

## TERMODYNAMICZNA, INFINITEZYMALNA TEORIA LEPKOPLASTYCZNOŚCI

PIOTR PERZYNA (WARSZAWA)

### 1. Wstęp

Zagadnienia lepkoplastyczności wyłoniły się głównie z problemów dynamicznych teorii plastyczności. Zaobserwowane różnice między rezultatami teoretycznymi uzyskanymi za pomocą metod teorii plastyczności a wynikami doświadczalnymi zrodziły potrzebę uwzględnienia efektów reologicznych. Rezultaty badań eksperymentalnych wykazały, że jednocześnie uwzględnienie własności plastycznych i reologicznych materiału jest szczególnie potrzebne przy opisie rozprzestrzeniania się fal naprężenia oraz przy określaniu wytrzymałości konstrukcji poddanych obciążeniom dynamicznym.

Specyfika zagadnienia i skomplikowany charakter sprzężenia efektów reologicznych i plastycznych wymagają specjalnych metod opisu opartych na wnikliwej analizie fizyki materiałów oraz własnych oryginalnych opisów matematycznych.

Łączne traktowanie zjawisk reologicznych i zjawisk plastycznych stwarza jednak ogromne trudności. Uwzględnienie lepkości materiału wprowadza zależność stanów naprężenia i odkształcenia od czasu, natomiast własności plastyczne materiału uzależniają te stany od drogi obciążenia. Uwzględniając jednocześnie właściwości lepkie i plastyczne otrzymujemy więc zależność równań konstytutywnych od drogi i czasu.

Głównym celem obecnej pracy przeglądowej jest dyskusja termodynamicznego opisu materiałów sprężysto/lepkoplastycznych w oparciu o koncepcję parametrów wewnętrznych przy założeniu infinytezymalnych deformacji.

### 2. Opis deformacji i naprężenia<sup>1)</sup>

**2.1. Opis deformacji.** Ciało  $\mathcal{B}$  będziemy traktować jako trójwymiarową różniczkowalną rozmaitość, której elementy  $X$  nazywać będziemy cząsteczkami. Natomiast przez konfigurację  $\chi$  ciała  $\mathcal{B}$  rozumieć będziemy gładki homeomorfizm ciała  $\mathcal{B}$  na obszar trójwymiarowej przestrzeni Euklidesa, tzn.

$$(2.1) \quad x = \chi(X), \quad X = \chi^{-1}(x),$$

gdzie  $\chi^{-1}$  oznacza odwzorowanie odwrotne do  $\chi$ . Punkt  $x = \chi(X)$  jest nazywany miejscem zajmowanym przez cząstkę  $X$ .

<sup>1)</sup> Por. C. Truesdell i W. Noll [40].

Ruchem ciała  $\mathcal{B}$  nazywać będziemy jednoparametrową rodzinę konfiguracji  $\chi_t$ , gdzie rzeczywisty parametr  $t$  będziemy utożsamiać z czasem. Możemy więc napisać

$$(2.2) \quad x = \chi_t(X) = \chi(X, t).$$

Punkt  $x = \chi(X, t)$  jest miejscem, w którym znajduje się cząstka  $X$  w chwili  $t$ .

Chociaż ciała  $\mathcal{B}$  nie należy utożsamiać z jakąkolwiek z jego konfiguracji przestrzennych, to jednak obserwacji fizykalnych nie można na nim przeprowadzać bez przypisania mu jakiejś wybranej konfiguracji. Z wielu względów dogodnie jest uwzględniać ten fakt identyfikując poszczególne cząstki ciała przez podawanie ich położenia w jakiejś konkretnej, ustalonej konfiguracji. Tę ustaloną konfigurację będziemy nazywać konfiguracją odniesienia i oznaczać przez  $\mathcal{R}$ . Konfiguracja odniesienia  $\mathcal{R}$  może być jedną z pozycji zajmowanych przez ciało w czasie jego ruchu. Miejsce cząstki  $X$  w konfiguracji odniesienia  $\mathcal{R}$  określone będzie przez

$$(2.3) \quad X = \mathcal{R}(X).$$

Przypiszemy cząstce pewien układ współrzędnych  $X^\alpha$ , który będziemy nazywać układem współrzędnych materialnych. Wtedy równanie (2.3) może być napisane następująco:

$$(2.4) \quad X = \mathcal{R}(X^\alpha) \quad \text{lub} \quad X^\alpha = \mathcal{R}^{-1\alpha}(X).$$

Równanie (2.4)<sub>2</sub> definiuje układ współrzędnych; w ten sposób cząstka  $X$  i jej miejsce  $X = \mathcal{R}(X)$  w konfiguracji odniesienia mają te same współrzędne  $X^\alpha$ . Dzięki temu równanie (2.2) opisujące ruch ciała  $\mathcal{B}$  możemy napisać w postaci

$$(2.5) \quad x = \chi(\mathcal{R}(X), t) = \chi(X, t).$$

Równanie to opisuje rodzinę konfiguracji ciała w stosunku do konfiguracji odniesienia.

Odnośnie do rozpatrywanego ruchu przyjmujemy następujące aksjomaty:

- 1) aksjomat ciągłości wymagający, aby funkcja ruchu i funkcja odwrotna miała ciągle pochodne dowolnego rzędu, tzn. funkcje  $\chi^k$  i  $\chi^{-1\alpha}$  są dowolną liczbę razy różniczkowalne;
- 2) aksjomat o nieprzenikalności materii, który wymaga, aby funkcja (2.5) była funkcją jednowartościową.

Jeżeli mamy określoną funkcję ruchu (2.5), to dowolny obiekt geometryczny  $A$  zależny od czasu i charakteryzujący pewne pole może być rozpatrywany jako funkcja  $A(X, t)$  cząstki i czasu lub jako funkcja  $A(x, t)$  miejsca i czasu. Zmienne  $X$  i  $t$  nazywamy zmiennymi materialnymi, a zmienne  $x$  i  $t$  zmiennymi przestrzennymi.

Prędkością  $\dot{x}$  nazywamy prędkość zmiany położenia cząstki w czasie ruchu i definiujemy ją następująco:

$$(2.6) \quad \dot{x} = \left[ \frac{\partial}{\partial t} \chi(X, t) \right]_{X=\text{const}}.$$

Podobnie zdefiniujemy przyśpieszenie jako

$$(2.7) \quad \ddot{x} = \left[ \frac{\partial^2}{\partial t^2} \chi(X, t) \right]_{X=\text{const}}.$$

Równanie (2.5), które określa rodzinę konfiguracji ciała w stosunku do konfiguracji odniesienia  $\mathcal{R}$ , możemy również interpretować jako rodzinę deformacji w stosunku do kon-

figuracji odniesienia, przy czym słowo deformacja oznacza zarówno zmiany kształtu, jak i orientacji ciała w przestrzeni.

Gradient deformacji zdefiniowany następująco

$$(2.8) \quad \nabla \chi = \partial \chi(X, t) / \partial X$$

opisuje wszystkie lokalne własności deformacji, dlatego nazywany jest podstawową miarą deformacji.

Wektor przemieszczenia  $u$  jest określony równaniem

$$(2.9) \quad u \equiv x - X = \chi(X, t) - X.$$

Obliczmy następnie gradient przemieszczenia

$$(2.10) \quad \nabla u = \nabla \chi(X, t) - \mathbf{1},$$

gdzie  $\mathbf{1}$  oznacza tensor fundamentalny. Równanie (2.10) pozwala na wyciągnięcie wniosku, że gradient przemieszczenia  $\nabla u$  może być również traktowany jako podstawowa miara deformacji.

Zdefiniujmy tensor odkształcenia infinitezymalnego w sposób następujący

$$(2.11) \quad E = \frac{1}{2} (\nabla u + \nabla u^T),$$

przy założeniu, że gradient przemieszczenia  $\nabla u$  jest wielkością małą dla dowolnego czasu  $t \in [0, \infty)$ , tzn. spełniony jest warunek

$$(2.12) \quad \delta \ll 1, \quad \text{jeżeli} \quad \delta = \sup_{t \in [0, \infty]} |\nabla u(t)|.$$

Będziemy następnie rozważać funkcje zależne od czasu  $t$  i określone przez  $\nabla u(t)$  oraz mające własność, że dla każdego  $t \in (0, \infty)$  ich bezwzględna wartość jest mniejsza niż  $C\delta^n$ , gdzie  $C$  jest dowolną stałą. Każdą taką funkcję będziemy oznaczali symbolem określającym  $O(\delta^n)$ . Jeżeli mamy na przykład dowolną funkcję  $\varphi(t)$  określoną przez gradient przemieszczenia  $\nabla u(t)$ , to będziemy mówili, że funkcja ta jest rzędu  $O(\delta^n)$  i pisali

$$(2.13) \quad \varphi = O(\delta^n),$$

jeżeli

$$(2.14) \quad |\varphi(t)| = C\delta^n \quad \text{dla} \quad t \in [0, \infty).$$

Łatwo zauważymy, że zdefiniowany za pomocą związku (2.11) tensor odkształcenia infinitezymalnego jest wielkością rzędu  $O(\delta)$ .

W dalszym ciągu będziemy rozważać tylko takie procesy deformacji, które spełniają warunek (2.12).

**2.2. Opis naprężenia.** Dotychczas zajmowaliśmy się tylko kinematyką ruchu ciał. Obecnie musimy się zastanowić nad przyczynami ruchu. W tym celu zanalizujemy różne rodzaje sił działających na rozpatrywane ciało  $\mathcal{B}$ .

Załóżmy, że mamy dane ciało  $\mathcal{B}$  i jego ruch. Ruch ciała jest spowodowany działaniem sił zewnętrznych. Siły zewnętrzne dzielą się na dwie grupy: na siły masowe i siły kontaktowe nazywane często siłami powierzchniowymi.

W rozważaniach naszych będziemy pomijać działanie momentów masowych i naprężeń momentowych.

Zdefiniujemy najpierw pojęcie siły masowej. Niech w każdej chwili  $t$  określone będzie pole wektorowe  $b(x, t)$ . Pole to nazywać będziemy gęstością siły masowej na jednostkę masy. Wektor  $F_b(\mathcal{P})$  określony przez całkę objętościową

$$(2.15) \quad F_b(\mathcal{P}) = \int_{\mathcal{P}} b \rho \, dv$$

wziętą po całej objętości części  $\mathcal{P}$  ciała  $\mathcal{B}$  w konfiguracji  $\chi_t$ , nazywa się wypadkową zewnętrznych sił masowych działających na część  $\mathcal{P}$  ciała  $\mathcal{B}$ .

Siły kontaktowe albo powierzchniowe zdefiniujemy następująco. Niech w każdej chwili  $t$  na powierzchni  $\partial\mathcal{P}$  ograniczającej pewną część  $\mathcal{P}$  ciała  $\mathcal{B}$  zdefiniowane będzie pole wektorowe  $t(x, \mathcal{P})$ . Nazywać je będziemy gęstością siły kontaktowej albo powierzchniowej. Pole to prościej będziemy nazywać wektorem naprężenia działającym na część  $\mathcal{P}$  ciała  $\mathcal{B}$ . Wypadkowa siła kontaktowa  $F_c(\mathcal{P})$  działająca na  $\mathcal{P}$  w chwili  $t$  określona jest przez całkę powierzchniową

$$(2.16) \quad F_c(\mathcal{P}) = \int_{\partial\mathcal{P}} t(x, \mathcal{P}) \, da,$$

liczoną po powierzchni  $\partial\mathcal{P}$  w konfiguracji  $\chi_t$ .

