

## PROBLEMY TEORII MECHANICZNEGO URABIANIA GRUNTÓW\*

WOJCIECH SZCZEPIŃSKI (WARSZAWA)

### 1. Uwagi wstępne

Istnieje dość bogata literatura dotycząca inżynierskich metod obliczania oporów, jakie stawia grunt lub inny ośrodek sypki przy urabianiu go narzędziami mechanicznymi. Jednakże wobec trudności, jakie sprawia opracowanie teorii mechanicznego urabiania, opartej na bardziej solidnych podstawach, metody te mają bardzo przybliżony charakter, a niekiedy notuje się nawet poważne rozbieżności między nimi. Z reguły metody inżynierskie ograniczają się do wyznaczenia wielkości wypadkowych sił działających na narzędzie. Ich najpoważniejszym brakiem jest pominięcie kinematyki ruchu ośrodka, ale również w zakresie statyki nie można na ich podstawie obliczyć, na przykład, rozkładu nacisków na powierzchnię narzędzia.

Rozpowszechniony jest pogląd, że mechanika procesów urabiania gruntów jest zbyt złożona, aby można było do jej analizy stosować metody matematyczne analogiczne do metod stosowanych w teorii plastyczności. Jednakże notowany w ostatnich latach wyraźny rozwój matematycznej teorii mechaniki gruntów wskazuje na celowość podjęcia poważniejszych prób zastosowania jej metod do analizy różnych procesów urabiania gruntów. Oczywiście pojawia się tu szereg poważnych trudności dotyczących zarówno przyjęcia odpowiedniego modelu opisującego złożone fizyczne własności rzeczywistych gruntów, jak i samego rozwiązywania lub nawet sformułowania odpowiednich zagadnień brzegowych dla konkretnych przypadków, nawet przy założeniu możliwie prostego modelu gruntu. Tym niemniej dla niektórych praktycznie ważnych procesów mechanicznego urabiania można już przedstawić rozwiązania uwzględniające statykę i kinematykę ruchu ośrodka. Rozwiązania te odnoszące się do płaskiego stanu odkształcenia polegają na zbudowaniu siatek charakterystyk dla naprężeń i prędkości, a następnie na skonstruowaniu planu prędkości. Można również prześledzić na drodze teoretycznej znaczny etap przebiegu tych procesów metodą kolejnych kroków. Dla niektórych ważnych procesów urabiania gruntów rozwiązania teoretyczne mają bardzo prostą postać i nadają się bezpośrednio do obliczeń inżynierskich. W przypadkach, gdy rozwiązania teoretyczne są skomplikowane mogą one stanowić podstawę do opracowania odpowiednich tablic lub wykresów dla obliczeń praktycznych.

---

\*) Referat problemowy przedstawiony na XIV Polskiej Konferencji Mechaniki Ciała Stałego, Krocienko 1971.

Ważną technicznie grupę procesów stanowi manipulowanie za pomocą maszyn przedładunkowych materiałami sypkimi, jak koks, węgiel, cement luzem, zboże, ziemiopłody itp. Własności fizyczne tych materiałów dają się w ścisły sposób opisać za pomocą prostych związków, a zatem nie ma tu potrzeby wprowadzania sztucznych uproszczeń, które dla gruntów w stanie naturalnym powodują następnie powstanie pewnych rozbieżności między rozwiązaniami teoretycznymi a wynikami badań doświadczalnych. W przypadku materiałów sypkich rozbieżności te są minimalne.

Dla wielu procesów o dużym znaczeniu praktycznym nie udaje się jeszcze zbudować rozwiązań teoretycznych. W takich przypadkach duże usługi mogą oddać badania modelowe tych procesów w małej skali. Badania takie można również stosować dla weryfikacji rozwiązań teoretycznych. Przy badaniach modelowych podstawowe znaczenie ma ustalenie kryteriów podobieństwa między rzeczywistym procesem a badaniem tego procesu na modelu. Zagadnienie ustalenia kryteriów podobieństwa sprawia jednak wiele trudności, specjalnie wtedy gdy proces urabiania zachodzi ze znaczną prędkością. Wiadomo bowiem, że grunty wykazują wyraźną zmianę oporu odkształcenia przy zwiększaniu prędkości odkształcenia. Niestety brak danych doświadczalnych nie pozwala na ogólne matematyczne ujęcie tej zależności, co z kolei uniemożliwia ściśle ustalenie kryteriów podobieństwa modelowego.

W dalszych punktach pracy omówiono pokrótce wspomniane wyżej problemy wyłaniające się przy opracowywaniu matematycznej teorii mechanicznego urabiania gruntów oraz perspektywy jej rozwoju.

