

INŻYNIERSKIE METODY ANALIZY KONSTRUKCJI SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNYCH

ANTONI S A W C Z U K (WARSZAWA)

1. Wstęp

Główną właściwością inżynierskich teorii jest dążenie do prostoty opisu matematycznego rozpatrywanej grupy zagadnień technicznych, przy równoczesnym ujęciu tym opisem najbardziej charakterystycznych cech fizycznych badanych zjawisk. Celem jest takie matematyczne ujęcie problemu, które byłoby zarazem ścisłe i praktyczne. Ścisłość polega na tym, że rozumowanie prowadzi się w oparciu o sprecyzowane założenia i w myśl prawideł odpowiedniej dziedziny matematyki. Praktyczność natomiast wyraża się w tym, że stosowane metody matematyczne pozostają w zasięgu umiejętności inżynierów. Oczywiście metody te stają się coraz bardziej wyrafinowane w miarę pogłębiania przygotowania zawodowego inżynierów w zakresie nauk podstawowych

Wymienione wyżej przymioty cechują w dużym stopniu mechanikę konstrukcji, formułującą zasady i opracowującą metody obliczenia wytrzymałości i bezpieczeństwa budowli i urządzeń. Wprowadza ona cały szereg różnego typu postulatów i uproszczeń, prowadzących w rezultacie do łatwiejszych równań różniczkowych, do prostszych metod matematycznych lub do ustalenia algorytmów obliczeniowych.

W pierwszym rzędzie idealizujemy — podobnie jak to ma miejsce w mechanice ośrodków ciągłych — zachowanie się materiału pod oddziaływaniami zewnętrznymi, przyjmując odpowiedni «model»: liniową sprężystość, idealną plastyczność, określony typ wzmocnienia plastycznego, liniowe lub nieliniowe pełzanie itp. Następną grupę uproszczeń stanowią założenia dotyczące kinematyki odkształcenia. Wprowadzamy np. założenie płaskich przekrojów, ograniczamy się do stosowania związków dotyczących małych odkształceń, pomijamy niektóre składowe wektora przemieszczenia jako wielkości małe w porównaniu z ugięciem. Wprowadzamy również uproszczenia do równań ruchu, pomijając niektóre składowe tensora naprężenia w zależnościach opisujących równowagę układu lub pomijając momenty naprężeń w przekrojach, jak to ma na przykład miejsce w błonowej teorii powłok. Nie są z reguły rozróżniane stany równowagi w konfiguracjach nieodkształconej i odkształconej. Odrębna wreszcie grupa uproszczeń, to stosowanie przybliżonych metod rozwiązywania otrzymywanych równań.

Nawyk posługiwania się ustalonymi schematami może spowodować, że czasem zapomnimy o «wrodzonych» ograniczeniach określonych teorii czy metod analizy konstrukcji.

Stojąc przed nowym zagadnieniem inżynierskim mamy tendencję do «uogólniania» istniejących teorii często bez dokładnej analizy założeń upraszczających i ich konsekwencji dla równań problemu, bez oceny rzędu wielkości pomijalnych członów itp. Możemy w ten sposób dojść do wewnętrznie sprzecznych teorii, uwzględniających niektóre wielkości wyższego rzędu, a pomijających, wskutek dziedziczonych założeń, bardziej istotne wpływy. W konsekwencji powstają metody, które nie tylko nie umożliwiają ilościowej oceny badanego zjawiska, ale i niewłaściwie je ujmują.

Dlatego też przy opracowywaniu inżynierskich metod analizy bardziej złożonych zagadnień z dziedziny mechaniki konstrukcji słuszne jest takie podejście, w którym przechodzimy od zasad czy zależności ogólnych do metod i zależności przybliżonych. Formułujemy wówczas praktyczne metody przez wprowadzanie uproszczeń, których skutki możemy ocenić. Celem, do którego wówczas świadomie zdążamy, jest «praktyczność» teorii.

Analiza lekkich, a więc wiotkich konstrukcji sprężysto-plastycznych, badanie dotyczące zachowania się konstrukcji niesprężystych pod działaniem powtarzanych obciążeń, analiza nośności granicznej elementów znajdujących się w złożonych stanach zginania i ściskania, badania wpływu uderzeń i fal naprężenia na trwałość konstrukcji i połączeń, warunki lokalnej stateczności elementów konstrukcji sprężysto-plastycznych — są przykładowymi grupami zagadnień, które są dość dobrze opracowane od strony podstaw, a niedostatecznie wprowadzone w sferę działalności inżynierskiej. Sposobami, którymi ten stan rzeczy można zmienić są z jednej strony popularyzacja już istniejących inżynierskich metod analizy konstrukcji plastycznych, z drugiej zaś — opracowanie, stosownie do wspomnianych wyżej zasad, takich praktycznych metod, które umożliwiałyby szybkie uzyskiwanie przez projektantów wiarygodnej odpowiedzi.

W obecnym artykule zamierzamy omówić tzw. kinematyczne podejście w analizie konstrukcji sprężysto-plastycznych oraz wskazać te dziedziny, w których można nadać tej metodzie postać umożliwiającą wykorzystanie metod i wyników bezpośrednio w projektowaniu. Rozpoczniemy od metod oceny nośności granicznej konstrukcji, a następnie omówimy zagadnienia teorii przystosowania. Z kolei zajmiemy się nośnością graniczną w obecności sił błonowych i metodami oceny stateczności rozwiązań uzyskiwanych w oparciu o założenia teorii nośności granicznej. Okazuje się, że ocena stateczności jest możliwa tylko wtedy, gdy odejdziemy od stosowania założenia o nieskończeniu małych odkształceniach i oprzemy się na teorii dużych odkształceń. Będzie to przykład przejścia od nieliniowej mechaniki kontinuum do praktycznych metod oceny, na przykład «efektu tarczowego». Ostatnią grupę w tym omówieniu stanowią zagadnienia dynamiki konstrukcji plastycznych.

2. Nośność graniczna

Teoria nośności granicznej jest jedną z najlepiej opracowanych dziedzin mechaniki konstrukcji niesprężystych. Rozpatruje ona konstrukcje sztywno-plastyczne, a przy dodatkowym założeniu o *małości* odkształceń — również sprężysto-plastyczne, w chwili ich *równowagi granicznej*, czyli w momencie przekształcenia konstrukcji w mechanizm o co najmniej jednym stopniu swobody. Teoria ta zajmuje się tylko przypadkiem propor-

cyjonalnego narastania obciążeń zewnętrznych. Wszystkie obciążenia wzrastają proporcjonalnie do jednego parametru, np. czasu, i to w sposób monotoniczny, a zarazem dostatecznie powoli, tak aby można było zaniedbać efekty dynamiczne.

Celem teorii nośności granicznej jest opracowanie metod wyznaczania intensywności obciążenia *granicznego*, a więc takiego obciążenia, przy którym rozpoczyna się *plastyczne płynięcie* konstrukcji. Przy tej granicznej intensywności obciążenia konstrukcja staje się mechanizmem znajdującym się w chwilowym ruchu. Należy szczególnie podkreślić, że teoria nośności granicznej zajmuje się tylko początkiem ruchu, a więc nie można za jej pomocą opisać np. zjawisk wzmocnienia.

W zakres zainteresowania teorii nośności granicznej wchodzi zarówno konstrukcje z materiałów jednorodnych, np. metali, jak i konstrukcje o złożonej budowie przekroju poprzecznego elementów, np. uwarstwione, zbrojone itp. — jeśli tylko można do nich zastosować idealnie plastyczny model odkształcenia.