Założmy, że istnieje funkcja wektorowa  $t(x, n)$ , zdefiniowana dla wszystkich punktów  $x$  w ciele  $\mathcal{B}$  i dla wszystkich wektorów jednostkowych  $n$ , taka, że naprężenie działające na dowolną część  $\mathcal{P}$  ciała  $\mathcal{B}$  określa funkcja

$$(2.17) \quad t(x, \mathcal{P}) = t(x, n),$$

gdzie  $n$  jest zewnętrznym, jednostkowym wektorem normalnym w punkcie  $x$  na powierzchni ograniczającej  $\mathcal{P}$ . Wektor  $t(x, n)$  jest nazywany wektorem naprężenia w punkcie  $x$  działającym na zorientowany element powierzchni o normalnej  $n$ . Wprowadzając odpowiednie warunki ciągłości udowodnić możemy istnienie tensorowego pola naprężenia  $T$ , takiego że wektor naprężenia  $t(x, n)$  może być wyrażony za pomocą tensora  $T(x, t)$  następująco:

$$(2.18) \quad t(x, n) = T(x, t) n.$$

Tensor  $T(x, t)$  jest nazywany tensorem naprężenia Cauchy'ego. Często wygodnie jest posługiwać się inną miarą naprężenia zdefiniowaną wyrażeniem

$$(2.19) \quad T_{\mathfrak{A}} \equiv \det(\nabla\chi) (\nabla\chi)^{-1} T (\nabla\chi^{-1})^T.$$

Tensor  $T_{\mathfrak{A}}$  nazywany jest drugim tensorem naprężenia Pioli–Kirchhoffa.

W przypadku spełnienia warunku (2.12) tzn. kiedy proces deformacji prowadzi do nieskończonej małych odkształceń tensor naprężenia Cauchy'ego  $T$  i drugi tensor naprężenia Pioli–Kirchhoffa  $T_{\mathfrak{A}}$  są nierozróżnialne, tzn.

$$(2.20) \quad T = T_{\mathfrak{A}}.$$

### 3. Podstawowe zasady mechaniki i termodynamiki

3.1. Zasada zachowania pędu i momentu pędu<sup>2)</sup>. W celu sformułowania podstawowych zasad mechaniki wprowadzimy definicję siły i momentu działających na ciało  $\mathcal{B}$  o objętości  $\mathcal{P}$ . Wielkości te są następującymi wektorami:

$$(3.1) \quad F = \int_{\mathcal{P}} dF, \quad M = \int_{\mathcal{P}} (p \times dF + dM),$$

gdzie  $dF$  i  $dM$  są odpowiednio elementarną siłą i elementarnym momentem działającym na jednostkowy element objętości ciała. Równanie (3.1)<sub>2</sub> jest odniesione do początku układu, w którym określony jest promień wektora  $p$ . Symbol  $x$  oznacza iloczyn wektorowy wektorów  $p$  i  $dF$ .

Wielkości  $F$  i  $M$  są znane a priori dla danego ciała i są takie same dla wszystkich obserwatorów.

Oznaczmy przez  $P$  pęd, a przez  $H$  moment pędu względem początku układu ciała  $\mathcal{B}$ .

Podstawowe prawa mechaniki klasycznej, nazywane prawami Eulera, mogą być wyrażone wzorami

$$(3.2) \quad F = \dot{P}, \quad M = \dot{H}$$

słusznymi dla dowolnego ciała  $\mathcal{B}$ . Te dwa równania opisują odpowiednio zasadę zachowania pędu i zasadę zachowania momentu pędu.

Wielkości  $F$  i  $M$  przedstawiają obciążenie ciała  $\mathcal{B}$ , podczas gdy wielkości  $P$  i  $H$  w dowolnym układzie odniesienia są reakcją ciała wywołaną działaniem obciążenia  $F$  i  $M$ .

Prawa Eulera mogą być ogólnie wysłowione w postaci następującego stwierdzenia: w układzie inercjalnym reakcja dowolnego ciała jest równa działającemu na nie obciążeniu.

Korzystając z analizy sił działających na ciało, przeprowadzonej w p. 2.2 możemy napisać

$$(3.3) \quad F = \int_{\partial\mathcal{P}} t(x, n) da + \int_{\mathcal{P}} b \rho dv = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}} \dot{p} \rho dv = \dot{P},$$

$$(3.4) \quad M = \int_{\partial\mathcal{P}} p \times t(x, n) da + \int_{\mathcal{P}} (p \times b) \rho dv = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}} (p \times \dot{p}) \rho dv = \dot{H}.$$

3.2. Podstawowe prawa Cauchy'ego. Wykorzystując definicję tensora naprężenia (2.17), definicję przyspieszenia  $\ddot{x}$  (2.7) oraz posługując się przekształceniem Greena

$$(3.5) \quad \int_{\mathcal{P}} \operatorname{div} T dv = \int_{\partial\mathcal{P}} T n da,$$

dostajemy z (3.3) zależność

$$(3.6) \quad \operatorname{div} T - \rho \ddot{x} = -\rho b,$$

spełnioną w każdym punkcie rozpatrywanego ciała  $\mathcal{B}$ .

<sup>2)</sup> Wyczerpujące omówienie zasad mechaniki można znaleźć w monografii C. Truesdella i R. Toupin [39]; por. również A. E. Green i W. Zerna [9].

Równanie (3.6) jest pierwszym prawem ruchu Cauchy'ego i wyraża dostateczny i wystarczający warunek dla zachowania zasady pędu. W reprezentacji kontrawariantnej równanie (3.6) ma postać

$$(3.7) \quad T^{km},{}_m - \rho \ddot{x}^k = -\rho b^k.$$

Postępując podobnie z równaniem (3.4) i uwzględniając równanie (3.6) dostajemy następujący rezultat:

$$(3.8) \quad T = T^T, \quad T^{km} = T^{mk}$$

spełniony w każdym punkcie ciała  $\mathcal{B}$ .

Równanie (3.8) wyraża drugie prawo ruchu Cauchy'ego. Prawo to może być wypowiedziane następująco: koniecznym i wystarczającym warunkiem spełnienia zasady zachowania momentu pędu w ciele, dla którego spełniona jest zasada zachowania pędu, jest symetryczność tensorowa naprężenia.

**3.3. Niezmienniki tensora naprężenia.** Drugie prawo ruchu Cauchy'ego wymaga, aby tensor naprężenia  $T$  był symetryczny. To zapewnia istnienie trzech rzeczywistych liczb, nazywanych naprężeniami głównymi oraz istnienie trzech rzeczywistych ortogonalnych kierunków głównych, które określają główne osie naprężenia.

Niezmienniki tensora naprężenia  $I_T$ ,  $II_T$ ,  $III_T$  są zdefiniowane jako współczynniki następującego wielomianu względem  $\lambda$

$$(3.9) \quad \det(\lambda I + T) = \lambda^3 + I_T \lambda^2 + II_T \lambda + III_T.$$

Jeżeli przez  $\sigma_a$  oznaczamy naprężenia główne, to mamy proste związki:

$$(3.10) \quad I_T = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3, \quad II_T = \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1, \quad III_T = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3.$$

**3.4. Pierwsza zasada termodynamiki.** Rozważmy ruch ciała  $\mathcal{B}$  o objętości  $\mathcal{P}$  ograniczonej powierzchnią  $\partial\mathcal{P}$ . Oznaczamy przez  $\mathcal{K}$  energię kinetyczną ciała podczas jego ruchu, a przez  $\mathcal{E}$  jego energię wewnętrzną. Następnie przyjmujemy, że do ciała  $\mathcal{B}$  dostarczona jest energia mechaniczna na skutek działania na ciało układu sił oraz energia niemechaniczna za pośrednictwem przepływu ciepła i promieniowania. Całkowitą moc mechaniczną oznaczmy przez  $\mathcal{W}$ , a całkowitą moc niemechaniczną przez  $\mathcal{Q}$ .

Zasada zachowania energii dla ciała  $\mathcal{B}$  może być wyrażona przez następujące równanie:

$$(3.11) \quad \dot{\mathcal{K}} + \dot{\mathcal{E}} = \mathcal{W} + \mathcal{Q}.$$

Prawo (3.11) jest nazywane często pierwszą zasadą termodynamiki, którą można wypowiedzieć następująco: zmiana całkowitej energii ciała  $\mathcal{B}$  w czasie jest spowodowana przyrostem pracy dostarczonej do ciała przez źródła mechaniczne i niemechaniczne.

Dla ośrodka ciągłego moc mechaniczna będzie równa sumie prędkości zmiany pracy sił powierzchniowych działających na powierzchni  $\partial\mathcal{P}$  ciała  $\mathcal{B}$  oraz prędkości zmiany pracy sił masowych wewnątrz całej objętości  $\mathcal{P}$  ciała  $\mathcal{B}$ . Możemy napisać

$$(3.12) \quad \mathcal{W} = \int_{\partial\mathcal{P}} Tn \cdot \dot{x} da + \int_{\mathcal{P}} b \cdot \dot{x} \rho dv.$$

Natomiast moc niemechaniczna spowodowana jest przepływem strumienia ciepła  $q$  przez powierzchnię ciała  $\partial\mathcal{P}$  oraz prędkością zmiany energii promieniowania  $r$  na jednostkę masy i może być wyrażona następująco:

$$(3.13) \quad Q = \int_{\partial\mathcal{P}} qn da + \int_{\mathcal{P}} r\rho dv = \int_{\mathcal{P}} \operatorname{div} q dv + \int_{\mathcal{P}} r\rho dv.$$

Energia wewnętrzna  $\mathcal{E}$  ciała  $B$  może być wyrażona za pomocą właściwej energii wewnętrznej  $\varepsilon$  odniesionej do jednostkowej masy w postaci całki

$$(3.14) \quad \mathcal{E} = \int_{\mathcal{P}} \varepsilon\rho dv.$$

Obliczamy wreszcie energię kinetyczną  $\mathcal{K}$  ciała  $\mathcal{B}$

$$(3.15) \quad \mathcal{K} = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{P}} \dot{x}^2 \rho dv,$$

gdzie przez  $\dot{x}^2$  rozumiemy iloczyn skalarny  $\dot{x} \cdot \dot{x}$ .

Dla obszarów, w których  $T$ ,  $\dot{x}$  i  $q$  są funkcjami klasy  $C^1$ , tzn. są ciągłe wraz ze swymi pierwszymi pochodnymi, podczas gdy  $\ddot{x}$  i  $r$  są funkcjami klasy  $C^0$ , tzn. ciągłymi, po wykorzystaniu tożsamości

$$(3.16) \quad \int_{\partial\mathcal{P}} Tn \cdot \dot{x} da = \int_{\mathcal{P}} [\operatorname{div} T \cdot \dot{x} + \operatorname{tr}(T\dot{E})] dv,$$

gdzie  $\dot{E}$  jest tensorem prędkości odkształcenia, możemy napisać

$$(3.17) \quad \rho\ddot{x} \cdot \dot{x} + \rho\dot{\varepsilon} = \operatorname{div} T \cdot \dot{x} + \operatorname{tr}(T\dot{E}) + \rho b \cdot \dot{x} + \operatorname{div} q + \rho r.$$

Należy zaznaczyć, że przy różniczkowaniu materialnym wyrażen na energię wewnętrzną (3.14) i energię kinetyczną (3.15) uwzględniłszy zasadę zachowania masy wyrażoną związkiem

$$(3.18) \quad \frac{d}{dt}(\rho dv) = 0,$$

który w przypadku odkształceń infinytezymalnych ma postać

$$(3.19) \quad \rho_R = \rho.$$

Napiszemy równanie (3.17) w następującej postaci:

$$(3.20) \quad (\rho\ddot{x} - \operatorname{div} T - \rho b) \cdot \dot{x} = \operatorname{tr}(T\dot{E}) - \operatorname{div} q - \rho\dot{\varepsilon} + \rho r.$$

Uwzględniając w (3.20) pierwsze prawo ruchu Cauchy'ego dostaniemy

$$(3.21) \quad \operatorname{tr}(T\dot{E}) - \operatorname{div} q - \rho\dot{\varepsilon} = -\rho r.$$

Otrzymane równanie jest spełnione w każdym punkcie materialnym  $X$  ciała  $\mathcal{B}$ . Jest to różniczkowa postać równania zachowania energii.

**3.5. Druga zasada termodynamiki<sup>3)</sup>.** Oznaczmy przez  $\vartheta = \vartheta(X, t)$  lokalną temperaturę, którą będziemy przyjmowali jako zawsze dodatnią,  $\vartheta > 0$ , tzn. może być np. mierzona w skali bezwzględnej. Wprowadźmy następnie funkcję  $\eta = \eta(X, t)$ , którą będziemy nazywać właściwą entropią na jednostkę masy.