## 2. Warunek stanu granicznego

Ogólnie przyjmuje się (patrz np. [1]), że osiągnięcie stanu granicznego w gruncie następuje w chwili, gdy stan naprężenia spełnia warunek Coulomba-Mohra. Warunek ten w przestrzeni naprężeń głównych można przedstawić w postaci nieskończonej długiej piramidy o przekroju sześciobocznym. Może być on zapisany w znanej postaci

$$(2.1) \quad \sigma_1 - \sigma_2 = (\sigma_1 + \sigma_2 + 2H) \sin \varrho \quad (\sigma_1 \geq \sigma_3 \geq \sigma_2),$$

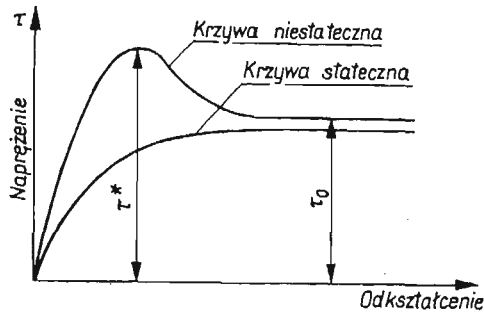
$\varrho$  jest tu kątem tarcia wewnętrznego, a  $H$  przedstawia wytrzymałość gruntu przy trójosiowym izotropowym rozciąganiu.

Badania doświadczalne w warunkach quasi-statycznych na aparatach trójosiowych na ogół potwierdzają słuszność warunku Coulomba-Mohra, chociaż niejednokrotnie otrzymana doświadczalnie obwiednia granicznych kół Mohra nie jest prostoliniowa, jak to wynikałoby z zależności (2.1). Fakt ten jest powodem wysuwania innych propozycji opisu warunku stanu granicznego i opracowania dla nich teorii płaskich stanów granicznych (patrz np. [1, 2]). Wydaje się jednak, że dla analizy procesów urabiania gruntów warunek Coulomba-Mohra pozostanie warunkiem podstawowym, mając niezłe potwierdzenie doświadczalne, a jednocześnie mając stosunkowo prostą postać.

Pewne rodzaje gruntów (np. grunty gliniaste w stanie naturalnym, zagęszczony piasek) wykazują zjawisko niestateczności w procesie odkształcania. Przejawia się to przy badaniach doświadczalnych prowadzonych, na przykład, w aparacie bezpośredniego ścinania utwo-

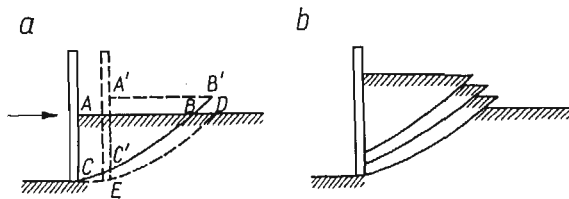
rzeniem się na krzywej odkształcania charakterystycznego spadku oporu gruntu od wartości  $\tau^*$  do  $\tau_0$  po osiągnięciu pewnej wielkości odkształcania (rys. 1).

Niestateczność charakterystyki wytrzymałościowej gruntu powoduje, że proces odkształcania przy urabianiu nie ma charakteru ciągłego, ale przebiega skokowo. Schematycznie przedstawia to rys. 2 na przykładzie naporu płaskiej ściany. W położeniu początkowym



Rys. 1

(rys. 2a) powstaje obszar deformacji  $ABC$  oddzielony od nieruchomego masywu gruntu linią nieciągłości prędkości  $CB$ , nazywaną w praktyce inżynierskiej linią odłamu. Wzdłuż niej powstają znacznie większe odkształcenia, niż w pozostałej części obszaru deformacji. Po pewnym przemieszczeniu ściany napierającej opór gruntu wzdłuż  $CB$  spadnie do wielkości  $\tau_0$ , zachowując większe wartości w pozostałym obszarze. Przy dalszym ruchu ściany nastąpi poślizg trójkąta  $ABC$  wzdłuż  $CB$  powodujący powstanie uskoku  $BB'$  na



Rys. 2

swobodnej powierzchni gruntu. Uskok ten będzie się powiększał do chwili, gdy odcinek  $C'E$ , na którym ściana napiera na część masywu poniżej linii odłamu  $BC'$ , będzie dostatecznie duży dla utworzenia się nowej linii odłamu  $ED$ . W ciągu całego procesu powstają kolejno nowe linie odłamu, wzdłuż których zachodzą poślizgi całych partii gruntu. W rezultacie na powierzchni deformowanego gruntu powstaje szereg uskoku (rys. 2b).

Dotychczas, zarówno w teorii plastyczności, jak i w teorii mechaniki gruntów brak jest metod obliczeniowych pozwalających rozwiązywać konkretne zagadnienia deformowania materiałów z niestateczną charakterystyką wytrzymałościową. Nie ma jeszcze dostatecznej liczby danych doświadczalnych z badań zjawiska niestateczności w ogólniejszych trójosiowych stanach naprężenia. Nie pozwala to na opracowanie ilościowe podstaw teorii gruntów mających niestateczną charakterystykę. Opracowanie takiej teorii nie rozwiązywałoby jeszcze sprawy teoretycznej analizy mechaniki konkretnych procesów

urabiania, ponieważ skokowy przebieg tych procesów dla ośrodków niestatecznych wymagałby dodatkowego opracowania metod rozwiązywania zagadnień brzegowych. W obecnej fazie rozwoju teorii procesów urabiania zjawisko niestateczności musi być z konieczności pominięte. Przyjmując dla rzeczywistych gruntów warunek stanu granicznego bez niestateczności, otrzymamy w wyniku teoretycznej analizy procesów urabiania pewne uśrednienie ich przebiegu. W przypadku pokazanym na rys. 2b otrzymalibyśmy, zamiast skokowego charakteru zdeformowanej powierzchni gruntu, uśrednioną pewną linię zastępczą.

