3 = \frac{\pi}{4G\epsilon} \tau_{\theta r}^{(2)}$.



Rys. 4

Należy zaznaczyć, że szeregi w wyrażeniach (3.2)–(3.5) są naprzemienne przy wszystkich r i ich zbieżność jest dobra. Wyjątek stanowi szereg w wyrażeniu na $\tau_{\theta z}^{(1)}$ przy $r = a$. W tych punktach, jak należało oczekiwać, szereg jest rozbieżny, a naprężenia wzrastają nieograniczenie.

Literatura cytowana w tekście

1. И. Х. Арутюнян, Б. Л. Абрамян, *Кручение упругих тел*, Физматгиз, Москва 1969.
2. Г. Н. Положий, *Уравнения математической физики*, Изд. Высшая школа, Москва 1964.
3. Я. М. Кизыма, *Кручение круглой изотропной плиты, жестко защемлённой по боковой поверхности*, ИМ Т. У., вып. 10 (1969).

Р е з ю м е

КРУЧЕНИЕ КРУГОВОЙ ПЛИТЫ С ПЕРЕМЕННЫМ МОДУЛЕМ СДВИГА
С ПОМОЩЬЮ ЖЕСТКОГО КРУГОВОГО ШТАМПА

Рассматривается смешанная задача о кручении круглой изотропной плиты жестким штампом, когда модуль сдвига G является величиной переменной, зависящей от координаты z . Для решения задачи применяется метод разделения переменных Фурье. Получены явные формулы для напряжений и смещений. Численные расчеты представлены в виде графиков.

S u m m a r y

A PLATE WITH VARIABLE MODULUS OF SHEAR TWISTED BY A CIRCULAR STAMP

The mixed problem of an isotropic plate twisted by a rigid circular stamp is considered in the case when the variable shear modulus G depends on the z coordinate only. In order to obtain the solution of the problem, the Fourier method of separated variables is applied. The explicit expressions for stresses and displacements are obtained. Numerical results are presented in the form of graphs.

UNIwersytet Lwowski, Instytut Mechaniki
Państwowy Instytut Ekonomiki Przemysłu w Tarnopolu

Praca została złożona w Redakcji dnia 3 grudnia 1970 r.