Teoria nośności granicznej posługuje się metodami o różnym stopniu trudności, w zależności od wymaganej dokładności i kompletności poszukiwanego rozwiązania. Pełne rozwiązanie problemu, stanowiące w istocie rozwiązanie problemu brzegowego dla równań teorii plastycznego płynięcia, jest na ogół trudne do uzyskania. Takie rozwiązanie daje pełną informację na temat rozpatrywanego problemu, a więc nie tylko wyznacza obciążenie graniczne, ale określa także siły wewnętrzne w każdym przekroju, a również i mechanizm, stosownie do którego konstrukcja się «łamie» w chwili wyczerpania nośności.

Aby łatwo uzyskiwać wielkość najbardziej interesującą inżyniera, to jest obciążenie *graniczne*, sformułowane zostały twierdzenia i rozwinięte metody pozwalające na szybkie otrzymanie informacji o tej wielkości. Mówiąc o twierdzeniach mamy na myśli tzw. twierdzenia podstawowe teorii nośności granicznej [23], które pozwalają oszacować nośność zarówno od góry, jak i od dołu, a więc określić przedział w jakim na pewno mieści się rzeczywista nośność graniczna, odpowiadająca rozwiązaniu zupełnemu. Sformułowanie tych twierdzeń i odpowiednie dowody znaleźć można np. w monografiach [7, 16, 22, 28].

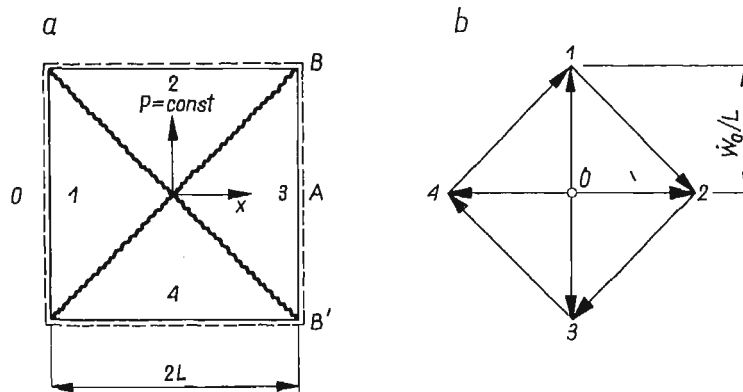
Twierdzenia o oszacowaniu nośności granicznej są przykładem właściwego przejścia od ogólnej teorii do praktycznych metod, dających prawdziwą informację o interesującej inżyniera wielkości. W oparciu o te twierdzenia można formułować metody dotyczące szczególnych zagadnień czy szczególnych typów konstrukcji. Takie metody z dziedziny nośności granicznej, które powstają bez nawiązania do tych twierdzeń, pozostają tylko metodami przybliżonymi, których stopnia dokładności nie można ocenić.

Przykładem dobrej inżynierskiej teorii, związanej z twierdzeniem o górnej granicy nośności konstrukcji, jest metoda linii załomów w teorii nośności granicznej płyt. Powstała ona na drodze syntezy pewnych faktów doświadczalnych dotyczących pęknięcia płyt żelbetowych. Jest to więc przykład podejścia kinematycznego, ale jej ogólniejsze znaczenie stało się niewątpliwie po sformułowaniu wspomnianych wyżej twierdzeń.

Punktem wyjścia tej metody jest stwierdzenie, że do przekształcenia płyty w mechanizm wystarczy, by powstał w niej pewien kinematycznie dopuszczalny układ obszarów uplastycznionych. Linie tych *skoncentrowanych odkształceń*: linie załomu, dzielą płytę na skończoną liczbę obszarów, o których zakładamy, że pozostają sztywne [5, 12]. Ruch otrzymanego układu sztywnych pól, stykających się ze sobą wzdłuż linii przegubów, jest możliwy wówczas, gdy linie te są osiami chwilowego obrotu. Można wtedy zbudować

plan prędkości obrotu. Dla swobodnie podpartej płyty kwadratowej kinematycznie dopuszczalny układ linii załamów podaje rys. 1a. Odpowiedni plan prędkości obrotu przedstawia rys. 1b, podający wektory obrotów pól 1, 2, 3, 4 wokół chwilowych osi obrotu: podpór i linii załomu.

W izotropowej płycie jednostkowy moment plastyczny przekroju jest niezależny od kierunku linii załomu. Dlatego też, rozpatrując chwilowy ruch kinematycznie dopuszczal-



Rys. 1. Metoda linii załamów

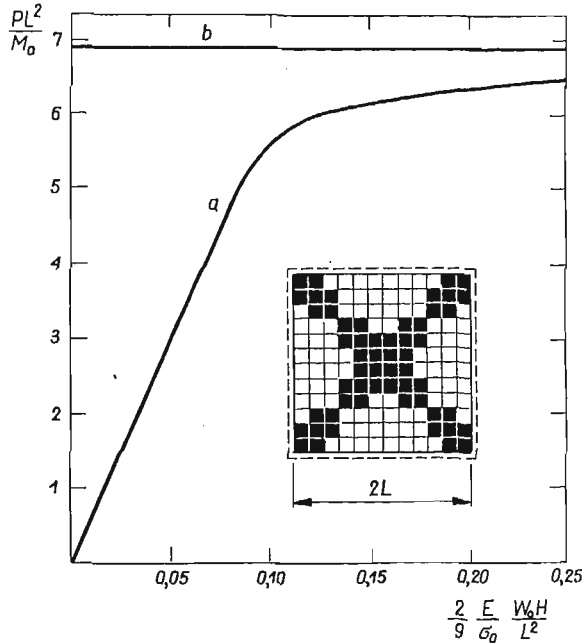
a) mechanizm zniszczenia, b) plan prędkości obrotu pól

nego mechanizmu i stosując zasadę prac przygotowawczych otrzymujemy w tym przypadku następującą zależność pomiędzy mocą obciążeń zewnętrznych P na prędkościach ugięć \dot{W} a rozpraszaniem energii na obroty plastyczne $\dot{\Phi}_i$ w przegubach o długości L_i

$$(2.1) \quad \int_A P \dot{W} dA = M_0 \sum_1^n \dot{\Phi}_i L_i.$$

Dla równomiernie obciążonej płyty kwadratowej o wymiarach, jak na rys. 1a, otrzymane z (2.1) obciążenie graniczne, a ściślej: jego górna ocena, wynosi $p = PL^2/M_0 = 6$ w przypadku warunku plastyczności największego momentu głównego, natomiast $p = 2/\sqrt{3} \cdot 6 \approx 6,92$ dla płyty podlegającej warunkowi Hubera-Misesa.

Nośność graniczną można otrzymać rozwiązując problem brzegowy dla równań sprężysto-plastycznego zginania płyty. Przy takim podejściu śledzimy uplastycznianie się płyty wskutek przyrastającego obciążenia. Możliwe jest tylko numeryczne rozwiązanie układu równań. Rezultat obliczeń przeprowadzonych przy zastosowaniu metody elementów skończonych pokazano na rys. 2, dla przypadku płyt podlegających warunkowi plastyczności Hubera-Misesa [1]. Widać żeń, jak przyrasta ugięcie w środku płyty ze wzrostem obciążenia oraz jaki jest układ stref uplastycznionych w chwili wyczerpania nośności. Otrzymany układ stref plastycznych koncentrujących się wzdłuż przekątnych potwierdza dopuszczalność idealizacji z rys. 1a. Dla porównania zaznaczono również na rys. 2 wartość obciążenia granicznego uzyskanego na podstawie teorii linii załamów dla płyty z materiału Hubera-Misesa.