Innym ważnym, a dotychczas słabo opracowanym, zagadnieniem jest wpływ prędkości odkształcenia na opór gruntu przy deformacji. Przede wszystkim brak jest danych doświadczalnych pokazujących zmianę oporu gruntu w zależności od prędkości odkształcania dla złożonych stanów naprężenia. Obszerniejsze badania w tym zakresie pozwoliłyby podjąć próbę teoretycznego opisu wpływu prędkości przy odkształcaniu gruntu. Miałoby to podstawowe znaczenie dla ustalenia kryteriów podobieństwa przy modelowych badaniach procesów urabiania. Jako najprostszą można by wysunąć sugestię uzależnienia obu stałych  $q$  i  $H$  w warunku Coulomba-Mohra od odpowiednio obliczonej zastępczej prędkości odkształcania. Pewne próby opisu własności reologicznych gruntów zawarto w monografii [3]. Rozważania te mają jednak raczej związek ze zjawiskami pelzania gruntu przy posadowieniu na nim budowli. Zjawiska te przebiegają z bardzo małymi prędkościami odkształcania, znacznie mniejszymi od prędkości występujących przy mechanicznej obróbce gruntów. Należy tu zwrócić uwagę, że również dla metali brak jest dostatecznej dokumentacji doświadczalnej dla różnych proponowanych w teorii lepkoplastyczności opisów zmiany własności przy różnych prędkościach odkształcania.

### 3. Związki między naprężeniami a prędkościami odkształcenia

Sprawa wyboru związków pomiędzy naprężeniami a prędkościami odkształcenia ma podstawowe znaczenie dla opracowania teorii urabiania gruntów. Istnieje kilka koncepcji budowy takich związków. Źródłowy przegląd tych koncepcji zawierają prace [4, 5, 6], a sprawie wyboru najbardziej odpowiedniej z nich dla teorii procesów mechanicznego urabiania gruntów poświęcono poprzednią pracę [7].

Możliwe są dwie drogi eksperymentalnego badania przydatności tej czy innej koncepcji związków fizycznych do teoretycznej analizy procesów urabiania. Pierwsza droga, to badania typu podstawowego na aparatach trójosiowych przy zastosowaniu cylindrycznych, pełnych lub rurkowych, próbek gruntu. Badania takie są pracochłonne i chociaż z naukowego punktu widzenia są najbardziej odpowiednie nie wydaje się, aby tą drogą można było uzyskać niezbędną ilość danych doświadczalnych. Druga droga, to badania typu weryfikacyjnego, polegające na teoretycznym opracowaniu kinematyki gruntu dla wybranych procesów odkształcania przy zastosowaniu różnych związków fizycznych, a następnie na porównaniu tych rozwiązań z rzeczywistą kinematyką otrzymaną na stanowiskach modelowych. Taką drogę postępowania przyjęto w pracach [4] i [5], w zastosowaniu do zagadnień wciskania stempli o różnych kształtach. Badania tego typu bliższe procesom urabiania gruntów przedstawiono w pracy [7].

Szczególnie przydatny do badań modelowych okazał się proces spiętrzania gruntu, analogiczny do procesu występującego w pewnej fazie pracy zgarniaka. Rozwiązanie teoretyczne dla tej fazy procesu jest bardzo proste (rys. 3), co znacznie ułatwia analizę wyników doświadczalnych. Jeżeli swobodna powierzchnia badanego ośrodka jest prostoliniowa, to rozwiązanie da się wyrazić elementarnymi wzorami.

Z różnych teoretycznych propozycji praw płynięcia dla gruntów dwie mają charakter związków ogólnych obejmujących dowolne stany naprężenia. Pierwsza, to prawo płynięcia stowarzyszone z warunkiem stanu granicznego Coulomba-Mohra

$$(3.1) \quad \dot{\varepsilon}_{ij} = \lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}.$$

W związkach tych zaproponowanych przez DRUCKERA i PRAGERA [8] utożsamiono potencjał plastyczny z warunkiem stanu granicznego (2.1). Wynika z nich efekt ciągłego przyrostu objętości ośrodka w procesie odkształcania, co szczególnie przy znacznie większych odkształceniach jest sprzeczne z własnościami rzeczywistych gruntów. W teorii płaskiego stanu płynięcia związki (3.1) prowadzą do pokrywania się charakterystyk dla naprężeń i prędkości.