<sup>3)</sup> Por. B. D. Coleman i W. Noll [1].

Uważając  $q/\vartheta$  za wektorowy strumień entropii spowodowany przepływem ciepła i  $r/\vartheta$  za skalarową prędkość dostarczania entropii na skutek promieniowania, możemy zdefiniować prędkość powstawania entropii w części  $\mathcal{P}$  ciała  $\mathcal{B}$  jako

$$(3.22) \quad \dot{\mathcal{E}} = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}} \eta dm - \int_{\mathcal{P}} \frac{r}{\vartheta} dm + \int_{\partial\mathcal{P}} \frac{1}{\vartheta} q \cdot n da,$$

gdzie  $dm$  jest elementem masy w  $\mathcal{B}$  w konfiguracji  $\chi_t$ .

Należy zwrócić uwagę na znak ostatniej całki w równaniu (3.22). Jeżeli wektor strumienia przepływu ciała  $q$  jest skierowany do wewnątrz ciała, to ze względu na to, że jednostkowy wektor normalny skierowany jest na zewnątrz powierzchni  $\partial\mathcal{P}$  elementu  $\mathcal{P}$ , znak analizowanej całki będzie ujemny. W przypadku przeciwnym, kiedy odbieramy od ciała  $\mathcal{B}$  ciepło, znak tej całki będzie dodatni.

Przy odpowiednich założeniach regularności równanie (3.22) można zapisać w postaci

$$(3.23) \quad \dot{\mathcal{E}} = \int_{\mathcal{P}} \xi dm,$$

gdzie

$$(3.24) \quad \xi = \dot{\eta} - \frac{r}{\vartheta} + \frac{1}{\varrho} \operatorname{div}(q/\vartheta) = \dot{\eta} - \frac{r}{\vartheta} + \frac{1}{\varrho\vartheta} \operatorname{div} q - \frac{1}{\varrho\vartheta^2} q \cdot \nabla\vartheta$$

jest właściwą prędkością powstawania entropii.

Drugą zasadę termodynamiki można ściśle matematycznie sprecyzować w postaci następującego postulatu:

Dla każdego dopuszczalnego procesu termodynamicznego w ciele  $\mathcal{B}$  następująca nierówność musi być spełniona w każdej chwili czasu  $t$  i dla wszystkich części  $\mathcal{P}$  ciała  $\mathcal{B}$ :

$$(3.25) \quad \dot{\mathcal{E}} \geq 0.$$

Ścisłą definicję dopuszczalnego procesu termodynamicznego podamy w następnym rozdziale.

Nierówność (3.25) jest nazywana nierównością Clausiusa–Duhema. Jak się przekonamy w następnych punktach podstawowy postulat wyrażający drugą zasadę termodynamiki będzie nakładał pewne ograniczenia na układ równań konstytutywnych opisujących rozważany materiał.

Aby nierówność (3.25) była spełniona dla wszystkich części  $\mathcal{P}$  ciała  $\mathcal{B}$ , warunkiem koniecznym i wystarczającym będzie

$$(3.26) \quad \xi \geq 0$$

w każdej cząstce  $X$  ciała  $\mathcal{B}$ .

Dla każdego procesu termodynamicznego zasada zachowania energii (3.21) pozwala na napisanie (3.24) w postaci

$$(3.27) \quad \xi = \dot{\eta} - \frac{\dot{\varepsilon}}{\vartheta} + \frac{1}{\varrho\vartheta} \operatorname{tr}(T\dot{\mathcal{E}}) - \frac{1}{\varrho\vartheta^2} q \cdot \nabla\vartheta.$$

Wprowadzimy obecnie jeszcze jedną nową wielkość, mianowicie właściwą energię swobodną  $\psi$ . Funkcję  $\psi(X, t)$  zdefiniujemy następującym równaniem

$$(3.28) \quad \psi = \varepsilon - \eta\vartheta.$$

Funkcja  $\psi$  jest często nazywana swobodną energią Helmholtza na jednostkę masy.



Zrózniczkujemy materialnie równanie (3.19). Dostaniemy zależność

$$(3.29) \quad \dot{\psi} = \dot{\epsilon} - \vartheta \dot{\eta} - \dot{\vartheta} \eta.$$

Uwzględniając, że  $\vartheta > 0$  na podstawie (3.29) możemy związek (3.27) napisać jako równanie

$$(3.30) \quad \vartheta \dot{\xi} = -\dot{\psi} + \frac{1}{\rho} \operatorname{tr}(\dot{T}E) - \eta \dot{\vartheta} - \frac{1}{\rho \vartheta} q \cdot \nabla \vartheta.$$

#### 4. Termodynamiczna teoria materiału reologicznego z wewnętrznymi zmianami strukturalnymi

Będziemy rozważać ciało  $\mathcal{B}$ , które może być deformowane i przewodzić ciepło. Celem naszym będzie opis dysypacji w takim ciele. Chcąc ją bliżej scharakteryzować musimy zdecydować się, jaki materiał będziemy przypisywać ciału  $\mathcal{B}$ . Praktyka bowiem wykazuje, że dwa fizyczne ciała o identycznym kształcie i rozkładzie masy mogą zachowywać się zupełnie inaczej pod wpływem takich samych obciążeń. Różnica ta spowodowana jest tym, że ciała te są z innych materiałów. Materiał ciała jest zdefiniowany założeniem konstytutywnym, które jest ograniczeniem nałożonym na procesy termodynamiczne dla ciała  $\mathcal{B}$  i które wyraża zasadę determinizmu. W punkcie tym chcemy opisać szeroką klasę materiałów, które nazywaliśmy materiałami reologicznymi z wewnętrznymi zmianami strukturalnymi. Są to materiały, które przed uplastycznieniem charakteryzują się właściwościami reologicznymi, a po osiągnięciu stanu plastycznego mogą podlegać odkształceniom trwałym. Odkształcenia te, nazywane odkształceniami plastycznymi, wywołują w materiale wewnętrzne zmiany strukturalne. Należy jednak podkreślić, że charakter procesu deformacji plastycznych będzie w dużym stopniu zależny od tego czy rozważane obciążenia, które wywołują plastyczne płynięcie, są statyczne czy dynamiczne. Obciążenia dynamiczne wywołują zwykle proces odkształceń plastycznych zależnych od prędkości deformacji.

Termodynamiczny opis materiałów reologicznych z wewnętrznymi zmianami strukturalnymi oprzemy na koncepcji wprowadzenia parametrów wewnętrznych<sup>4)</sup>.

Aby zdefiniować parametry wewnętrzne i omówić ich rolę musimy podać różnicę między procesem termodynamicznym odwracalnym i procesem termodynamicznym nieodwracalnym. Makroskopowy proces termodynamiczny będziemy nazywać odwracalnym jeśli możliwe jest przywrócenie stanu początkowego układu i otoczenia. Proces termodynamiczny nie spełniający tych warunków nazwiemy nieodwracalnym.

Zmienne służące do pełnego zdefiniowania ciała  $\mathcal{B}$  podczas odwracalnego procesu termodynamicznego nazywamy zmiennymi stanu. W procesie termodynamicznym nieodwracalnym aktualne wartości zmiennych stanu są niewystarczające, aby opisać stan ciała  $\mathcal{B}$ . Tak więc, w celu pełnego opisu stanu ciała  $\mathcal{B}$  podczas nieodwracalnego procesu termodynamicznego wymagane są dodatkowe zmienne, które mogłyby jednoznacznie

<sup>4)</sup> Opis dysypacji materiału za pomocą parametrów wewnętrznych został szeroko omówiony w pracach B. D. Colemana i M. E. Gurtina [3] oraz przez K. C. Valanisa [41, 42]. Inny opis dysypacji materiału wykorzystujący zanikającą pamięć materiału podany został przez B. D. Colemana [2], B. D. Colemana i V. J. Mizela [4], M. E. Gurtina i A. C. Pipkina [11] oraz J. Meixnera [20].

opisać wewnętrzną dysypację materiału. Te dodatkowe zmienne nazywać będziemy parametrami wewnętrznymi<sup>5)</sup>.

W przypadku materiału reologicznego z wewnętrznymi zmianami strukturalnymi są dwie jakościowo różne przyczyny wewnętrznej dysypacji materiału. Przyczyną pierwszą są efekty lepkie materiału, a drugą wewnętrzne zmiany strukturalne zachodzące podczas deformacji plastycznych. W celu jednoczesnego opisu obydwu przyczyn dysypacji wprowadzimy dwie jakościowo różne grupy parametrów wewnętrznych.

Będziemy rozważać tylko infinitezymalne odkształcenia ciała  $\mathcal{B}$  spełniające warunek (2.12). Dzięki temu opis deformacji ulegnie istotnemu uproszczeniu. Warunek (2.12) pozwala rozdzielić addytywnie całkowite odkształcenie  $E$  na odkształcenie sprężysto-lepkie i odkształcenie niesprężyste o charakterze trwałym (plastycznym)  $P$ , tzn.

$$(4.1) \quad E = V + P.$$

Proces termodynamiczny dla ciała  $\mathcal{B}$  jest opisany układem funkcji zależnych od częścieczki  $X$  i czasu  $t$ , tzn.

$$(4.2) \quad \{A^*(x, t), \quad II(x, t), \quad \alpha(x, t), \quad \omega(x, t)\}.$$

Funkcja  $A^*$  reprezentuje parę odkształcenie–temperatura

$$(4.3) \quad A^* = \{E, \vartheta\}.$$

Często mówimy, że  $A^*$  opisuje konfigurację lokalną temperaturowo-deformacyjną częścieczki  $X$ . Funkcja  $II$  reprezentuje zmienne zależne

$$(4.4) \quad II = \{\psi, \eta, T, q\},$$

gdzie  $\psi$  oznacza właściwą energię swobodną na jednostkę masy,  $\eta$  właściwą entropię,  $T$  tensor naprężenia i  $q$  wektor strumienia ciepła odniesiony do jednostkowej powierzchni w konfiguracji odniesienia  $\mathcal{B}$ . Funkcje  $\alpha$  i  $\omega$  reprezentują dwie grupy parametrów wewnętrznych<sup>6)</sup>. Pierwsza grupa  $\alpha$  jest wprowadzona w celu opisu efektów reologicznych, a druga  $\omega$  w celu opisu zmian strukturalnych zachodzących podczas deformacji plastycznych.

Postulujemy, że

$$(4.5) \quad \alpha = \alpha^{(j)}, \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

gdzie  $\alpha^{(j)}$  dla  $j = 1, 2, \dots, m$  są skalarami, natomiast

$$(4.6) \quad \omega = \{\kappa, P, I^{(i)}\}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

gdzie  $\kappa$  reprezentuje skalarowy parametr wzmocnienia izotropowego,  $P$  oznacza zdefiniowany za pomocą związku (4.1) infinitezymalny tensor odkształcenia niesprężystego o charakterze trwałym (plastycznym) i  $I^{(i)}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) są symetrycznymi tensorami drugiego rzędu opisującymi rozkład dyslokacji.

W zdefiniowanym powyżej procesie termodynamicznym dla ciała  $\mathcal{B}$  nie występują dwie funkcje, mianowicie funkcja siły masowej,  $b(X, t)$  i funkcja określająca prędkość dostarczania ciepła na jednostkę masy  $r(X, t)$ . Ponieważ jednak każdy proces termodynamiczny powinien być zgodny z prawami mechaniki i termodynamiki, stąd spełnienie

<sup>5)</sup> Definicję tę podał K. C. Valanis [42].

<sup>6)</sup> Koncepcja ta została przedstawiona w pracach [34, 35], por. również [25, 32, 33, 15 i 16].

pierwszego równania ruchu Cauchy'ego (3.6) determinuje gęstość siły masowej  $b$ , a spełnienie pierwszego prawa termodynamiki (3.21) określa funkcję  $r$ .