Rys. 2. Zginanie płyty sprężysto-plastycznej
 a) rozwiązanie numeryczne, b) ocena górna nośności granicznej

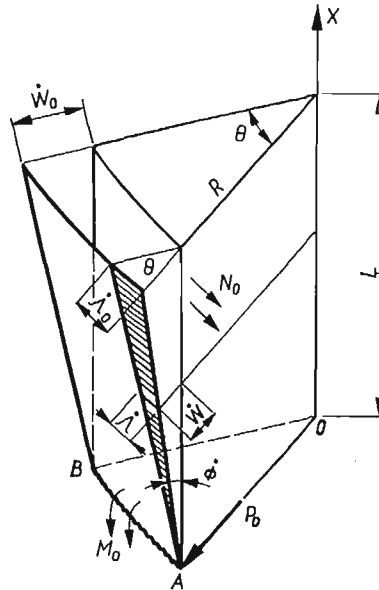
Przykład ten wskazuje, że metoda linii załomów postępująca się niezwykle prostą zależnością (2.1) stanowi przydatne narzędzie przy ocenianiu udźwigu płyt. Metoda ta została u nas wprowadzona przez OLSZAKA [20, 21] i doczekała się szeregu opracowań monograficznych [8, 11, 18, 19, 26, 28] oraz badań doświadczalnych [26, 27].

Metoda linii załomu lub *skoncentrowanych (prędkości) odkształceń* może być stosowana do oceny nośności granicznej powłok, połączeń ścinanych, wysokich belek itp. [5, 24, 34]. Jako przykład rozpatrzmy zbiornik walcowy o wysokości L , zamocowany u podstawy i swobodny na górnym brzegu. Zbiornik poddany jest działaniu parcia hydrostatycznego $P = P_0 (L - x)$. W chwili wyczerpania nośności zbiornik walcowy przekształca się w ścięty stożek. Następuje więc przyrost obwodu oraz pojawia się przegub plastyczny u podstawy zbiornika. Wycinek zbiornika i odpowiednie *uogólnione odkształcenia* pokazano na rys. 3. Zasada bilansowania mocy obciążeń zewnętrznych i energii rozpraszanej na wywołanie odkształceń plastycznych przyjmuje — na jednostkę obwodu — następującą postać

$$(2.2) \quad \int_0^L P \dot{W} dx = \frac{1}{R} \int_0^L N_0 \dot{\Delta} dx + M_0 \dot{\Phi},$$

gdzie M_0 i N_0 są odpowiednio jednostkowym momentem granicznym w przegubie AB oraz graniczną siłą obwodową, jaką może przenieść ścianka zbiornika. Ponieważ, jak to łatwo stwierdzić na podstawie rys. 3: $\dot{\Delta} = Q \dot{W} = Q \dot{W}_0 \frac{x}{L}$ — otrzymujemy w rezultacie, że

$$(2.3) \quad P_0 = 3 \frac{N_0}{R} + 6 \frac{M_0}{L^2}.$$



Rys. 3. Mechanizm zniszczenia zbiornika

Jest to górna ocena nośności granicznej zbiornika. Dolną ocenę otrzymać można bezpośrednio z rozwiązania «sprężystego». Pełne rozwiązanie problemu wraz z wyznaczeniem zakresu R/L , dla którego stosuje się (2.3), znaleźć można w [11, 29].

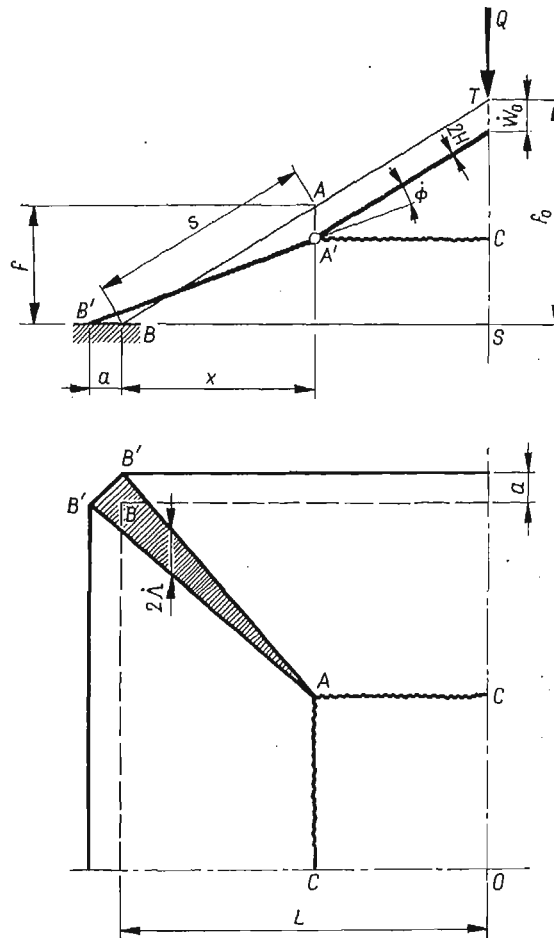
Przejdziemy z kolei do rozpatrzenia nośności granicznej układów płytowo-tarczowych. Zasada postępowania jest analogiczna, jak w przykładach poprzednich: rozpatrujemy równowagę sztywnych płytów, na granicach których skupiają się obszary uplastycznione. Energia zostaje rozpraszana tylko w tych obszarach, a jej wyznaczenie sprowadza się do obliczenia całek liniowych [8, 24].

Oceniemy nośność graniczną małowyniosłego ostrostłupa o podstawie kwadratowej. Ta konstrukcja tarczowa podparta jest w ten sposób, że brzegi mają swobodę przesuwu poziomego. Wymiary oraz kinematycznie dopuszczalny mechanizm zniszczenia podane są na rys. 4. Wzdłuż krawędzi OB , na części jej długości, powstaje skupione odkształcenie *obwodowe*. Linie AC są przegubami plastycznymi, wzdłuż których tylko moment zginający bierze udział w rozpraszaniu energii. Położenie tego przegubu podlega wyznaczeniu z warunku minimum obciążenia. Oznacza to, że spośród kinematycznie dopuszczalnych *mechanizmów zniszczenia* rozpatrywanej rodziny poszukujemy takiego, któremu odpowiada najmniejsza wartość obciążenia, a więc w rozpatrywanym przypadku minimum siły skupionej Q zaczepionej w wierzchołku ostrostłupa.