W drugiej propozycji praw płynięcia dla gruntów [9, 4] przyjmuje się jako jedną z zależności warunek nieściśliwości. Drugą zależnością jest pokrywanie się kierunków głównych tensora naprężenia i tensora prędkości odkształcania. Tak sformułowane prawo płynięcia można ogólnie zapisać w postaci

$$(3.2) \quad \dot{\varepsilon}_{ij} = \lambda \left( \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \sigma_{kk} \right).$$

Jest ono więc identyczne ze związkami Lévy'ego-Misesa dla ośrodków idealnie plastycznych. Wyniki doświadczalne uzyskane w pracach [4] i [7] wykazują, że koncepcja ta może być bardzo przydatna przy analizie procesów urabiania gruntów. W przypadku płaskiego stanu płynięcia charakterystyki dla prędkości będą teraz ortogonalne i nie będą pokrywały się z charakterystykami dla naprężeń.

#### 4. Równania płaskiego stanu płynięcia gruntów

Wiele praktycznie ważnych procesów urabiania gruntów przebiega w warunkach płaskiego stanu płynięcia i z tego względu teorii tego stanu poświęca się wiele uwagi. Zwykle przyjmuje się taką orientację układu współrzędnych  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , aby stan naprężenia i pole prędkości były niezależne od współrzędnej  $z$ . Oś  $y$  skierowana jest pionowo w dół. Stan płaskiego płynięcia opisany jest układem pięciu równań, mianowicie:

a) warunkiem stanu granicznego

$$(4.1) \quad (\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = (\sigma_x + \sigma_y + 2H)^2 \sin^2 \varrho,$$

w którym, jak wspomniano w punkcie 2, wielkości  $H$  i  $\varrho$  można by uzależnić od prędkości odkształcania;

b) równaniami ruchu

$$(4.2) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= \frac{\gamma}{g} \left( \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} \right), \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} &= \frac{\gamma}{g} \left( \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) + \gamma; \end{aligned}$$

c) warunkiem nieściśliwości

$$(4.3) \quad \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0;$$

d) warunkiem izotropii

$$(4.4) \quad \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} + \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) \operatorname{tg} 2\varphi = 0.$$

Równania (4.3) i (4.4) odpowiadają założeniu prawa płynięcia (3.2). Wielkość  $\varphi$  jest kątem, jaki tworzy kierunek większego naprężenia głównego z osią  $x$ , a więc nie jest nową niewiadomą, gdyż kąt ten może być określony przez składowe naprężenia.

Perspektywy uzyskania rozwiązań dla konkretnych problemów brzegowych sformułowanych dla powyższego układu równań można ocenić przez porównanie z problemem płaskiego płynięcia metali opisanym analogicznym, ale nieco prostszym układem równań. Wiadomo (patrz np. [10]), że dotychczas nie ma efektywnej metody rozwiązania dla płaskiego płynięcia metali z uwzględnieniem sił bezwładności i czułości materiału na prędkość odkształcania. Możliwa jest jedynie analiza quasi-statyczna, w której pomija się również efekty wzrostu oporu plastycznego przy zwiększaniu prędkości odkształcania. Wynika stąd, że również dla gruntów możliwe będzie obecnie uzyskanie rozwiązań quasi-statycznych. Większość procesów urabiania gruntów przebiega z niezbyt dużymi prędkościami i pominięcie sił bezwładności w równaniach (4.2) nie spowoduje godnych uwagi błędów. Pominięcie wpływu prędkości odkształcania gruntu na jego opór plastyczny może jednak nawet przy praktycznie stosowanych prędkościach urabiania dać znaczne odchylenia. Trudność tę można by częściowo ominąć oceniając wstępnie średnią prędkość odkształcania, jaka wystąpi w rozpatrywanym procesie i przy takiej prędkości wyznaczyć doświadczalnie stałe  $H$  i  $\rho$ .

W następnych punktach zostaną przedstawione przykłady quasi-statycznych rozwiązań dla praktycznych procesów urabiania gruntów. Będą one polegały na rozwiązywaniu zagadnień brzegowych dla wyżej podanego układu równań, w którym zamiast równań ruchu (4.2) wystąpią równania równowagi

$$(4.2a) \quad \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = \gamma.$$

W tym zmodyfikowanym układzie pola naprężeń i prędkości są sprzężone tylko przez warunki brzegowe. Rozwiązanie równań dla naprężeń przeprowadza się w klasyczny sposób [1] metodą charakterystyk. Równania różniczkowe charakterystyk mają znaną postać

$$(4.5) \quad dy = \operatorname{tg}(\varphi \pm \varepsilon) dx, \quad d\sigma \pm 2\sigma \operatorname{tg} \varphi d\varphi = \gamma(dy \pm \operatorname{tg} \varphi dx).$$

Pomocnicze wielkości  $\sigma$  i  $\varphi$  są określone przez podstawienia

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_x \\ \sigma_y \end{array} \right\} = \sigma(1 \pm \sin \varrho \cos 2\varphi) - H, \quad \tau_{xy} = \sigma \sin \varrho \sin 2\varphi.$$

Równania dla prędkości mają charakterystyki ortogonalne o współczynnikach kierunkowych

$$(4.6) \quad dx/dy = \operatorname{tg} \left( \varphi \pm \frac{\pi}{4} \right).$$

A zatem charakterystyki dla naprężeń i prędkości nie pokrywają się. Przyjęta procedura budowania konkretnych rozwiązań polega na wyznaczeniu najpierw siatki charakterystyk dla naprężeń, a następnie na wykreślonym wyznaczeniu siatki charakterystyk dla prędkości. Pole prędkości określa się budując hodograf według metod identycznych, jak w teorii plastyczności (patrz np. [10]). Metodę tę zastosowano w pracy [4] rozwiązując zagadnienie wciskania sztywnego klina w suchy piasek. Posłużono się nią również w pracy [7] do analizy kinematyki ośrodka idealnie sypkiego przy naporze pionowej ściany. W obu powyższych pracach otrzymano dobrą zgodność wyników z badaniami eksperymentalnymi.