Warto zauważyć, że para odkształcenie–temperatura  $A^* = \{E, \vartheta\}$  reprezentuje termodynamiczne zmienne stanu. Ze względu na zależność (4.1) oraz na wprowadzenie drugiej grupy parametrów wewnętrznych  $\omega$  w postaci (4.6) możemy przyjąć w celu wygody jako termodynamiczne zmienne stanu nową parę

$$(4.7) \quad A = \{V, \vartheta\},$$

gdzie  $V$  oznacza infinitezymalne odkształcenie sprężysto-lepkie zdefiniowane zależnością (4.1).

Wprowadźmy pojęcie cząsteczki uogólnionej  $p$ , która jest zdefiniowana następująco (por. WANG [43]):

1. Jest opisana za pomocą funkcji

$$(4.8) \quad g(t) = \{A(t), \nabla\vartheta; \quad \alpha, \omega\};$$

2. Wyposażona jest w układ funkcji konstytutywnych  $L = \{\Psi, N, T, Q\}$ ,  $A = \{A^{(j)}\}$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$ ,  $\Omega = \{K, G, Z^{(i)}\}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , definiujących materiał w cząsteczce  $X$  za pomocą równań

$$(4.9) \quad \begin{aligned} \Pi(t) &= L(g(t)), \\ \dot{\alpha}(t) &= A(g(t)), \\ \dot{\omega}(t) &= \Omega(g(t)), \end{aligned}$$

gdzie  $\Psi$  oznacza funkcję konstytutywną energii swobodnej,  $N$  entropii,  $T$  naprężenia,  $Q$  strumienia ciepła, funkcje  $A^{(j)}$  określają prędkość zmiany parametrów  $\alpha^{(j)}$  dla  $j = 1, 2, \dots, m$ ,  $K$  określa prędkość zmiany parametru wzmocnienia izotropowego,  $G$  prędkość zmiany tensora odkształcenia niesprężystego i  $Z^{(i)}$  prędkość zmiany tensorów opisujących rozkład dyslokacji ( $i = 1, 2, \dots, n$ ).

Proces termodynamiczny  $\{A, \Pi, \alpha, \omega\}$  spełniający równania konstytutywne (4.9) w każdej cząsteczce uogólnionej  $p$  ciała  $\mathcal{B}$  będziemy nazywać dopuszczalnym procesem termodynamicznym.

Dopuszczalny proces termodynamiczny  $\{A, \Pi, \alpha, \omega\}$  powinien być zgodny z drugim prawem termodynamiki. Musimy zażądać, aby proces ten spełniał postulat termodynamiczny (3.25). Jest to równoważne spełnieniu następującej nierówności [por. z (3.26) i (3.30)]:

$$(4.10) \quad -\dot{\psi} - \eta\dot{\vartheta} + \frac{1}{\rho} \operatorname{tr}(T\dot{E}) - \frac{1}{\rho\vartheta} q \cdot \nabla\vartheta \geq 0$$

w każdej cząsteczce uogólnionej  $p$  w ciele  $\mathcal{B}$ .

W celu zbadania ograniczeń jakie nakłada postulat termodynamiczny założmy, że będziemy rozważać tylko taki materiał i takie procesy, dla których funkcja konstytutywna energii swobodnej  $\Psi$  jest różniczkowalna względem  $g(t)$ .

Obliczmy

$$(4.11) \quad \begin{aligned} \dot{\psi}(t) &= \operatorname{tr}(\partial_v \Psi \dot{V}) + \partial_s \Psi \dot{\vartheta} + \partial_{\nabla s} \Psi \cdot \nabla \dot{\vartheta} + \\ &+ \sum_{j=1}^m \partial_{\alpha^{(j)}} \Psi \dot{\alpha}^{(j)} + \partial_x \Psi \dot{x} + \operatorname{tr}(\partial_r \Psi \dot{P}) + \sum_{i=1}^n \operatorname{tr}[\partial_{Z^{(i)}} \Psi \dot{Z}^{(i)}]. \end{aligned}$$

Podstawiając rezultat (4.11) do nierówności (4.10) otrzymujemy

$$(4.12) \quad \frac{1}{\varrho} \operatorname{tr}[(T - \varrho \partial_\nu \Psi) \dot{V}] - (\partial_s \Psi + \eta) \dot{\vartheta} - \partial_{\nabla s} \Psi \cdot \nabla \dot{\vartheta} - \sum_{j=1}^m \partial_{\alpha^{(j)}} \Psi \dot{\alpha}^{(j)} - \\ - \partial_x \Psi \dot{\kappa} - \operatorname{tr} \left[ \left( \partial_p \Psi - \frac{1}{\varrho} T \right) \dot{P} - \sum_{i=1}^n \operatorname{tr}[\partial_{r^{(i)}} \Psi \dot{r}^{(i)}] \right] - \frac{1}{\varrho \vartheta} q \cdot \nabla \vartheta \geq 0.$$

Wybierając dowolnie wielkości  $\dot{V}$ ,  $\dot{\vartheta}$  i  $\nabla \dot{\vartheta}$  można wykazać, że zawsze potrafimy określić dopuszczalny proces termodynamiczny w ciele  $\mathcal{B}$ .

Spełnienie nierówności termodynamicznej (4.10) daje następujące rezultaty:

$$(4.13) \quad \begin{aligned} \partial_{\nabla s} \Psi &= 0, \\ T(t) &= \varrho \partial_\nu \Psi(g^*(t)), \\ \eta(t) &= -\partial_s \Psi(g^*(t)), \\ \sum_{j=1}^m \partial_{\alpha^{(j)}} \Psi \dot{\alpha}^{(j)} + \partial_x \Psi \dot{\kappa} + \operatorname{tr} \left[ \left( \partial_p \Psi - \frac{1}{\varrho} T \right) \dot{P} \right] + \\ &+ \sum_{i=1}^n \operatorname{tr}[\partial_{r^{(i)}} \Psi \dot{r}^{(i)}] + \frac{1}{\varrho \vartheta} q \cdot \nabla \vartheta \leq 0, \end{aligned}$$

gdzie

$$(4.14) \quad g^*(t) = \{A; \alpha, \omega\}.$$

Zdefiniujmy funkcję opisującą dysypację wewnętrzną materiału w sposób następujący:

$$(4.15) \quad \sigma = \sigma_\alpha + \sigma_\omega = -\frac{1}{\vartheta} \left\{ \left[ \sum_{j=1}^m \partial_{\alpha^{(j)}} \Psi A^{(j)} \right] + \right. \\ \left. + \left[ \partial_x \Psi K + \operatorname{tr} \left( \partial_p \Psi - \frac{1}{\varrho} T \right) G + \sum_{i=1}^n \operatorname{tr}(\partial_{r^{(i)}} \Psi Z^{(i)}) \right] \right\}.$$

Po podstawieniu (4.15) do nierówności ogólnej dysypacji (4.13)<sub>4</sub> otrzymamy

$$(4.16) \quad \sigma - \frac{1}{\varrho \vartheta^2} q \cdot \nabla \vartheta \geq 0.$$

W przypadku jednorodnego rozkładu temperatury w całym ciele  $\mathcal{B}$  mamy  $\nabla \vartheta \equiv 0$  i wtedy nierówność ogólnej dysypacji przybiera postać nierówności dysypacji wewnętrznej

$$(4.17) \quad \sigma \geq 0.$$

Założmy następnie, że wewnętrzne zmiany strukturalne zachodzą tylko podczas deformacji plastycznych, tzn. wtedy kiedy  $\dot{P} \neq 0$ . Warunek ten będzie spełniony dla naszego opisu jeżeli przyjmiemy<sup>7)</sup>

$$(4.18) \quad K = \operatorname{tr}[J(g(t)) \dot{P}], \quad Z^{(i)} = S^{(i)}(g(t))[\dot{P}].$$

<sup>7)</sup> Ogólniejszy opis parametrów wewnętrznych  $r^{(i)}$  wprowadzili J. Kratochvil i O. W. Dillon [16].

Założenie to implikuje, że dysypacja wewnętrzna jest określona zależnością

$$(4.19) \quad \sigma = -\frac{1}{\vartheta} \left\{ \left[ \sum_{j=1}^m \partial_{\alpha^{(j)}} \Psi A^{(j)} \right] + \text{tr} \left[ \left( \partial_{\kappa} \Psi J + \partial_P \Psi - \partial_V \Psi + \sum_{i=1}^n \partial_{r^{(i)}} \Psi S^{(i)} \right) G \right] \right\}.$$

### 5. Materiał sprężysto/lepkoplastyczny

Zajmiemy się obecnie opisem materiału, który przed uplastycznieniem posiada właściwości reologiczne, a po uplastycznieniu sprężysto/lepkoplastyczne (por. [34 i 35]). Wykorzystamy w tym celu poprzednie rezultaty otrzymane dla materiału reologicznego z wewnętrznymi zmianami strukturalnymi.

Z wzoru na dysypację wewnętrzną widzimy, że funkcja  $G$ , która opisuje prędkość zmiany tensora deformacji niesprężystej odgrywa decydującą rolę w teorii materiału z wewnętrznymi zmianami strukturalnymi.

Rezultaty badań eksperymentalnych w zakresie dynamicznych właściwości materiałów wskazują, że podstawową przyczyną różnego zachowania się materiału podczas dynamicznego i statycznego obciążenia jest wrażliwość materiału na prędkość deformacji i zmiany temperatury. Efekty prędkości odkształcenia i zmian temperatury mogą być uwzględnione w ramach lepkoplastyczności. Ogólnie przyjmuje się w lepkoplastyczności, że prędkość odkształcenia nieprężystego  $\dot{P}$  jest funkcją nadwyżki naprężenia nad stan quasi-statycznego uplastycznienia. To założenie jest umotywowane fizykalną teorią ruchu dyslokacji dla materiałów krystalicznych bazującą na procesach termicznych aktywacji.

Materiał reologiczny z wewnętrznymi zmianami strukturalnymi przed uplastycznieniem ma właściwości lepkie, stąd początkowy warunek quasi-statycznego uplastycznienia powinien zależeć od efektów pamięci. Efekty te są opisane przez parametry wewnętrzne  $\alpha^{(j)}$ . Tak więc, quasi-statyczny warunek uplastycznienia może być zdefiniowany następująco

$$(5.1) \quad \mathcal{F}(A(t); \alpha(t), \omega(t)) = \frac{f(T, \vartheta; \alpha^{(j)}, P, \Gamma^{(i)})}{\kappa} - 1,$$

gdzie parametr wzmocnienia izotropowego  $\kappa$  zdefiniowany jest równaniami (4.9)<sub>3</sub> i (4.18)<sub>1</sub>, a tensory rozkładu dyslokacji równaniami (4.9)<sub>3</sub> i (4.18)<sub>2</sub>.

Postulujemy, że następujące równanie różniczkowe determinuje wewnętrzny parametr  $P$  dla materiału sprężysto/lepkoplastycznego:

$$(5.2) \quad \dot{P}(t) = \gamma(\vartheta) \langle \Phi(\mathcal{F}) \rangle M(T, \vartheta, \nabla \vartheta; \alpha, \omega),$$

gdzie  $\gamma(\vartheta)$  jest zależnym od temperatury współczynnikiem lepkości materiału. Bezwymiarowa funkcja  $\langle \Phi(\mathcal{F}) \rangle$  może być tak dobrana aby reprezentowała rezultaty badań dotyczące dynamicznego zachowania się materiału. Odpowiedni wybór funkcji  $\Phi(\mathcal{F})$  pozwoli opisać wpływ prędkości odkształcenia i temperatury na granicę plastyczności materiału. Symbol  $\langle \Phi(\mathcal{F}) \rangle$  jest zdefiniowany następująco:

$$(5.3) \quad \langle \Phi(\mathcal{F}) \rangle = \begin{cases} 0 & \text{dla } \mathcal{F} \leq 0, \\ \Phi(\mathcal{F}) & \text{dla } \mathcal{F} > 0. \end{cases}$$

Przez  $M$  oznaczyliśmy symetryczny tensor drugiego rzędu.