Zasada bilansu mocy obciążeń zewnętrznych i sił wewnętrznych ma postać

$$(2.4) \quad Q\dot{W}_0 = \sum N\dot{\Delta}_i L_i + \sum M\dot{\Phi}_j L_j.$$

Wskutek nadania wierzchołkowi ostrosłupa prędkości wirtualnej \dot{W}_0 , skupione odkształcenia wydłużeń $\dot{\Lambda}$ i obrotów $\dot{\Phi}$ są — dla rozpatrywanego mechanizmu — jednoznacznie określone. Z zależności geometrycznych otrzymujemy, na podstawie rys. 4,



Rys. 4. Mechanizm zniszczenia tarczownicy stożkowej

$$(2.5) \quad \dot{a} = \dot{W}_0 \frac{f_0}{L}, \quad \dot{\Phi} = \frac{\dot{W}_0}{X}, \quad s = X \sqrt{1 + \frac{f_0^2}{L^2}},$$

a w rezultacie następującą postać równania (2.4)

$$(2.6) \quad Q \dot{W}_0 = 4N \dot{a} s + 8M \dot{\Phi} (L - X) = 4N_0 \dot{W}_0 X \frac{f_0}{L} \sqrt{1 + \frac{f_0^2}{L^2}} + 8M_0 \dot{W}_0 \left(\frac{L}{X} - 1 \right).$$

Wyznaczając X z warunku $dQ/dX = 0$ dochodzimy do wyrażenia określającego udźwig konstrukcji

$$(2.7) \quad \frac{Q}{8M_0} = \sqrt{2f_0 \frac{N_0}{M_0}} \sqrt{1 + \frac{f_0^2}{L^2}} - 1.$$

W obszarach skoncentrowanych odkształceń występować mogą równocześnie momenty i siły błonowe. Wówczas wielkości M i N nie mogą być traktowane jako niezależne. Związane są one z warunkiem plastyczności, który przybiera postać $f(M, N) = 0$, a więc przedstawić go można w postaci krzywej granicznej wiążącej moment normalny i siłę błonową przekroju poprzecznego. Zagadnienie to omówimy przy rozpatrywaniu «efektów geometrycznych», czyli wpływu ugięć na udźwig konstrukcji.

3. Przystosowanie

Rzadko kiedy mamy do czynienia z takimi konstrukcjami, które podlegają wyłącznie działaniu obciążeń narastających monotonicznie i proporcjonalnie do jednego parametru. Zwykle programy obciążania są bardzo złożone i na ogół mamy tylko informację o brzegu obszaru obciążeń, a więc o ekstremalnych wartościach jakie poszczególne oddziaływania mogą przyjąć. Niektóre informacje o ekstremalnych wartościach, np. parcia wiatru, obciążeń użytkowych itp. ujęte są przepisami. Badaniem zachowania się konstrukcji sprężysto-plastycznych poddanych wieloparametrowym oddziaływaniom lub cykлом obciążania zajmuje się teoria przystosowania [6, 7, 29].

Dla określonego programu oddziaływań cyklicznych może nastąpić bądź narastanie odkształceń plastycznych w konstrukcji w czasie każdego cyklu, bądź też ustalenie się tych odkształceń. W tym drugim przypadku konstrukcja — po przejściu przez pewien zakres odkształceń plastycznych — reagować będzie już tylko sprężysto. Mówimy wówczas, że przystosowała się ona do granic aktualnego programu naprężenia. Celem teorii przystosowania jest opracowanie zasad i metod ustalenia takich właśnie granic obszarów zmienności mnożników obciążeń, dla których odkształcenia plastyczne stabilizują się.

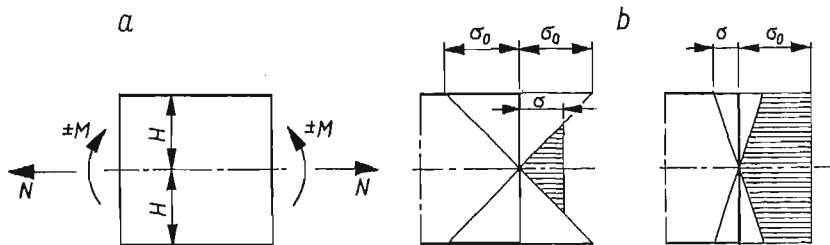
Konstrukcja sprężysto-plastyczna poddana działaniu obciążeń powtarzalnych — przy czym czas trwania cyklu i jego amplituda niekoniecznie muszą być dokładnie znane — może utracić cechy użytkowe bądź wskutek narastania odkształceń (zniszczenie *przyrostowe*), bądź też wskutek niskocyklowego zmęczenia w rezultacie przemiennych odkształceń plastycznych. Uznajemy, że konstrukcja przystosuje się do pewnego programu obciążeń, jeśli po skończonej liczbie cykli odkształcenia plastycznego powstaje w niej taki układ naprężeń resztkowych, że przy dalszym obciążaniu, w ramach tego programu odkształcenia będą czysto sprężyste.

Zupełne rozwiązanie problemu równowagi konstrukcji sprężysto-plastycznej w przypadku zmiennych obciążeń polegałoby na kłopotliwym określaniu krok po kroku całej historii procesu odkształcenia. Dla celów prostej oceny przystosowania potrzebne są praktyczne metody, które umożliwiłyby — podobnie, jak to ma miejsce w teorii nośności granicznej — oszacowanie obszaru dopuszczalnych zmian obciążeń, wielkości trwałych przemieszczeń itp., bez potrzeby rozwiązywania kompletu równań zawierających już w tym

przypadku co najmniej dwie zmienne, jako że proces przebiega w czasie. Możliwość takiej praktycznej oceny dają dwa podstawowe twierdzenia teorii przystosowania, aczkolwiek metody dokonywania takiej oceny w oparciu o te twierdzenia nie są jeszcze dostatecznie proste [13, 14, 28].

Jedno ze wspomnianych twierdzeń głosi, że konstrukcja na pewno przystosuje się do rozpatrywanego programu, jeśli istnieje niezależne od czasu pole naprężeń resztkowych takie, że w każdej chwili suma naprężeń resztkowych i naprężeń otrzymanych dla analogicznej konstrukcji sprężystej nie wykracza poza powierzchnię plastyczności. Obszar przystosowania można ograniczyć od góry korzystając z twierdzenia o nieprzystosowaniu. Stanowi ono rozszerzenie kinematycznego podejścia teorii nośności granicznej i posługuje się pojęciem kinematycznie dopuszczalnego cyklu odkształceń [14]. Jeśli taki cykl w badanym programie obciążenia wystąpi, to konstrukcja na pewno do tego programu się nie przystosuje i stanie się nieużytkowalna bądź wskutek narastania przemieszczeń, bądź też wskutek niskocyklowego zniszczenia [2, 7, 14].

Cel teorii przystosowania, mianowicie ustalenie zakresu obciążeń, na które konstrukcja reaguje czysto sprężystie (po przejściu przez pewien zakres odkształceń plastycznych i powstanie samonaprężeń) — zilustrujemy na prostym przykładzie. Rozpatrzmy pręt o przekroju prostokątnym $2H \times B$, poddany działaniu siły osiowej N i momentu zginają-



Rys. 5. Cykliczne zginanie pręta rozciąganego
a) obciążenie, b) dopuszczalne stany naprężenia

cego M , jak pokazano na rys. 5a. Chcemy wyznaczyć taki obszar w płaszczyźnie obciążeń, aby przy stałej sile osiowej N i cyklicznym zginaniu $\pm M$ odkształcenia plastyczne ustabilizowały się. Wytworzony stan samonaprężeń zapewni wówczas, że wypadkowe naprężenia nie przekroczą granicy plastyczności σ_0 .