W przypadkach biernego parcia gruntu, jakie zwykle występują w procesach urabiania, obszar odkształcania ograniczony przez skrajne linie siatki charakterystyk pola prędkości mieści się całkowicie wewnątrz obszaru pokrytego siatką charakterystyk dla naprężeń.

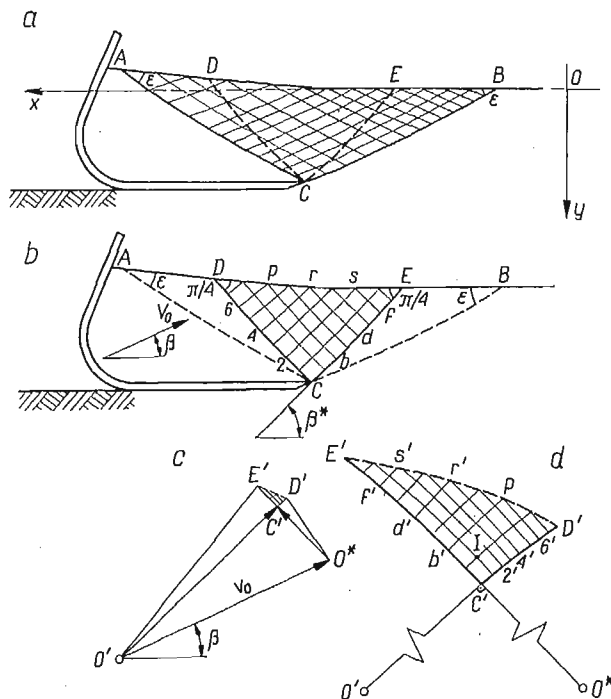
Poniżej podamy kilka typowych przykładów zastosowania teorii płaskiego stanu płynięcia do analizy mechaniki gruntu przy urabianiu różnymi narzędziami. We wszystkich przypadkach założono więc, że swobodna powierzchnia gruntu jest walcowa, ale profil jej może mieć dowolną postać.

Podobnie jak w teorii obróbki plastycznej metali [10], różne procesy urabiania gruntów można rozpatrywać jako procesy niestacjonarne stosując procedurę kolejnych kroków. Zakładając początkową konfigurację swobodnego brzegu, można wyznaczyć odpowiadające jej pole prędkości. Pole to można uważać za niezmiennie w okresie dostatecznie małego przyrostu czasu. Taka przybliżona metoda umożliwia wyznaczenie deformacji jakiej doznała swobodna powierzchnia gruntu w okresie tego przyrostu czasu. Następnie dla nowego kształtu powierzchni buduje się nowe rozwiązanie i nową deformację swobodnej powierzchni. Procedurę tę można powtarzać aż do momentu, gdy dla jakiegoś stopnia deformacji powierzchni niemożliwe już będzie zbudowanie rozwiązania teoretycznego. Podany zostanie również przykład takiej sytuacji.

## 5. Rozwiązanie dla narzędzia typu zgarniaka [11]

Narzędzie zgarniające o przekroju pokazanym schematycznie na rys. 3 zamknięte jest z obu stron ścianami równoległymi do płaszczyzny rysunku. Ściany te uniemożliwiają odkształcenie gruntu w kierunku osi z stwarzają warunki zbliżone do płaskiego stanu odkształcenia. Przyjmijmy, że narzędzie porusza się z prędkością  $v_0$  o wektorze nachylnym pod kątem  $\beta$  ( $0 \leq \beta \leq \beta^*$ ) względem poziomu. Zakładamy, że kształt profilu  $AB$  swobodnej powierzchni gruntu w rozpatrywanej chwili jest znany.

Siatkę charakterystyk dla naprężeń pokazaną na rys. 3a otrzymano przez rozwiązanie zagadnienia brzegowego Cauchy'ego, określonego przez znane wartości  $\sigma$  i  $\varphi$  na swobodnej powierzchni  $AB$ . Siatka ta pokrywa obszar krzywoliniowego trójkąta  $ABC$ . Położenie punktów  $A$  i  $B$  określa warunek przechodzenia skrajnych charakterystyk  $AC$  i  $BC$  przez ostrze zgarniaka  $C$ .