Założenie konstytutywne (5.2) dla  $\mathcal{F} > 0$  prowadzi do następującego dynamicznego kryterium plastyczności

$$(5.4) \quad f(T, \vartheta; \alpha^{(j)}, P, \Gamma^{(i)}) = \varkappa \left\{ 1 + \Phi^{-1} \left[ \frac{(\text{tr } \dot{P}^2)^{1/2}}{\gamma(\vartheta)} (\text{tr } M^2)^{-1/2} \right] \right\}.$$

Związek (5.4) może być interpretowany jako opis aktualnej zmiany powierzchni płynięcia w czasie procesu termodynamicznego. Zmiana ta jest wywołana efektami wzmocnienia, wpływem prędkości odkształcenia i temperatury na granicę plastyczności materiału oraz efektami lepkości. Warto podkreślić, że związek (5.4) stanowi bazę dla badań eksperymentalnych.

Uwzględniając założenia (4.9), (4.18) oraz (5.2) dostajemy następujące równania różniczkowe opisujące parametry wewnętrzne  $\varkappa$  i  $\Gamma^{(i)}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ :

$$(5.5) \quad \begin{aligned} \dot{\varkappa}(t) &= \gamma(\vartheta) \langle \Phi(\mathcal{F}) \rangle \text{tr} [J(g(t)) M(g(t))], \\ \dot{\Gamma}^{(i)}(t) &= \gamma(\vartheta) \langle \Phi(\mathcal{F}) \rangle S^{(i)}(g(t)) [M(g(t))]. \end{aligned}$$

Wykorzystując poprzednie rezultaty dla materiałów reologicznych z wewnętrznymi zmianami strukturalnymi i wprowadzone założenia konstytutywne możemy napisać pełny układ równań konstytutywnych dla materiału sprężysto/lepkoplastycznego w postaci:

$$(5.6) \quad \begin{aligned} \Psi(t) &= \Psi(g^*(t)), \\ T(t) &= \rho \partial_V \Psi(g^*(t)), \\ \eta(t) &= -\partial_\vartheta \Psi(g^*(t)), \\ q(t) &= Q(g(t)), \\ \dot{\alpha}^{(j)}(t) &= A^{(j)}(g(t)), \\ \dot{\varkappa}(t) &= \gamma(\vartheta) \langle \Phi(\mathcal{F}) \rangle \text{tr} [J(g(t)) M(g(t))], \\ \dot{P} &= \gamma(\vartheta) \langle \Phi(\mathcal{F}) \rangle M(g(t)), \\ \dot{\Gamma}^{(i)}(t) &= \gamma(\vartheta) \langle \Phi(\mathcal{F}) \rangle S^{(i)}(g(t)) [M(g(t))]. \end{aligned}$$

Z układu równań konstytutywnych (5.6) widzimy, że materiał sprężysto/lepkoplastyczny jest opisany w procesie termodynamicznym następującymi funkcjami konstytutywnymi:  $\Psi, Q, A^{(j)}, \Phi(\mathcal{F}), M, J, S^{(i)}$  oraz współczynnikiem  $\gamma(\vartheta)$ .

Wszystkie równania konstytutywne (5.6)<sub>5-8</sub> opisujące wewnętrzne parametry  $\alpha^{(j)}$ ,  $\varkappa, P, \Gamma^{(i)}$  zależą od zmiany skali czasu. Równania różniczkowe dla parametrów wewnętrznych  $\alpha^{(j)}$  opisują efekty lepkie, a równania różniczkowe dla parametrów wewnętrznych  $\varkappa, P, \Gamma^{(i)}$  opisują efekty lepkoplastyczne. Równania te jednocześnie pokazują, że obecna teoria materiału sprężysto/lepkoplastycznego uwzględnia historię odkształcenia  $V$ , temperatury  $\vartheta$  i gradientu temperatury  $\nabla\vartheta$ . Jest to spowodowane faktem, że w celu scałkowania równań (5.6)<sub>5-8</sub> i określenia aktualnych wartości parametrów wewnętrznych  $\alpha^{(j)}(t), \varkappa(t), P(t), \Gamma^{(i)}(t)$  w cząsteczce  $X$  w ciele  $\mathcal{B}$  musimy znać wartości początkowe  $\alpha_0^{(j)}, \varkappa_0, P_0, \Gamma_0^{(i)}$  oraz całkowite historie  $V, \vartheta$  i  $\nabla\vartheta$ .

Dysypacja wewnętrzna materiału sprężysto/lepkoplastycznego jest określona w sposób następujący

$$(5.7) \quad \sigma = -\frac{1}{\vartheta} \left\{ \left[ \sum_{j=1}^m \partial_{\alpha^{(j)}} \Psi A^{(j)} \right] + \gamma(\vartheta) \langle \Phi(\mathcal{F}) \rangle \text{tr} \left[ \left[ \partial_x \Psi J + \partial_p \Psi - \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - \partial_V \Psi + \sum_{i=1}^n \partial_{r^{(i)}} \Psi S^{(i)} \right) M \right] \right\}.$$

Nierówność dysypacji ogólnej

$$(5.8) \quad \sigma - \frac{1}{\rho \vartheta^2} Q \cdot \nabla \vartheta \geq 0$$

zapewnia spełnienie postulatu termodynamicznego dla materiału sprężysto/lepkoplastycznego.

Związek dla naprężenia (5.6)<sub>2</sub> można napisać w postaci

$$(5.9) \quad T = \bar{\varphi}(V, \vartheta; \alpha, \omega).$$

Żałóżmy, że zależność funkcyjna (5.9) jest odwracalna względem odkształcenia sprężysto-lepkiego, tzn.

$$(5.10) \quad V = \varphi^*(T, \vartheta; \alpha, \omega).$$

Jeśli tensor  $V$  ma reprezentować odkształcenie sprężysto-lepkie tak, aby zachodził związek (4.1), to funkcja  $\varphi^*$  w (5.10) musi być niezależna od  $\omega$ . Będzie to spełnione, jeżeli funkcja konstytutywna energii swobodnej ma postać

$$(5.11) \quad \Psi(g^*(t)) = \Psi_1(V, \vartheta, \alpha) + \Psi_2(\omega).$$

Wtedy

$$(5.12) \quad T = \rho \partial_V \Psi_1(V, \vartheta, \alpha).$$

Jeżeli zależność (5.12) jest odwracalna względem  $V$  to mamy

$$(5.13) \quad V = \varphi(T, \vartheta, \alpha),$$

skąd

$$(5.14) \quad \dot{V} = \partial_T \varphi \dot{T} + \partial_\vartheta \varphi \dot{\vartheta} + \partial_\alpha \varphi \dot{\alpha}.$$

Wykorzystując zależności (4.1), (5.6)<sub>7</sub> i (5.14) dostajemy

$$(5.15) \quad \dot{E} = \dot{V} + \dot{P} = \partial_T \varphi \dot{T} + \partial_\vartheta \varphi \dot{\vartheta} + \partial_\alpha \varphi \dot{\alpha} + \gamma(\vartheta) \langle \Phi(\mathcal{F}) \rangle M(g(t)).$$

## 6. Omówienie podstaw fizycznych

Deformacje plastyczne w metalach powstają głównie na skutek ruchu defektów w kryształach nazywanych dyslokacjami. Rozkład dyslokacji w ciele jest charakterystyczny dla wewnętrznego mechanicznego stanu ciała, które poddane było plastycznym deformacjom. Przy konstruowaniu teorii makroskopowej bazującej na rezultatach fizycznych badań mikroskopowych powinniśmy rozważyć możliwość opisu stanu wewnętrznego ciała przez

podanie pewnych średnich wielkości, które charakteryzują rozkład dyslokacji w sposób makroskopowy. Wybór tych charakterystycznych wielkości jest niezmiernie istotny dla każdej teorii fenomenologicznej. W naszych rozważaniach rolę takich wielkości spełniają parametry wewnętrzne, mianowicie parametr wzmocnienia izotropowego  $\kappa$ , tensor odkształcenia niesprężystego  $P$  oraz tensor rozkładu dyslokacji  $I^{(i)}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ).

Najpierw podamy fizykalne motywacje wyboru tensora odkształcenia niesprężystego  $P$  i parametru wzmocnienia izotropowego  $\kappa$  jako parametrów wewnętrznych.

Zauważmy, że aby wywołać plastyczne płynięcie materiału potrzebna jest skończona, określona wartość naprężenia. Naprężenie to jest potrzebne do pokonania przeszkód hamujących ruch dyslokacji przez kryształ. Wygodnie jest podzielić te przeszkody na dwie grupy w zależności od odległości oddziaływania ich pól naprężenia z polami naprężenia przesuających się dyslokacji: na pole naprężenia długiego zasięgu i na pole krótkiego zasięgu. Termiczne aktywacje nie odgrywają żadnej roli przy pokonaniu przeszkód charakteryzujących się polem długiego zasięgu, dlatego przeszkody te są nazywane często atermicznymi. Termiczne fluktuacje mogą pomagać przyłożonym naprężeniom w pokonaniu przeszkód charakteryzujących się polem krótkiego zasięgu. Te przeszkody są nazywane przeszkodami termicznymi i one właśnie są odpowiedzialne za efekty dynamiczne deformacji plastycznych.

Popularnymi mechanizmami termicznych przeszkód w czystych metalach są: naprężenie Peierlsa-Nabarro, las dyslokacji, ruch progów w dyslokacjach śrubowych, poślizg poprzeczny dyslokacji śrubowych i wspinanie się dyslokacji krawędziowych.

Mechanizm przewyciężenia lasu dyslokacji, który może mieć miejsce w kryształach metali o budowie f.c.c., c.p.h. i b.c.c. w różnych zakresach temperatur został opracowany teoretycznie przez SEEGERA [37] (por. również prace przeglądowe [5, 8]).

Jeżeli deformacja jest kontrolowana przez pojedynczy proces termicznej aktywacji, wtedy mamy

$$(6.1) \quad \dot{P} = \nu \exp[-U/k\vartheta],$$

gdzie  $U$  jest energią, która powinna być dostarczona przez termiczną fluktuację dla każdej zachodzącej aktywacji,  $k$  oznacza stałą Boltzmanna i  $\nu$  współczynnik częstości.

Aby być w zgodzie z danymi eksperymentalnymi, energia aktywacji  $U$  jest najczęściej przyjmowana jako nieliniowa funkcja nadwyżki naprężenia nad stan uplastycznienia, tzn.

$$(6.2) \quad U = \varphi[a(T - Y)],$$

gdzie  $a$  jest stałą strukturalną i  $Y$  oznacza atermiczne naprężenie lub granicę plastyczności materiału.

Tak więc prędkość odkształcenia niesprężystego jest określona następująco

$$(6.3) \quad \dot{P} = \nu \exp\{-\varphi[a(T - Y)]/k\vartheta\}.$$

To implikuje zależność dla naprężenia

$$(6.4) \quad T = Y \left\{ 1 + \frac{a^{-1}}{Y} \varphi^{-1}[k\vartheta \ln(\nu/\dot{P})] \right\}.$$

Porównanie teoretycznego dynamicznego kryterium uplastycznienia (5.4) ze związkiem fizykalnym (6.4) pokazuje, że fenomenologiczne kryterium uplastycznienia może być



traktowane jako uogólnienie dla polikryształów i dla ogólnego stanu naprężenia fizykalnie uzasadnionego związku (6.4). Przy tym uogólnieniu założono, że wpływ prędkości odkształcenia i temperatury na granicę plastyczności może być opisany przez nieliniową funkcję  $\Phi(\mathcal{F})$ .

Z powyższych rozważań wynika również prosta interpretacja wewnętrznego parametru  $\alpha$ . Może on być uważany za proste uogólnienie naprężenia atermicznego  $Y$ .

We wcześniejszych pracach [31] i [32] wykazano na podstawie wyników eksperymentalnych, że nieliniowa zależność (6.4) może dobrze opisywać dane doświadczalne w całym zakresie zmian prędkości odkształcenia. Udowodniono również, że wprowadzenie nieliniowej funkcji  $\Phi(\mathcal{F})$  do założeń konstytutywnych i jej wybór na podstawie danych doświadczalnych mogą być uważane za dobrze uzasadnione hipotezy.