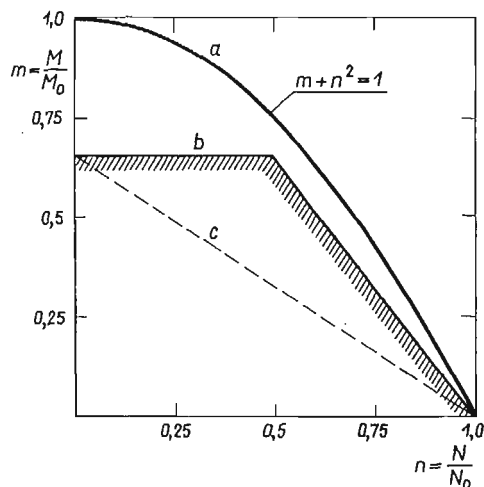
Siłę graniczną i moment graniczny pręta oznaczymy odpowiednio przez $N_0 = 2\sigma_0 BH$ i $M_0 = \sigma_0 BH^2$ oraz wprowadzimy bezwymiarowe wielkości $n = N/N_0$, $m = M/M_0$. Jeśli $n = \text{const}$, to mogą powstać sytuacje pokazane na rys. 5b. Ze stałą siłą N można stwarzyć pewne momenty oraz pewien stan samonaprężeń, którego nie potrzebujemy explicite wyznaczać. Przy cyklicznym zginaniu warunek plastyczności nie zostanie przekroczony, jeśli siłę podłużną uzależnimy tylko od zakreskowanych pól na rys. 5b. Otrzymujemy w rezultacie następujące zależności [6], [17]

$$m = \frac{2}{3}, \quad 0 \leq n \leq \frac{1}{2},$$

$$(3.1) \quad n + \frac{3}{4}m = 1, \quad \frac{1}{2} \leq n \leq 1,$$

ograniczające obszar przystosowania pokazany na rys. 6.

Dla porównania podano na rys. 6 również krzywą graniczną $f = n^2 + m - 1 = 0$ odpowiadającą proporcjonalnemu narastaniu siły i momentu, a więc przedstawiającą rozwiązanie problemu nośności granicznej. Widać, że obszar przystosowania znajduje się wewnątrz obszaru ograniczonego krzywą nośności granicznej. Dziedzina czysto sprężystego oddziaływania dla materiału bez samonaprężeń ograniczona jest prostą $n + (3/2)m - 1 = 0$, jak łatwo się przekonać ze wzoru znanego z wytrzymałości materiałów, a dotyczące mimośrodowego zginania. Widać, że obszar przystosowania jest, w rozpatrywanym przypadku, znacznie większy. Przez wytworzenie odpowiedniego pola samonaprężeń konstrukcja przystosowała się do większego zakresu zmian współczynników obciążenia [6, 17].



Rys. 6. Krzywe graniczne dla pręta mimośrodowo rozciąganego
a) nośność graniczna, b) przystosowanie do cyklicznego obciążenia $\pm M$, c) granica obszaru sprężystego

Podany przykład ilustruje różnice pomiędzy nośnością graniczną i przystosowaniem. Daje on odpowiedź na pytanie co do wielkości obszaru przystosowania w przypadku pary obciążeń $N = \text{const}$, $\pm M$, ale nie mówi, jakie muszą być odkształcenia plastyczne, aby to przystosowanie nastąpiło. Może się bowiem zdarzyć, że nim przystosowanie nastąpi konstrukcja straci przydatność wskutek zmian jej geometrii. Podejmowane są próby opracowania metod umożliwiających ocenę przemieszczeń towarzyszących przystosowaniu [2]. Metody te powstają w nawiązaniu do wyników doświadczalnych odnoszących się do niskocyklowego zniszczenia metali.

4. Stateczność

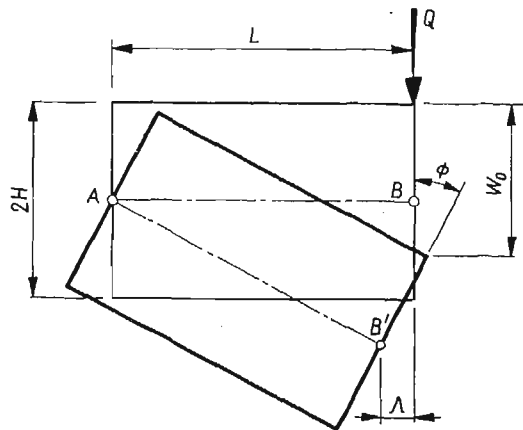
Plastyczne płynięcie, które rozpoczyna się z chwilą przekształcenia konstrukcji w mechanizm, prowadzi w rezultacie do zmian jej geometrii. W konsekwencji zmiany ukształto-

wania konstrukcji może nastąpić bądź zatrzymanie się procesu odkształceń plastycznych, bądź też gwałtowny ich wzrost, towarzyszący utracie stateczności i przejściu do nowej konfiguracji równowagi. Badanie tych zjawisk wykracza poza możliwości teorii nośności granicznej i wymaga oparcia się na związkach mechaniki nieliniowej, a więc, między innymi, rozróżniania pierwotnej i aktualnej konfiguracji konstrukcji [4, 25].

Fakt, iż rozwiązania teorii nośności granicznej mogą się okazać niestateczne, a więc w rzeczywistości konstrukcja przenosi mniejsze obciążenie niż to wynika z tej teorii, wymaga właściwego uwzględnienia w projektowaniu. Z drugiej strony, w innych przypadkach zmiany geometrii powodują zmiany wzrostu obciążenia, a więc mają korzystne skutki dla udźwigu konstrukcji [3, 9].

Mówiąc o zmianach geometrii trzeba od razu zaznaczyć, że nie muszą one być «duże» aby pojawiły się ich skutki. Zjawiska — jak już nadmieniliśmy — należą do *nieliniowych*, a więc małe perturbacje mogą dawać bardzo duże ilościowe zmiany. Przemieszczenia rzędu grubości płyty mogą na przykład w sposób zasadniczy zmienić jej udźwig [10]. Nie są to więc zagadnienia, które mogą pozostawać poza zasięgiem zainteresowań projektanta.

Ocena stateczności rozwiązania danego przez teorię nośności granicznej polega na określeniu nachylenia krzywej «obciążenie–ugięcie». Jeśli $dP/dW > 0$, to obciążenie graniczne jest stateczne i ze wzrostem ugięć następuje «geometryczne» wzmocnienie. Nie-



Rys. 7. Zależności geometryczne przy dużych ugięciach belki sztywno-plastycznej

równość $dP/dW < 0$ wskazuje, że konstrukcja może ulec zniszczeniu w sposób «katastrofalny». Początkowe nachylenie krzywej zależności «obciążenie–ugięcie» stanowi więc bardzo istotną informację.

Rozpatrzymy najpierw przypadek statecznego procesu, kiedy to zmiany geometrii prowadzą do zwiększenia udźwigu. Istotę zagadnienia przedstawimy na prostym przykładzie belki, przekształcającej się w mechanizm pokazany na rys. 7.