Rys. 3

Na rys. 3b przedstawiono siatkę charakterystyk dla prędkości wyznaczoną wykreślnie na podstawie siatki charakterystyk dla naprężeń. Obszar odkształcanego gruntu  $DEC$  ograniczają linie nieciągłości prędkości  $EC$  i  $DC$ . Cząstki gruntu położone na prawo od  $CE$  pozostają w spoczynku, a cały obszar na lewo od  $DC$  porusza się jak sztywna całość wraz z narzędziem z prędkością  $v_0$ .

Konstrukcję hodografu (rys. 3c) rozpoczynamy od rozpatrzenia warunków zwartości w punkcie  $C$ , w którym prędkość od strony obszaru odkształcanego musi być skierowana stycznie do  $CE$ . Ponadto skok prędkości na linii nieciągłości  $CD$  musi być do niej styczny. Prędkość punktu  $C$  będzie więc przedstawiał na płaszczyźnie hodografu punkt  $C'$ , przy czym odcinek  $O'C'$  jest równoległy do stycznej do  $CE$  w punkcie  $C$ , zaś  $O^*C'$  poprowadzono równoległe do stycznej do  $CD$  w punkcie  $C$ . Obie linie nieciągłości  $CE$  i  $CD$  reprezentowane są na płaszczyźnie hodografu odpowiednio przez łuki kół  $C'E'$  i  $C'D'$ . Prędkości wewnętrznych punktów trójkąta  $ABC$  znajdujemy przez poprowadzenie na hodografie siatki linii ortogonalnych do charakterystyk prędkości. Tę część hodografu pokazano w powiększeniu na rys. 3d.



Z hodografu wynika, że kąt  $\beta$  nachylenia prędkości  $v_0$  do osi  $x$  nie może być większy od kąta  $\beta^*$ , jaki tworzy styczna do  $EC$  w punkcie  $C$  z poziomem. Dla  $\beta > \beta^*$  wektor nieciągłości prędkości wzdłuż  $CD$  miałby taki sam zwrot, jak naprężenie styczne. Dysypacja energii na linii nieciągłości  $CD$  byłaby więc ujemna. Rozwiązanie tego typu dla  $\beta > \beta^*$  byłoby niepoprawne. Przykład ten wskazuje na konieczność zwrócenia uwagi na zachowanie warunku, aby dysypacja energii była wszędzie nieujemna.

Jeżeli profil powierzchni gruntu tworzy prosta nachylona pod pewnym kątem do poziomu, to charakterystyki dla naprężeń i prędkości wyznacza się z prostych równań parametrycznych. Dla ośrodka bez spójności, siatki charakterystyk dla naprężeń i prędkości składają się z linii prostych. Rozwiązania te o dużym znaczeniu praktycznym przedstawiono w pracy [7] wraz z weryfikacją doświadczalną. Otrzymano dobrą zgodność teoretycznych i doświadczalnych pól prędkości dla suchego piasku i dla modelu ośrodka złożonego ze szklanych pręcików.

## 6. Rozwiązania dla łyżki ładowarki [11]

Charakter pracy łyżki ładowarki zbliżony jest do pracy zgarniaka omówionej w poprzednim punkcie. Rozwiązania teoretyczne są jednak odmienne. Maksymalne obciążenie łyżki powstaje w końcowej fazie procesu napełniania, a więc dla tego etapu pracy rozwiązania będą miały znaczenie techniczne. Ze względu na inne ukształtowanie łyżki niż zgarniaka, przy próbach zbudowania siatki charakterystyk dla naprężeń takiego typu, jak na rys. 3 przecięlibyśmy charakterystyką  $CA$  ścianę łyżki, co byłoby sprzeczne z istniejącymi na niej warunkami tarcia. Z kilku możliwych wariantów rozwiązań teoretycznych dla pracy łyżki przytoczymy dwa najbardziej typowe.

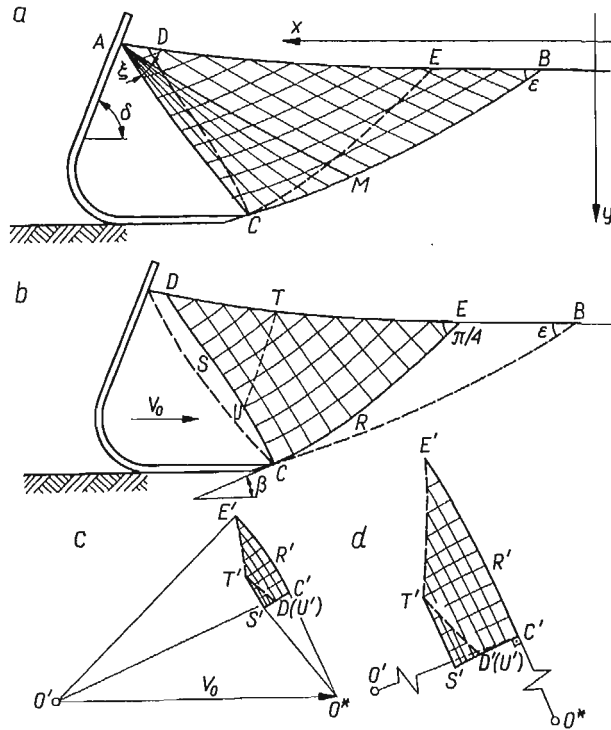
Pierwszy przykład przedstawia rys. 4. W siatce charakterystyk dla naprężeń (rys. 4a) linia  $AM$ , wynikająca z rozwiązania zagadnienia brzegowego Cauchy'ego w trójkącie  $ABM$  nie przechodzi przez krawędź łyżki  $C$ . Pozostałą część siatki tworzy wachlarz  $CAM$ . Kąt wachlarza  $\xi$  wynika z warunku przechodzenia skrajnej charakterystyki przez punkt  $C$ .