Tensory rozkładu  $I^{(i)}$  są interpretowane przez KRÖNERA [17] jako nadwyżka gęstości dyslokacji  $I^{(1)}$ , nadwyżka gęstości pętli dyslokacji  $I^{(2)}$ , nadwyżka gęstości pary pętli dyslokacji  $I^{(3)}$ , itd. Oczywiście, rozumowanie to może być kontynuowane dalej w ten sam sposób i wtedy otrzymamy nieskończony i pełny układ parametrów wewnętrznych, który opisywałby kompletnie rozkład dyslokacji. Jednak nie wydaje się celowe wprowadzanie wszystkich szczegółów ze skali mikroskopowej do opisu makroskopowego materiałów sprężysto/lepkoplastycznych. Można powiedzieć, że nie wszystkie szczegóły mechanizmu mikroskopowego są ważne do opisu zjawisk makroskopowych. W praktyce wygodniej jest posłużyć się tylko pewnymi uśrednionymi wielkościami reprezentatywnymi dla opisu makroskopowego. Dlatego wystarczy założyć skończony zbiór parametrów wewnętrznych  $I^{(i)}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Pierwsza grupa parametrów wewnętrznych  $\alpha^{(j)}$  jest interpretowana jako parametry niezależne od prędkości odkształcenia  $P$ . Parametry  $\alpha^{(j)}$  są wprowadzone w celu opisanie tarcia wewnętrznego. Wiadomo, że tarcie wewnętrzne w materiale może być wyjaśnione w oparciu o różne mechanizmy. Jednak w liniowej aproksymacji każdy z tych mechanizmów prowadzi do znanych równań lepkosprężystości Boltzmanna. Aby opisać ten przypadek liniowy należy zlinearyzować równania różniczkowe opisujące parametry  $\alpha^{(j)}$  (por. VALANIS [14] i [42]).

## 7. Materiał sprężysto/lepkoplastyczny

Przez materiał sprężysto/lepkoplastyczny rozumiemy taki materiał, który przed uplastycznieniem zachowuje się jak materiał sprężysty, a po uplastycznieniu uzyskuje możliwość deformacji lepkoplastycznych<sup>8)</sup>.

Aby otrzymać opis materiału sprężysto/lepkoplastycznego wystarczy założyć w poprzednim opisie

$$(7.1) \quad \dot{\alpha}(t) = 0$$

w całym rozważanym procesie termodynamicznym dla ciała  $\mathcal{B}$ .

<sup>8)</sup> Koncepcja takiego materiału została zaproponowana przez K. Hohenemsera i W. Pragera [12], rozwinięta dalej dla zagadnień jednoosiowych przez W. W. Sokołowskiego [38] i L. E. Malverna [19] oraz dla zagadnień trójwymiarowych w pracach [23–35, 44].

Funkcja opisująca cząsteczkę uogólnioną  $p$  ma obecnie postać

$$(7.2) \quad g(t) = \{A, \nabla\vartheta; \omega\}.$$

Ponieważ materiał sprężysto/lepkoplastyczny nie posiada właściwości lepkich przed uplastycznieniem, to statyczny warunek uplastycznienia może być napisany następująco:

$$(7.3) \quad \mathcal{F}(A(t); \omega(t)) = \frac{f(T, \vartheta; P, \Gamma^{(i)})}{\kappa} - 1.$$

Biorąc pod uwagę poprzednio uzyskane rezultaty i uwzględniając obecne założenia możemy napisać pełny układ równań konstytutywnych opisujących właściwości materiału sprężysto/lepkoplastycznego:

$$(7.4) \quad \begin{aligned} \Psi(t) &= \Psi_1(V, \vartheta) + \Psi_2(\omega), \\ T(t) &= \rho \partial_V \Psi_1(V, \vartheta), \\ \eta(t) &= -\partial_S \Psi_1(V, \vartheta), \\ q(t) &= Q(g(t)), \\ \dot{\kappa}(t) &= \gamma(\vartheta) \langle \Phi(\mathcal{F}) \rangle \text{tr}[M(g(t))J(g(t))], \\ \dot{P}(t) &= \gamma(\vartheta) \langle \Phi(\mathcal{F}) \rangle M(g(t)), \\ \dot{\Gamma}^{(i)}(t) &= \gamma(\vartheta) \langle \Phi(\mathcal{F}) \rangle S^{(i)}(g(t)) [M(g(t))]. \end{aligned}$$

Dysypacja wewnętrzna materiału sprężysto/lepkoplastycznego jest określona w sposób następujący:

$$(7.5) \quad \sigma = \sigma_\omega = -\frac{\gamma(\vartheta)}{\vartheta} \langle \Phi(\mathcal{F}) \rangle \text{tr} \left\{ \left[ \partial_S \Psi_2 J + \partial_P \Psi_2 - \partial_V \Psi_1 + \sum_{i=1}^n \partial_{\Gamma^{(i)}} \Psi_2 S^{(i)} \right] M \right\}.$$

Nierówność dysypacji ogólnej

$$(7.6) \quad \sigma_\omega - \frac{1}{\rho \vartheta^2} Q \cdot \nabla \vartheta \geq 0$$

zapewnia spełnienie postulatu termodynamicznego dla materiału sprężysto/lepkoplastycznego.

Odwracając zależność dla naprężenia (7.4)<sub>2</sub> względem tensora  $V$  dostajemy

$$(7.7) \quad V = \varphi(T, \vartheta),$$

skąd

$$(7.8) \quad \dot{V} = \partial_T \varphi \dot{T} + \partial_S \varphi \dot{\vartheta}.$$

Z zależności (7.7) i (7.8) widać, że tensor  $V$  ma obecnie charakter odkształcenia termosprężystego.

Dla całkowitej prędkości tensora odkształcenie  $E$  mamy zależność

$$(7.9) \quad \dot{E} = \partial_T \varphi \dot{T} + \partial_S \varphi \dot{\vartheta} + \gamma(\vartheta) \langle \Phi(\mathcal{F}) \rangle M(g(t)).$$

### 8. Materiał sprężysto-plastyczny

W celu otrzymania opisu materiału sprężysto-plastycznego jako szczególny przypadek materiału sprężysto/lepkoplastycznego należy założyć

$$(8.1) \quad \dot{\alpha}(t) = 0$$

w całym procesie termodynamicznym dla ciała  $\mathcal{B}$  oraz dodatkowo, że parametry wewnętrzne reprezentowane przez  $\omega$  są opisane równaniami niezależnymi od skali czasu.

Termodynamiczne kryterium uplastycznienia (5.4) wskazuje, że materiał sprężysto-lepkoplastyczny traci swoje właściwości wrażliwości na prędkość odkształcenia tylko wtedy, kiedy współczynnik lepkości  $\gamma(\vartheta) \rightarrow \infty$ . W tym przypadku  $\mathcal{F} = 0$ , tzn.

$$(8.2) \quad f(T, \vartheta, P, I^{(i)}) = \kappa.$$

Z definicji symbolu  $\langle \Phi(\mathcal{F}) \rangle$  widzimy, że równanie różniczkowe określające parametr wewnętrzny  $P$  może być napisane w postaci

$$(8.3) \quad \overset{\text{tr}}{\dot{P}}(t) = \zeta M(T, \vartheta, \nabla \vartheta; \omega),$$

gdzie parametr  $\zeta = \gamma(\vartheta) \langle \Phi(\mathcal{F}) \rangle$  może być określony z warunku, że punkt reprezentujący w przestrzeni naprężenie-temperatura aktualny stan temperatury i naprężenia leży na powierzchni płynięcia (8.2).

Z warunku plastyczności (8.2) i z ogólnego założenia, że prędkość parametrów wewnętrznych  $\dot{\kappa}$  i  $\dot{I}^{(i)}$  znikają, gdy  $\dot{P} = 0$  możemy wydedukować następujące kryterium obciążenia

$$(8.4) \quad f = \kappa \quad \text{i} \quad \text{tr}(\partial_T f \dot{T}) + \partial_\vartheta f \dot{\vartheta} > 0.$$

Podobnie, kryteria

$$(8.5) \quad f = \kappa \quad \text{i} \quad \text{tr}(\partial_T f \dot{T}) + \partial_\vartheta f \dot{\vartheta} \leq 0$$

definiują odpowiednio odciążanie i stan neutralny.

Aby spełnić poprzednio wypowiedziane żądanie odnośnie punktu określającego aktualny stan naprężenia i temperaturę wystarczy zadośćuczynić równaniu  $\dot{f} = \dot{\kappa}$ , tzn.

$$(8.6) \quad \text{tr}(\partial_T f \dot{T}) + \partial_\vartheta f \dot{\vartheta} + \zeta \text{tr}(\partial_P f M) + \zeta \sum_{i=1}^n \text{tr}(\partial_{I^{(i)}} f S^{(i)}[M]) = \zeta \text{tr}(JM),$$

gdzie obecnie

$$(8.7) \quad \dot{\kappa}(t) = \zeta \text{tr}(JM),$$

$$(8.8) \quad \dot{I}^{(i)}(t) = \zeta S^{(i)}[M].$$

Ze związku (8.6) dostajemy

$$(8.9) \quad \zeta = \lambda [\text{tr}(\partial_T f \dot{T}) + \partial_\vartheta f \dot{\vartheta}],$$

gdzie przyjęto oznaczenie

$$(8.10) \quad \lambda = \left\{ \text{tr} \left[ \left( J - \partial_P f - \sum_{i=1}^n \partial_{I^{(i)}} f S^{(i)} \right) M \right] \right\}^{-1} > 0.$$

Uwzględniając ostatnie rezultaty oraz kryteria obciążania (8.4) i (8.5) możemy napisać równanie różniczkowe określające parametr wewnętrzny  $P$  w postaci

$$(8.11) \quad \dot{P}(t) = \lambda \langle [ ] \rangle \text{tr}(\partial_T f \dot{T}) + \partial_s f \dot{\vartheta} \rangle M(T, \vartheta, \nabla \vartheta; \omega),$$

gdzie symbol  $\langle [ ] \rangle$  jest zdefiniowany następująco:

$$(8.12) \quad \langle [ ] \rangle = \begin{cases} [ ] , & \text{jeżeli } f = \kappa \text{ oraz } [ ] > 0, \\ 0, & \text{jeżeli } f = \kappa \text{ oraz } [ ] \leq 0 \text{ lub } f < \kappa. \end{cases}$$

Pełny układ równań konstytutywnych opisujący zachowanie się materiału sprężysto-plastycznego w czasie procesu termodynamicznego w cząsteczce  $X$  w ciele  $\mathcal{B}$  ma postać<sup>9)</sup>

$$(8.13) \quad \begin{aligned} \psi(t) &= \Psi_1(V, \vartheta) + \Psi_2(\omega), \\ T(t) &= \rho \partial_V \Psi_1(V, \vartheta), \\ \eta(t) &= -\partial_s \Psi_1(V, \vartheta), \\ q(t) &= Q(V, \vartheta, \nabla \vartheta; \omega), \\ \dot{P}(t) &= \lambda \langle [ ] \rangle \text{tr}(\partial_T f \dot{T}) + \partial_s f \dot{\vartheta} \rangle M(T, \vartheta, \nabla \vartheta; \omega), \\ \dot{\kappa}(t) &= \lambda \langle [ ] \rangle \text{tr}(JM), \\ \dot{I}^{(i)}(t) &= \lambda \langle [ ] \rangle S^{(i)}[M]. \end{aligned}$$

Należy zwrócić uwagę na fakt, że wszystkie równania opisujące parametry wewnętrzne są obecnie niezmiennicze ze względu na zmianę skali czasu.

Aby zapewnić spełnienie postulatu termodynamicznego, należy obecnie zażądać spełnienia następującej nierówności

$$(8.14) \quad \sigma_\omega - \frac{1}{\rho \vartheta^2} Q \cdot \nabla \vartheta \geq 0,$$

gdzie

$$(8.15) \quad \sigma_\omega = -\frac{\lambda}{\vartheta} \langle [ ] \rangle \text{tr} \left\{ \left[ \partial_\kappa \Psi_2 + \partial_P \Psi_2 - \partial_V \Psi_1 + \sum_{i=1}^n \partial_{T^{(i)}} \Psi_2 S^{(i)} \right] M \right\}$$

określa dysypację wewnętrzną materiału sprężysto-plastycznego.