Sztywne ogniwa obracają się wokół nieprzesuwanych przegubów podporowych tak, że ugięcie W_0 jest porównywalne z wysokością przekroju belki. W przegubie środkowym pojawiają się odkształcenia, przy czym występują tam nie tylko obroty, ale i wydłużenia

osiowe, właściwe wskutek «dużych» ugięć [30, 34]. Z zależności geometrycznych wynika, że odkształcenia oraz ich prędkości wynoszą odpowiednio

$$(4.1) \quad \Delta = \frac{W^2}{2L}, \quad \Phi = \frac{W}{L}, \quad \dot{\Delta} = \frac{W\dot{W}}{L}, \quad \dot{\Phi} = \frac{\dot{W}}{L}.$$

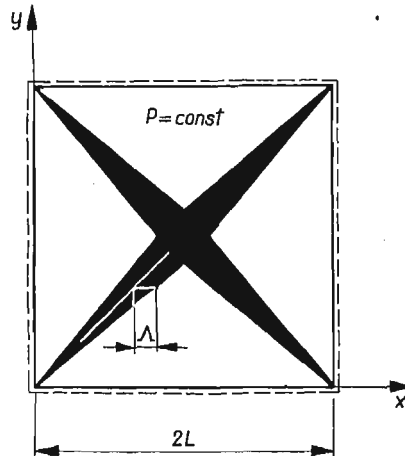
Zasada bilansu mocy przyjmuje postać

$$(4.2) \quad \int P\dot{W} dA = \sum (NW + M)\dot{\Phi}_i L_i.$$

Widać więc, że udźwig zależy od ugięcia. Jeśli M i N w przegubie byłyby niezależne, to przyrost udźwigu ze wzrostem ugięcia byłby liniowy. Ponieważ jednak M i N , w takiej sytuacji jak pokazano na rys. 7, są związane i ich wartości zależą od aktualnego położenia osi obojętnej, to zachodzi między nimi określony związek. Dla jednorodnego przekroju, w przypadku materiału o jednakowych własnościach na ściskanie i rozciąganie, zachodzą związki

$$(4.3) \quad \xi H = \dot{\Delta}/\dot{\Phi} = W, \quad N = N_0 \xi, \quad M = M_0(1 - \xi^2),$$

gdzie N_0 i M_0 są wielkościami granicznymi siły podłużnej i momentu w przekroju. Pierwszą z zależności (4.3) otrzymujemy rozpatrując kinematykę. Aby ruch prowadzący do konfiguracji pokazanej linią ciągłą na rys. 7 był możliwy, wektory chwilowego obrotu muszą przechodzić przez punkty A i B . Stąd wynika zależność pomiędzy położeniem ξH włókna neutralnego a wielkością ugięcia W .



Rys. 8. Obszary skupionych odkształceń przy dużych ugięciach płyty

Dla belki obciążonej siłą skupioną w środku rozpiętości (rys. 7) otrzymujemy, wykorzystując (4.3) w (4.2), zależność

$$(4.4) \quad \frac{QL}{M_0} = 1 + \frac{W^2}{H^2}, \quad 0 \leq \xi \leq 1.$$

Dla $\xi \geq 1$ zachodzi $M = 0$, czyli w całym «przegubie» środkowym występują naprężenia rozciągające. Łatwo się przekonać z (4.2), że wówczas udźwig wzrasta liniowo z przyrostem ugięcia.

Z zależności (4.4) widać, że ugięcie równe połowie wysokości przekroju związane jest dwukrotnym zwiększeniem obciążenia, jakie może przenieść sztywno-plastyczna belka z nieprzesuwnymi podporami. Sprężysta podatność podpór ten przyrost zmniejsza [10].

Dla płyty kwadratowej o przegubowo zamocowanych krawędziach układ stref skoncentrowanych odkształceń pokazuje rys. 8. Kinematycznie dopuszczalny mechanizm związany jest w tym przypadku z wystąpieniem wzdłuż przekątnych zarówno obrotów, jak i wydłużeń [30, 34]. Jeśli W_0 oznacza ugięcie w środku płyty, to wzdłuż przekątnych

$$(4.5) \quad \xi H = W = W_0 \frac{x}{L}, \quad \dot{A} = W_0 \frac{x}{L} \dot{\phi}.$$

Obciążenie związane z tym schematem zniszczenia wyznaczamy z zależności (4.2), uwzględniając w nim wyniki (4.3). Po wykonaniu całkowań otrzymujemy — w przypadku równomiernie rozłożonego obciążenia P — następujące wyrażenie:

$$(4.6) \quad \frac{PL^2}{M_0} = 6 + 2 \frac{W_0^2}{H^2}, \quad 0 \leq \xi \leq 1.$$

Przedstawia ono wpływ «dużych» ugięć na udźwig płyty w zakresie przemieszczeń $W_0 \leq H$.

Ponieważ wielkości M i N wchodzące do (4.2) zależą od budowy przekroju poprzecznego — i są inne dla przekroju pełnego, a inne np. dla dwuteownika, to fakt ten uwidoczni się w ostatecznych wzorach określających *wzmocnienie geometryczne* [30].

Podane przykłady ilustrują metodę kinematyczną obliczania tego geometrycznego wzmocnienia. Informacja o tym, czy nośność graniczna, tzn. obciążenie powodujące ruch, odpowiada rozwiązaniu statecznemu czy niestatecznemu, otrzymać można badając nachylenie krzywej: obciążenie — charakterystyczne ugięcie [4].

Niech nośność graniczna konstrukcji wynosi P_0 . Rozpatrzmy takie procesy obciążania, dla których aktualna intensywność obciążenia wyraża się zależnością $P = \lambda P_0$, a więc λ jest mnożnikiem charakteryzującym wzrost oddziaływań. W oparciu o zasadę bilansu mocy obciążeń zewnętrznych i mocy sił wewnętrznych otrzymujemy

$$(4.7) \quad \lambda = \frac{P}{P_0} = \frac{D(W_0)}{D_0},$$

gdzie $D(W_0)$ oznacza dysypację z uwzględnieniem zmian geometrii płyty, zaś D_0 — odpowiednią jej wartość dla chwili rozpoczynania się ruchu plastycznego. Jako parametr charakteryzujący wpływ czasu przyjmujemy tu przemieszczenie W_0 w pewnym punkcie konstrukcji.

O stateczności decyduje, przy takim sformułowaniu problemu, znak wielkości $d\lambda/dW_0$ dla $W_0 = 0$. W konsekwencji otrzymujemy warunek stateczności w następującej postaci

$$(4.8) \quad D_0 \frac{\partial \lambda}{\partial W_0} = \frac{dD}{dW_0} > 0.$$

Przypadek niestatecznego obciążenia granicznego zilustrujemy na przykładzie tzw. efektu sklepieniowego w płycie. Rozpatrzmy pasmo płytowe wykonane z materiału, który przenosić może tylko naprężenia ściskające. Pasma podparte jest przegubowo nie-

przesuwnie, np. wskutek umieszczenia pomiędzy dwiema nieodkształcalnymi ścianami. Jeśli chodzi o geometrię i kinematykę, to mamy tu sytuację jak na rys. 7. Zależność pomiędzy ugięciem W_0 w środku rozpiętości a położeniem «warstwy obojętnej» w przegubie opisana jest pierwszym z równań (4.3), a ponadto

$$(4.9) \quad N = N_0(1-\xi)/2, \quad M = M_0(1-\xi^2)/2.$$

Rozpraszanie energii następuje tylko w «uogólnionym» przegubie. Otrzymujemy

$$(4.10) \quad \lambda M_0 = NW + M = -\frac{N_0}{2}(1-\xi)\xi H + \frac{M_0}{2}(1-\xi^2),$$

gdź w przegubie występuje ściskanie. Wykorzystując zależność (4.3) oraz związek pomiędzy M_0 i N_0 dla przekroju prostokątnego, dochodzimy w rezultacie do następującej postaci kryterium (4.8)

$$(4.11) \quad \dot{\lambda} = \frac{\partial \lambda}{\partial (W_0/H)} = -2 + 2 \frac{W_0}{H}.$$

W początkowym stanie ruchu, a więc dla $W_0 = 0$, otrzymujemy $\dot{\lambda} = -2 < 0$, a więc mamy do czynienia z przypadkiem niestateczności.