Rozwiązanie statyczne tego typu jest możliwe, jeżeli współczynnik tarcia  $\mu$  pomiędzy gruntem a wewnętrzną powierzchnią łyżki jest dostatecznie duży. Warunek lokalnej równowagi w punkcie  $A$  będzie spełniony, jeżeli  $|\tau_{nt}| \leq \mu \sigma_n$ , gdzie  $\sigma_n$  i  $\tau_{nt}$  są odpowiednio naprężeniem normalnym i stycznym działającym na ścianę. Dla danego  $\mu$  graniczna dopuszczalna wartość kąta wachlarza  $\xi^*$  wynika z równości  $|\tau_{nt}| = \mu \sigma_n$ . Jeżeli dla uzyskania przechodzenia skrajnej charakterystyki wachlarza przez punkt  $C$  konieczny byłby kąt  $\xi$  większy od granicznej wartości  $\xi^*$ , to rozwiązanie tego typu nie spełniałoby warunków statycznych w otoczeniu punktu  $A$ . Dalej omówimy typ rozwiązania dotyczący takich przypadków.

Siatka charakterystyk dla prędkości może mieć wachlarz z biegunem w punkcie  $A$ , albo ograniczać się do krzywoliniowego trójkąta w zależności od geometrii łyżki i swobodnej powierzchni ośrodka. Na rys. 4b przedstawiono ten drugi typ siatki, a na rys. 4c zbudowany na jej podstawie hodograf. Ma on podobną budowę, jak hodograf podany w poprzednim punkcie. Nieznaczna zmiana budowy wynika z faktu zmiany znaku krzywizny linii nieciągłości  $CD$  w punkcie  $S$ . Każdy punkt trójkąta  $D'S'T'$  na planie prędkości

przedstawia jednocześnie prędkości ruchu dwóch różnych punktów na płaszczyźnie fizycznej. Na przykład punkty  $D$  i  $U$ , w których nachylenie stycznej do charakterystyki  $DC$  jest takie samo, są na płaszczyźnie hodografu reprezentowane przez jeden punkt  $D'(U')$  — rys. 4d.

Jeżeli współczynnik tarcia na wewnętrznej ścianie łyżki jest zbyt mały, to skrajna charakterystyka wachlarza wychodząca z punktu  $A$  pod kątem  $\xi^*$  nie przejdzie przez



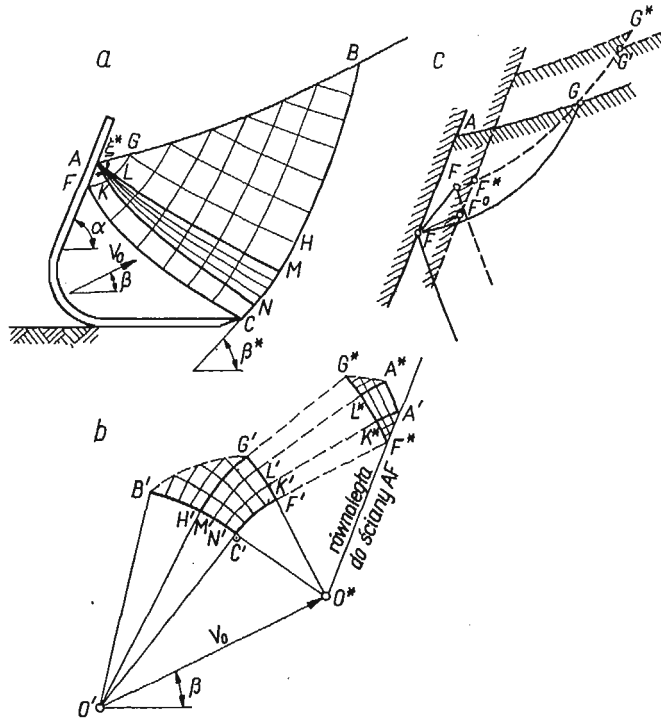
Rys. 4

krawędź łyżki  $C$ . Na rys. 5 przedstawiono schemat rozwiązania takiego przypadku dla gruntu idealnie spójnego, dla którego charakterystyki dla naprężeń i prędkości pokrywają się.

Jak w poprzednim przypadku kąt  $\xi^*$  wachlarza będzie określony przez warunek tarcia  $|\tau_{nt}| = \mu\sigma_n$  na ścianie  $AF$ . Warunek ten wraz z charakterystyką  $AN$  wyznacza jednoznacznie siatkę charakterystyk w obszarze  $AFCN$ . Położenie punktu  $F$  wynika z warunku, że charakterystyka  $FC$  musi przechodzić przez ostrze łyżki  $C$ .