## 9. Materiały stateczne

W poprzednich punktach przedstawiona została ogólna teoria materiałów sprężysto-lepkoplastycznych. Teoria ta była rozwinięta w oparciu o rozważania termodynamiczne w ramach założeń dla materiałów z wewnętrznymi parametrami stanu. Od równań konstytutywnych wymagaliśmy, aby były zgodne z prawami termodynamiki. Obecnie rozważymy węższą klasę materiałów, tzn. materiały stateczne. Pojęcie niesprężystego materiału statecznego zostało wprowadzone przez DRUCKERA [7]. Wykorzystując pewne spostrze-

<sup>9)</sup> Por. z wynikami pracy A. E. Greena i P. M. Naghdiego [10]. Dyskusję opisu termodynamicznego materiałów sprężysto-plastycznych można znaleźć również w pracach [6, 13, 14, 15, 32—34 i 36].

żenia z teorii plastyczności celowo wprowadził on postulat ograniczający rozważaną klasę materiałów do materiałów statecznych. Okazuje się, że wprowadzając postulat o materiale statecznym można otrzymać podstawowe warunki, których spełnienie pozwala na wyrowadzenie równań konstytutywnych istotnych dla zastosowań praktycznych.

Postulat DRUCKERA o materiale statecznym można wypowiedzieć następująco: w danym procesie izotermicznym ciała  $\mathcal{B}$  praca wykonana przez przyrost sił zewnętrznych na odpowiednich przyrostach składowych wektora przemieszczenia musi być nieujemna.

Postulat ten prowadzi do następującego warunku

$$(9.1) \quad \int_{t_0}^{t_k} \frac{1}{\varrho} \operatorname{tr}(\Delta T \Delta \dot{E}) dt \geq 0,$$

gdzie przyrosty

$$(9.2) \quad \Delta T = T^{(2)} - T^{(1)}, \quad \Delta \dot{E} = \dot{E}^{(2)} - \dot{E}^{(1)}$$

są określone przez różnice tensorów naprężenia i różnice prędkości odkształcenia liczonych dla dwóch różnych dróg obciążenia zaczynających się od siebie różni w chwili  $t_0$ ; przez  $t_k$  oznaczono czas końcowy.

Aby podać szczegółowe interpretacje ograniczeń wynikających z postulatu DRUCKERA, zanalizujemy bliżej jego postać matematyczną dla przypadku nieskończenie małych odkształceń.

Rozważmy w tym celu ciało  $\mathcal{B}$  o objętości  $\mathcal{P}$  ograniczone regularną powierzchnią  $\partial\mathcal{P}$ , poddane działaniu sił powierzchniowych  $t$  i sił masowych  $b$ , które są funkcjami czasu. Określone przez te warunki brzegowe stany przemieszczenia  $u$ , odkształcenia  $E$  i naprężenia  $T$ , są również funkcjami czasu. Załóżmy, że warunki brzegowe ulegają pewnym wariacjom i są określone siłami powierzchniowymi  $t + \Delta t$  i siłami masowymi  $b + \Delta b$ , którym odpowiadają: stan przemieszczenia  $u + \Delta u$ , stan odkształcenia  $E + \Delta E$  i stan naprężenia  $T + \Delta T$ . Definicję materiału statecznego można przedstawić w następującej postaci:

$$(9.3) \quad \int_{t_0=0}^{t_k} \left\{ \int_{\partial\mathcal{P}} (\Delta t \cdot \Delta \dot{u}) da + \int_{\mathcal{P}} \varrho (\Delta b \cdot \Delta \dot{u}) dv \right\} dt \geq 0,$$

jeżeli  $t = 0$  oznacza chwilę przyłożenia przyrostów sił zewnętrznych.

Wykorzystując zasadę prac przygotowanych można siły powierzchniowe, siły objętościowe i prędkości przemieszczenia zastąpić naprężeniami i prędkościami odkształcenia. Zasada prac przygotowanych stwierdza, że dla dowolnych ciągłych prędkości  $\dot{u}$  zachodzi równość

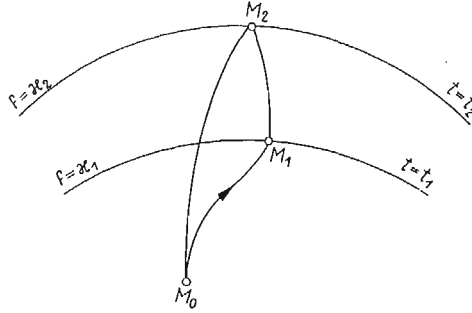
$$(9.4) \quad \int_{\partial\mathcal{P}} (t \cdot \dot{u}) da + \int_{\mathcal{P}} \varrho (b \cdot \dot{u}) dv = \int_{\mathcal{P}} \operatorname{tr}(T \dot{E}) dv,$$

gdzie  $t$ ,  $b$ ,  $T$  reprezentują układ wielkości statycznych będących w równowadze, a  $\dot{u}$ ,  $\dot{E}$  są zgodnym układem kinematycznym.

Zakładając, że rozpatrujemy tylko jednorodne stany naprężenia i odkształcenia i wykorzystując zasadę prac przygotowanych (9.4) z (9.3) po uwzględnieniu (9.2) dostajemy

$$(9.5) \quad \int_0^{t_k} [T^{(2)} - T^{(1)}] [\dot{E}^{(2)} - \dot{E}^{(1)}] dt \geq 0.$$

Założmy, że stan  $T^{(1)}$  jest identyczny ze stanem stacjonarnym  $T^*$  w chwili  $t = 0$ , a stan  $T^{(2)}$  będzie stanem aktualnym, zmiennym w czasie i stan ten oznaczmy przez  $T$ . Zanalizujemy następujący zamknięty cykl obciążenia. W chwili  $t = 0$  aktualny stan obciążenia  $T$  pokrywa się ze stanem stacjonarnym  $T^*$ , następnie stan bieżący  $T$  zmienia się wzdłuż drogi  $M_0 M_1$  (rys. 1) osiągając w chwili  $t = t_1$  punkt  $M_1$  odpowiadający stanowi uplastycznionemu. Na drodze  $M_1 M_2$  istnieją przyrosty odkształcenia plastycznego. Stan



Rys. 1

$M_2$  osiągnięty zostaje w chwili  $t = t_2$ . Poczynając od chwili  $t_2$  następuje odciążenie wzdłuż drogi  $M_2 M_0$ . W chwili  $t = t_k$  stan aktualny pokrywa się ze stanem początkowym i wtedy  $T = T^*$ . Warunek (9.5) dla zamkniętego cyklu  $M_0 M_1 M_2 M_0$  w czasie  $t \in [0, t_k]$  daje

$$(9.6) \quad \int_0^{t_k} [T - T^*][\dot{E} - \dot{E}^*] dt \geq 0,$$

gdzie  $\dot{E}$  i  $\dot{E}^*$  zastępują odpowiednio  $\dot{E}^{(2)}$  i  $\dot{E}^{(1)}$ . Uwzględniając, że  $\dot{P}^* = 0$  oraz  $\dot{E} = \dot{V} + \dot{P}$ , wyrażenie (9.6) można zapisać w postaci<sup>10)</sup>

$$(9.7) \quad \int_{t_1}^{t_2} [T - T^*] \dot{P} dt + \{\beta(T, V)\}_0^{t_k} \geq 0,$$

gdzie

$$(9.8) \quad \{\beta(T, V)\}_0^{t_k} = \int_0^{t_k} (T - T^*) (\dot{V} - \dot{V}^*) dt.$$

Rozwijając pierwszy składnik wyrażenia (9.7) w szereg Taylora w punkcie  $t = t_1$  i zachowując tylko pierwszy wyraz, otrzymamy

$$(9.9) \quad [(T - T^*) \dot{P}]_{t=t_1} \Delta t + \{\beta\}_0^{t_k} \geq 0.$$

Jeżeli założymy, że  $\Delta t = t_2 - t_1$  jest dostatecznie małe, ograniczymy się wtedy do żądania «stateczności w małym» (w przeciwieństwie do żądania «stateczności w dużym», jeżeli przedział czasu nie jest ograniczony do małego i może być dowolny), to nierówność (9.9) implikuje nierówność (9.7).

<sup>10)</sup> Por. P. M. Naghdi i S. A. Murch [21].

Ostatnia nierówność (9.9) pozwala wyciągnąć pewne ważne wnioski dotyczące kierunku wektora prędkości odkształcenia (w przestrzeni dziewięciowymiarowej tensor  $P$  jest wektorem). Załóżmy obecnie, że rozważana powierzchnia płynięcia dla procesu izotermicznego

$$(9.10) \quad f(T, P, \Gamma^{(i)}) = \kappa$$

jest w przestrzeni naprężenia powierzchnią wypukłą.

Wyraz  $\frac{1}{\Delta t} \{\beta\}_{0i}^{t_k}$  jest zależny od efektów lepkich i znika tylko wtedy kiedy tensor  $V$  jest tensorem odkształcenia czysto sprężystego. W tym przypadku tylko całkowita praca sprężysta wykonana na zamkniętym cyklu jest równa zero. Zachodzi to dla materiału sprężysto/lepkoplastycznego, który przed uplastycznieniem zachowuje się sprężysto.

Tak więc, dla materiału sprężysto/lepkoplastycznego posiadającego właściwości lepkie przed uplastycznieniem obowiązuje w przypadku materiału statecznego nierówność (9.9). Natomiast dla statecznego materiału sprężysto/lepkoplastycznego nierówność (9.9) upraszcza się do postaci

$$(9.11) \quad (T - T^*) \dot{P} \geq 0.$$

Ograniczenie rozważań do klasy statecznych materiałów sprężysto/lepkoplastycznych prowadzi do interesującego wniosku, że wektor prędkości infinitezimalnego odkształcenia niesprężystego  $\dot{P}$  jest ortogonalny do wypukłej aktualnej powierzchni płynięcia (9.10). Oczywiście wniosku takiego nie możemy wyciągnąć dla statecznego materiału sprężysto-lepkoplastycznego<sup>11)</sup>.

#### 10. Szczególne przypadki

Zanalizujemy pewne szczególne przypadki równań konstytutywnych w klasie statecznych materiałów sprężysto/lepkoplastycznych. Będziemy obecnie rozważać tylko procesy izotermiczne.

Przyjmijmy uproszczoną postać statycznej funkcji uplastycznienia

$$(10.1) \quad \mathcal{F}(T; \kappa, P) = \frac{f(T, P)}{\kappa} - 1.$$

Założmy również szczególną postać równania różniczkowego opisującego parametr wzmocnienia izotropowego

$$(10.2) \quad \dot{\kappa} = \text{tr}(T\dot{P}),$$

które można również napisać w postaci

$$(10.3) \quad d\kappa = \text{tr}(TdP),$$

skąd

$$(10.4) \quad \kappa = \int_0^P TdP.$$

<sup>11)</sup> Szeroka dyskusja tego zagadnienia została przeprowadzona przez P. M. Naghdiego i S. A. Murcha [21].

W tym przypadku parametr wzmocnienia izotropowego utożsamiamy z pracą odkształcenia plastycznego. Jest to bardzo dobrze znana hipoteza w teorii plastyczności.

O powierzchni płynięcia  $\mathcal{F} = 0$ , rozważanej w dziewięciowymiarowej przestrzeni naprężenia zakładamy, że jest regularna i wypukła.

Na podstawie związku konstytutywnego (7.9) możemy napisać dla analizowanego przypadku zależność (por. [26])

$$(10.5) \quad \dot{E} = C[\dot{T}] + \gamma \langle \Phi(\mathcal{F}) \rangle \partial_T f,$$

gdzie obecnie  $C$  oznacza macierz sprężystą.

W równaniu konstytutywnym (10.5) wykorzystano ortogonalność tensora  $\dot{P}$  do powierzchni płynięcia.