Udźwig pasma przy uwzględnieniu efektu sklepieniowego łatwo obliczyć z zależności (4.2). Wynosi on, w przypadku obciążenia siłą skupioną w środku rozpiętości,

$$(4.12) \quad \frac{QL}{M_0} = 1 - 2 \frac{W_0}{H} + \frac{W_0^2}{H^2},$$

a więc nośność spada do zera kiedy ugięcie osiąga połowę grubości płyty.

W zakresie badań efektu sklepieniowego, wzmocnienia geometrycznego i stateczności opracowano u nas szereg problemów zarówno o znaczeniu podstawowym (twierdzenia o oszacowaniach) [4], jak i rozwiązań szczegółowych, również z uwzględnieniem wpływu odkształceń sprężystych [10].

5. Dynamika

Konstrukcja idealnie sprężysto-plastyczna może być obciążana poza nośność graniczną jeśli działanie obciążeń jest impulsowe. Wówczas, wskutek nadanych przyspieszeń poprzez np. wprowadzenie do układu pewnej energii kinetycznej, następuje ruch, który trwa aż do rozproszenia tej energii na odkształcenia plastyczne. W takim przypadku mamy do czynienia z problemami «dynamicznej» nośności granicznej. Jeśli obciążenie działa przez krótki czas, to uruchomione wskutek nagłego przyłożenia impulsu siły bezwładności mogą być dostatecznie duże na to, aby zapobiec nadmiernym odkształceniom, a w rezultacie i zniszczeniu konstrukcji.

Inną grupę problemów związanych z dynamicznymi oddziaływaniami na budowle stanowią zagadnienia propagacji fal sprężysto-plastycznych w elementach konstrukcji, związanych z tym koncentracji odkształceń plastycznych, a w rezultacie i zmęczenia niskocyklowego. Te dwie grupy zagadnień wymagają odmiennych podejść.

Dynamika konstrukcji plastycznych stosuje w zasadzie wszystkie założenia teorii belek, płyt lub powłok i posługuje się odpowiednimi uogólnionymi wielkościami: momenta-

mi zginającymi, wypadkowymi naprężeń itp. Odmienność w stosunku do zagadnień nośności granicznej polega na uwzględnieniu sił bezwładności i występowaniu w równaniach czasu jako zmiennej niezależnej. Wprowadza to znaczne komplikacje, jako że problemy są teraz opisywane równaniami różniczkowymi cząstkowymi.

Problemy falowe rozpatrywane są zarówno w naprężeniach, jak i w wypadkowych wielkościach. Cel badań z tego zakresu jest — w zastosowaniach do konstrukcji — odmienny. Chodzi o ustalenie miejsc i wielkości lokalnych koncentracji trwałych odkształceń, podczas gdy dynamika konstrukcji zajmuje się raczej deformacją całej budowli wskutek podmuchu czy uderzenia «masowego» oraz oszacowaniem czasu trwania wymuszonego w ten sposób ruchu.

W zagadnieniach dynamiki konstrukcji plastycznych wielkością szczególnie ważną jest pole trwałych przemieszczeń, które realizuje się w rezultacie np. przyłożenia impulsu ciśnienia, działającego w czasie $0 \leq t \leq \tau$. Dla scharakteryzowania tego typu zagadnień i przedstawienia prostych metod ich liczbowej oceny rozpatrzmy płytę kwadratową poddaną działaniu krótkotrwałego równomiernego ciśnienia. Zajmiemy się określeniem trwałego ugięcia środka płyty pokazanej na rys. 1 i obciążonej impulsem ciśnienia takim, że $P = \text{const}$ dla $0 \leq t \leq \tau$ oraz $P = 0$ dla $t \geq \tau$.

Wskutek naglego przyłożenia impulsu ciśnienia wzbudzone zostają siły bezwładności — $\mu \ddot{W}$, przy czym μ oznacza masę przypadającą na jednostkę płaszczyzny środkowej płyty, zaś $\ddot{W} \equiv \partial^2 W / \partial t^2$ jest przyspieszeniem jej uginania się. Zasada bilansowania mocy obciążeń zewnętrznych i sił wewnętrznych (2.1), zastosowana do mechanizmu zniszczenia przedstawionego na rys. 1, przyjmuje postać

$$(5.1) \quad \int_A \ddot{W} (P - \mu \ddot{W}) dA = M_0 \sum \dot{\Phi}_i L_i.$$

Uderzona płyta dozna przyspieszeń. Poszczególne punkty płata OBA powierzchni środkowej, w przypadku rozpatrywanego, kinematycznie dopuszczalnego mechanizmu, mają następujące prędkości i przyspieszenia ugięć

$$(5.2) \quad \dot{W} = \dot{W}_0(t) \left(1 - \frac{x}{L}\right), \quad \ddot{W} = \ddot{W}_0 \left(1 - \frac{x}{L}\right).$$

Wykorzystując (5.2) w (5.1) otrzymujemy, po wykonaniu przepisanych całkowań, następujące wyrażenie na przyspieszenie punktu 0

$$(5.3) \quad \ddot{W}_0 = \frac{2}{\mu} (P - P_0), \quad P_0 = \frac{6M_0}{L^2},$$

gdzie P_0 oznacza nośność graniczną płyty obciążonej równomiernym ciśnieniem w sposób statyczny. Jeśli przed uderzeniem płyta jest nieodkształcona i nieruchoma, tzn. $\dot{W}(x, 0) = \ddot{W}(x, 0) = 0$, to całkując (5.3) otrzymujemy następującą zależność pomiędzy intensywnością przyłożonego ciśnienia a ugięciem środka płyty:

$$(5.4) \quad W_0 = \frac{1}{\mu} (P - P_0) t^2, \quad P > P_0.$$

Po zdjęciu obciążenia w chwili $t = \tau$ ruch trwa nadal z tym, że następuje teraz spowalnianie ugięć aż do chwili, gdy energia włożona zostanie całkowicie rozproszona na odkształcenia plastyczne. Przyspieszenie tego zamierającego ruchu wynosi $\dot{W}_0 = -2P_0/\mu$. Ruch ustaje w chwili $t = T$, gdy $\dot{W}_0(T) = 0$. Wymagając ciągłości prędkości i ugięć w chwili $t = \tau$ otrzymuje się stałe całkowania dla $\tau \leq t \leq T$, a w rezultacie zostaje jednoznacznie opisany proces ruchu mechanizmu pokazanego na rys. 1.

Płyta przestaje się ugiąć w chwili $t = T$. Chwila ustania ruchu i wielkości trwałego ugięcia środka płyty wynoszą odpowiednio

$$(5.5) \quad T = \frac{P}{P_0} \tau, \quad W_0 = \frac{P\tau^2}{\mu P_0} (P - P_0).$$

Rozwiązanie to jest ważne dla pewnego zakresu ciśnień, mianowicie, gdy $P \leq 2P_0$. Przy większych ciśnieniach tworzy się inny mechanizm, mianowicie środkowa część porusza się w początkowym okresie jak ciało sztywne tak, że pole prędkości ugięć ograniczone jest powierzchnią ściętego ostrosłupa [33].