Dynamiczny warunek uplastycznienia przybiera obecnie postać

$$(10.6) \quad f(T, P) = \kappa \left\{ 1 + \Phi^{-1} \left[ \frac{(\text{tr} \dot{P}^2)^{1/2}}{\gamma} (\text{tr} (\partial_T f)^2)^{-1/2} \right] \right\}.$$

Dalsze ograniczenia otrzymamy przyjmując prostsze postaci funkcji statycznego uplastycznienia  $\mathcal{F}$ . Zakładając na przykład tylko opis wzmocnienia izotropowego mamy

$$(10.7) \quad \mathcal{F}(T; \kappa) = \frac{f(T)}{\kappa} - 1,$$

gdzie  $\kappa$  jest określone zależnością (10.4).

Ponieważ funkcja  $f$  zależy tylko od naprężenia, stąd dla materiału izotropowego możemy napisać

$$(10.8) \quad f(T) = f(I_T, II_T, III_T),$$

gdzie  $I_T, II_T, III_T$  oznaczają niezmienniki tensora naprężenia zdefiniowane przez (3.10).

Równanie konstytutywne (10.5) przyjmie dla tego przypadku postać

$$(10.9) \quad \dot{E} = C_1[\dot{T}] + \gamma \langle \Phi(\mathcal{F}) \rangle \{ [\partial_{I_T} f + \partial_{II_T} f I_T + \partial_{III_T} f III_T] - [\partial_{II_T} f + \partial_{III_T} f I_T] T + \partial_{III_T} f T^2 \},$$

gdzie obecnie  $C_1$  oznacza macierz sprężystą materiału izotropowego.

Ograniczając dalej właściwości materiału do idealnie plastycznych bez wzmocnienia można funkcję  $\mathcal{F}$  przyjąć w postaci

$$(10.10) \quad \mathcal{F}(T) = \frac{f(T)}{\kappa_0} - 1,$$

tzn.

$$(10.11) \quad \dot{\kappa}(t) = 0 \quad \text{skąd} \quad \kappa = \kappa_0 = \text{const.}$$

Równanie konstytutywne dla tego przypadku ma nadal postać (10.9). Przypadek ten był analizowany w pracy [26].

Wyczerpującą dyskusję dalszych przykładów równań konstytutywnych dla materiałów sprężysto/lepkoplastycznych wraz z ich zastosowaniami do opisu metali i gruntów można znaleźć w pracy przeglądowej [29] lub monografii [30].



## Literatura cytowana w tekście

1. B. D. COLEMAN and W. NOLL, *The thermodynamics of elastic materials with heat conduction and viscosity*, Arch. Rat. Mech. Anal., **13** (1963), 167—178.
2. B. D. COLEMAN, *Thermodynamics of material with memory*, Arch. Rat. Mech. Anal., **17** (1964), 1—46.
3. B. D. COLEMAN and M. E. GURTIN, *Thermodynamics with internal state variables*, J. Chem. Phys., **47** (1967), 597—613.
4. B. D. COLEMAN and V. J. MIZEL, *A general theory of dissipation in materials with memory*, Arch. Rat. Mech. Anal., **27** (1968), 255—274.
5. H. CONRAD, *Thermally activated deformation of metals*, J. Metals, **16** (1964), 582—588.
6. D. C. DRUCKER, *Comments by Session Chairman, Symposium on Mechanical Behavior of Materials under Dynamic Loads, September 1967, San Antonio*; Springer, New York 1968, pp. 405—409.
7. D. C. DRUCKER, *A definition of stable inelastic material*, J. Appl. Mech., **26** (1959), 101—106.
8. A. G. EVANS and R. D. RAWLINGS, *The thermal activated deformation of crystalline materials*, Phys. Stat. Sol., **34** (1969), 9—31.
9. A. E. GREEN and W. ZERNA, *Theoretical elasticity*, Oxford, Second Edition 1968.
10. A. E. GREEN and P. M. NAGHDI, *A general theory of an elastic-plastic continuum*, Arch. Rat. Mech. Anal., **18** (1965), 251—281.
11. M. E. GURTIN and A. C. PIPKIN, *A general theory of heat conduction with finite wave speeds*, Arch. Rat. Mech. Anal., **31** (1968), 113—126.
12. K. HOHENEMSER and W. PRAGER, *Über die Ansätze der Mechanik isotroper Kontinua*, ZAMM, **12** (1932), 216—226.
13. J. KESTIN, *On the application of the principles of thermodynamics to strained solid materials*, IUTAM Symposium on Irreversible Aspects of Continuum Mechanics, Vienna, June 22—25, 1966; Springer, Wien 1968, pp. 177—212.
14. J. KESTIN and J. R. RICE, *Paradoxes in the application of thermodynamics to strained solids*, International Symposium on a Critical Review of the Foundations of Relativistic and Classical Thermodynamics, University of Pittsburgh, April 7—8, 1969.
15. J. KRATOCHVIL and O. W. DILLON, *Thermodynamics of elastic-plastic materials as a theory with internal state variables*, J. Appl. Phys., **40** (1969), 3207—2318.
16. J. KRATOCHVIL and O. W. DILLON, *Thermodynamics of crystalline elastic-visco-plastic materials*, J. Appl. Phys., **41** (1970), 1470—1470.
17. E. KRÖNER, *Dislocation; A new concept in the continuum theory of plasticity*, J. Math. and Phys., **42** (1962), 27—37.
18. E. KRÖNER, *Initial studies of a plasticity theory based upon statistical mechanics*, The Battelle Institute Colloquium on the Inelastic Behavior of Solids, September, 1969.
19. L. E. MELVERN, *The propagation of longitudinal waves of plastic deformation in a bar of material exhibiting a strain rate effect*, J. Appl. Mech., **18** (1951), 203—208.
20. J. MEIXNER, *Processes in simple thermodynamic materials*, Arch. Rat. Mech. Anal., **33** (1969), 33—53.
21. P. M. NAGHDI and S. A. MURCH, *On the mechanical behavior of viscoelastic-plastic solids*, J. Appl. Mech., **30** (1963), 321—328.
22. W. NOLL, *A mathematical theory of the mechanical behavior of continuous media*, Arch. Rat. Mech. Anal., **2** (1958), 193—228.
23. W. OLSZAK and P. PERZYNA, *The constitutive equations of the flow theory for a non-stationary yield condition*, Eleventh International Congress of Applied Mechanics, München, August 30 to September 5, 1964, Proc. Springer 1966, Berlin, pp. 545—553.
24. W. OLSZAK and P. PERZYNA, *On elastic-visco-plastic soil*, Proc. Symposium on Rheology and Mechanics of Soils, Grenoble, April 1964.
25. W. OLSZAK and P. PERZYNA, *Thermal effects in viscoplasticity*, Proc. IUTAM Symp. East Kilbride, June 25—28, 1968, Springer, pp. 206—212.
26. P. PERZYNA, *The constitutive equations for rate sensitive plastic materials*, Quart. Appl. Math., **20** (1963), 321—332.

27. P. PERZYNA, *The constitutive equations for work-hardening and rate sensitive plastic materials*, Proc. Vibr. Probl., **4** (1963), 281—290.
28. P. PERZYNA and T. WIERZBICKI, *Temperature dependent and strain rate sensitive plastic materials*, Arch. Mech. Stos., **16** (1964), 135—143.
29. P. PERZYNA, *Fundamental problems in viscoplasticity*, Advances in Applied Mechanics, **9** (1966), pp. 243—377.
30. P. PERZYNA, *Teoria Lepkoplastyczności*, PWN, Warszawa 1966.
31. P. PERZYNA, *On physical fundations of viscoplasticity*, Report of the Institute of Fundamental Technical Research, 28/1968; 12th International Congress of Applied and Theoretical Mechanics, Stanford, August 1968.
32. P. PERZYNA, *Thermodynamic theory of viscoplasticity*, Advances in Applied Mechanics, **11** (1971).
33. P. PERZYNA and W. WOJNO, *Thermodynamics of a rate sensitive plastic material*, Arch. Mech. Stos., **20** (1968), 499—511.
34. P. PERZYNA, *Thermodynamics of rheological material with internal changes*, Journal de Mécanique, **10** (1971), 391—408.
35. P. PERZYNA, *On rheological effects and internal changes of a material*, Bull. Pol. Scien., Sér. Scien. tech., **19** (1971), I, 177—181; II, 183—188.
36. D. RIBIN, *Mechanical and thermodynamic considerations of an assemblage of homogeneous elastic-plastic states*, J. Appl. Mech., **35** (1968), 596—603.
37. A. SEEGER, *The generation of lattice defects by moving dislocations, and its application to the temperature dependence of flow-stress of f.c.c. crystals*, Phil. Mag., **46** (1955), 1194—1217.
38. В. В. СОКОЛОВСКИЙ, *Распространение упруго-вязко-пластических волн в стержнях*, Прикл. Мат. Мех., **12** (1948), 3.
39. C. TRUESDELL and R. A. TOUPIN, *The Classical Field Theories*, Encyclopedia of Physics, vol. III/1. Springer, Berlin 1960, pp. 226—793.
40. C. TRUESDELL and W. NOLL, *The Non-Linear Field Theories of Mechanics*, Encyclopedia of Physics, vol. III/3, Springer, Berlin 1965.
41. K. C. VALANIS, *Unified theory of thermomechanical behavior of viscoelastic materials*, Symposium on Mechanical Behavior of Materials under Dynamic Loads, September 1967, San Antonio; Springer, New York 1968, pp. 343—364.
42. K. C. VALANIS, *Proof of existence of entropy for irreversible systems*, Acta Mech., in print.
43. C. C. WANG, *Generalized simple bodies*, Arch. Rat. Mech. Anal., **32** (1969), 1—29.
44. W. WOJNO, *Uwagi o nieskończonej teorii materiałów sprężysto-lepkoplastycznych*, Mech. Teor. Stos., **8** (1970), 239—256.

## Р е з ю м е

## ТЕОРИЯ ВЯЗКО-ПЛАСТИЧЕСКИХ МАЛЫХ ДЕФОРМАЦИЙ

Целью работы является тщательный анализ термодинамической теории вязкопластичности, в предположении, что деформации бесконечно малы.

В первой части работы обсуждены основы механики и термодинамики сплошной среды. Вводится определение понятия тела, а затем излагаются описания деформаций и напряжений. На основе интегральных формулировок выведены уравнения движения Коши, первый и второй принципы термодинамики.

Раздел 4 содержит математическую теорию реологического материала с внутренними структурными изменениями. Описание внутренней диссипации в материале основано на введении двух групп внутренних параметров.

В разделе 5 предложенная теория использована для описания свойств упруго-вязкопластического тела. Подробно обсуждены ограничения, следующие из термодинамики и предположения малых деформаций.

Раздел 6 посвящен изложению физических основ вязкопластичности. Дан анализ механизмов, вызывающих реологические явления и механизмов, управляющих динамическими деформациями пластического типа. Подробно обсуждены механизмы, приводящие к теории упруго-вязкопластического материала.

В разделах 7 до 10 дается анализ некоторых частных случаев материалов. Широко обсуждаются устойчивые материалы.

### S u m m a r y

#### INFINITESIMAL THEORY OF VISCOPLASTICITY

The object of this paper is to discuss a thermodynamic theory of viscoplasticity under the assumption of infinitesimal deformations.

In the first part the foundations of mechanics and thermodynamics of continua are analyzed. After defining a continuous body the descriptions of deformation and stress are showed. Based on integral formulation Cauchy's laws and the principles of thermodynamics are stated.

In p. 4 a mathematical theory of a rheological material with internal structural changes is proposed. To describe the internal dissipation of a material two groups of internal parameters are introduced. In p. 5 this theory is used to describe the properties of an elastic-viscoplastic material. Restrictions implied by thermodynamics and the assumption of infinitesimal deformations are discussed.

In p. 6 the physical foundations of viscoplasticity are analyzed. The mechanisms generating the rheological effects and dynamic plastic deformations are investigated. The mechanisms leading to the theory of an elastic-viscoplastic material are discussed.

In p. 7—10 some particular cases of materials are investigated. In particular the stable material is described.

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

*Praca została złożona w Redakcji dnia 31 października 1971 r.*