6. Zakończenie

Przedstawiliśmy przegląd zagadnień teorii konstrukcji sprężysto-plastycznych, ze szczególnym podkreśleniem praktycznych metod ich analizy. Koniecznym krokiem w stronę zastosowań w projektowaniu jest przejście do opracowania metod i procedur obliczeniowych, dostosowanych do szczegółowych typów konstrukcji, węzłów i połączeń [32, 35].

Przy omawianiu metod skoncentrowaliśmy się na podejściu, które można nazwać *kinematycznym*, gdyż geometryczną stronę procesu deformacji konstrukcji łatwiej sobie wyobrazić, a więc w konsekwencji łatwiej zastosować takie właśnie metody w działalności projektowej.

Omawiana tematyka była przedmiotem referatu problemowego wygłoszonego na sympozjum «Practical Applications of Plasticity Theory» ASME Winter Annual Meeting, Nowy Jork 30 listopada — 3 grudnia 1970 r.

Literatura cytowana w tekście

1. J. BÄCKLUND, *Mixed finite element analysis of elastic-plastic plates in bending*, Arch. Mech. Stos., 24 (1972) (w druku).
2. R. BRZEZIŃSKI, J. A. KÖNIG, *Ocena ugięć sprężysto-plastycznych konstrukcji ramowych przy obciążeniach zmiennych*, Prace IPPT, 60/1971.
3. M. DUSZEK, *Plastic analysis of cylindrical shells subjected to large deflection*, Arch. Mech. Stos., 18 (1966), 653—663.
4. M. DUSZEK, *Stateczność konstrukcji sztywno-plastycznych*, Prace IPPT 1972 (w przygotowaniu).
5. А. А. ГВОЗДЕВ, *Расчёт несущей способности конструкции по методу предельного равновесия*, Стройиздат, Москва 1949.
6. Д. А. ГОХФЕЛЬД, *Несущая способность конструкции в условиях теплосмен*, Машиностроение, Москва 1970.
7. P. G. HODGE, *Plastic analysis of structures*, McGraw-Hill, New York 1959.
8. M. JANAS, *Nośność graniczna łuków i sklepień*, Arkady, Warszawa 1967.

9. M. JANAS, *Large plastic deformations of reinforced concrete slabs*, Int. J. Solids Struct., 4 (1968), 61—74.
10. M. JANAS, *Skończone ugięcia sprężysto-plastyczne płyt zamocowanych*, Prace IPPT 36/1970.
11. M. JANAS, J. A. KÖNIG, *Nośność graniczna powłok. Przekrycia i zbiorniki*, Arkady, Warszawa 1968.
12. K. W. JOHANSEN, *Yield-line theory*, Cem. Concr. Assoc., London 1961.
13. L. KONIECZNY, *Teoria przystosowywania się belek*, Mech. Teoret. Stos., 8 (1970), 257—276.
14. J. A. KÖNIG, *Podstawowe twierdzenia z zakresu teorii dostosowania się konstrukcji sprężysto-plastycznych do obciążeń zmiennych w czasie*, Mech. Teoret. Stos., 8 (1970), 149—158.
15. J. A. KÖNIG, *A method of shakedown analysis of frames and arches*, Int. J. Solids Struct., 7 (1971), 327—344.
16. Ch. MASSONNET, M. SAVE, *Calcul plastique des constructions*, 2, CBLIA, Bruxelles 1963.
17. Z. MRÓZ, *On the theory of steady plastic cycles in structures*, Structural Mechanics in Reactor Technology (Berlin 1971) Reprint L5/6.
18. D. NIEPOSTYN, *Nośność graniczna płyt prostokątnych*, Arkady, Warszawa 1962.
19. D. NIEPOSTYN, *Nośność graniczna płyt kołowo-symetrycznych*, Arkady, Warszawa 1963.
20. W. OLSZAK, *Teoria nośności granicznej płyt ortotropowych*, Budownictwo Przemysłowe, 2 (1953), 254—265.
21. W. OLSZAK, *Zagadnienia ortotropii w teorii nośności granicznej płyt*, Arch. Mech. Stos., 5 (1953), 329—350.
22. W. OLSZAK i in, *Teoria plastyczności*, PWN, Warszawa 1965.
23. W. PRAGER, *An introduction to plasticity*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1959.
24. А. Р. РЖАНИЦЫН, *Расчёт сооружений с учётом пластических свойств материалов*, Госстройиздат, Москва 1954.
25. A. SAWCZUK, *Zagadnienia teorii umiarkowanie dużych ugięć powłok plastycznych*, Mech. Teoret. Stos., 2 (1971), 335—354.
26. A. SAWCZUK, Th. JAEGER, *Grenztragfähigkeits-Theorie der Platten*, Springer, Berlin 1963.
27. A. SAWCZUK, M. JANAS, J. ZAWIDZKI, *Z zagadnień technicznej teorii nośności granicznej płyt o mieszanych warunkach brzegowych*, Rozpr. Inż., 10 (1962) 243—278.
28. A. SAWCZUK, M. JANAS, J. A. KÖNIG, *Analiza plastyczna konstrukcji*, Ossolineum, Wrocław 1972.
29. A. SAWCZUK, J. A. KÖNIG, *Analiza stanu zniszczenia walcowych silosów żelbetowych*, Arch. Inż. Łąd., 8 (1962), 161—183.
30. A. SAWCZUK, L. WINNICKI, *Plastic behavior of simply supported reinforced concrete plates at moderately large deflections*, Int. J. Solids Struct., 1, (1965) 97—111.
31. Z. SOBOTKA, *Theorie plasticity a meznich stavu stavebných konstrukci*, CSAV, Praha 1955.
32. J. J. TELEGA, *Zastosowanie programowania liniowego do wyznaczania nośności granicznej konstrukcji*, Mech. Teoret. Stos., 9 (1971), 7—52.
33. T. WIERZBICKI, *Liniowa teoria lepkoplastycznych konstrukcji*, Prace IPPT 29/1971.
34. R. H. WOOD, *Plastic and elastic design of slabs and plates*, Thames and Hudson, London 1961.
35. O. C. ZIENKIEWICZ, *The finite element method in engineering science*, McGraw Hill, New York 1971.

Р е з ю м е

ИНЖЕНЕРНЫЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИХ СООРУЖЕНИЙ

В работе излагаются приложения методов теории пластичности в механике сооружений. Рассмотрены следующие разделы этой теории: теория несущей способности сооружений, теория приспособляемости, вопросы больших прогибов и динамики пластин. Особое внимание обращено на приближенные методы анализа упруго-пластических сооружений (теория линий пластических шарниров, кинематические оценки несущей способности оболочек, поведение пластин при импульсных нагружениях). Подчеркивается значение инженерного подхода к теории пластических со-

оружений. Обсуждены вопросы устойчивости решений в теории предельных состояний (геометрическое упрочнение и прощелкивание), а также некоторые задачи теории приспособляемости при циклических нагружениях.

S u m m a r y

ENGINEERING ASPECTS OF PLASTIC ANALYSIS OF STRUCTURES

The theory of plastic structures is discussed from the viewpoint of applications in structural design. Limit analysis, shakedown and large deformation theory are considered. Approximate methods (yield-line theory of plates, kinematical methods in shell analysis and in dynamics of plates) are commented upon, their engineering motivation being emphasized. Stability of yield point loads («geometrical hardening» and snap-through) and shakedown to cyclic loading are considered.

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 31 października 1971 r.