Obszar zalegający na lewo od  $FC$  porusza się jak sztywna całość wraz z łyżką, a cały maszyn gruntu na prawo od  $BC$  pozostaje w spoczynku. Dla spełnienia warunków zwarłości w otoczeniu linii styku  $AF$  konieczne jest wprowadzenie dodatkowej linii nieciągłości prędkości  $FKLG$ . Sytuację w tym miejscu po małym przesunięciu łyżki pokazuje rys. 5c. Dolna i górna strona tej linii nieciągłości są reprezentowane na płaszczyźnie hodografu odpowiednio przez łuki  $F'G'$  i  $F^*G^*$ . Odcinek  $F'F^*$  przedstawia skok prędkości wzdłuż

tej linii. Prosta  $O^*F^*$  jest poprowadzona równolegle do  $AF$ , ponieważ względna prędkość przeslizgu ośrodka po ścianie łyżki musi być do niej styczna. Prędkości punktów leżących na swobodnej powierzchni gruntu są na hodografie reprezentowane przez punkty dwóch łuków  $B'G'$  i  $G^*A^*$ . A zatem w punkcie  $G$  tworzy się na powierzchni uskok.

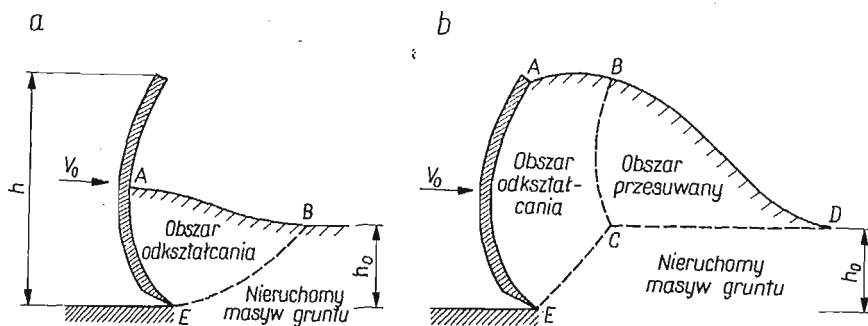


Rys. 5

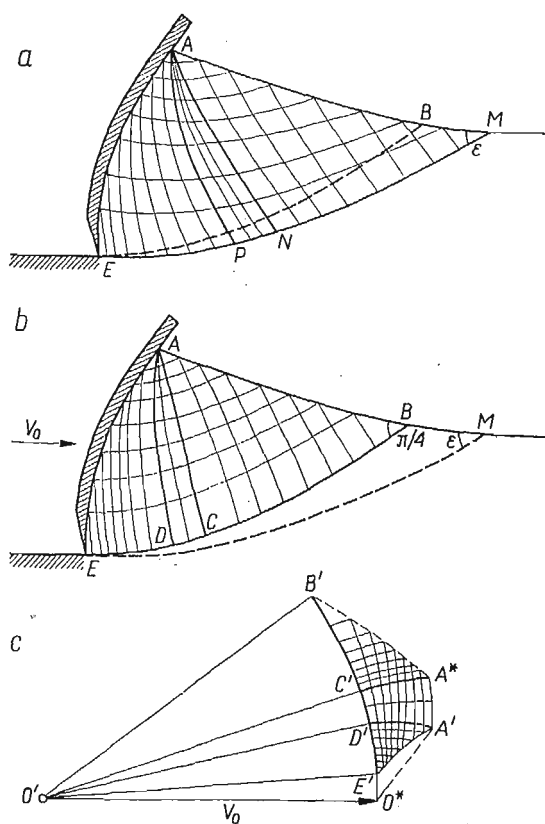
Jeżeli przyjąć, że stan graniczny ośrodka opisany jest warunkiem Coulomba–Mohra (2.1), to z wyżej podanym rozwiązaniem mogą być związane różne typy pól prędkości. Problem ten omówiono szerzej w pracy [11].

### 7. Mechanika procesów spychania gruntów [12]

Przedstawimy teraz dwa typy rozwiązań związanych z pracą lemieszka spychacza. Można wyróżnić dwie podstawowe fazy pracy lemieszka, mianowicie fazę początkową (rys. 6a) i fazę końcową (rys. 6b). W fazie początkowej niejednorodne pole prędkości obejmuje obszar  $ABE$  przylegający bezpośrednio do ściany lemieszka i oddzielony od nieruchomej części gruntu wyraźnie widoczną linią nieciągłości  $BE$ . W fazie końcowej oprócz obszaru niejednorodnego ruchu  $ABCE$  pojawia się obszar  $BCD$  przemieszczający się jak sztywny blok po początkowej powierzchni gruntu  $CD$ . Obszar  $BCD$  może nie być w stanie granicznym, co powoduje znaczne trudności w sformułowaniu zagadnień na wartości brzegowe. Obecnie nie udaje się jeszcze otrzymać rozwiązań dla tej końcowej fazy procesu. Rozważania nasze ograniczymy zatem tylko do fazy początkowej.



Rys. 6

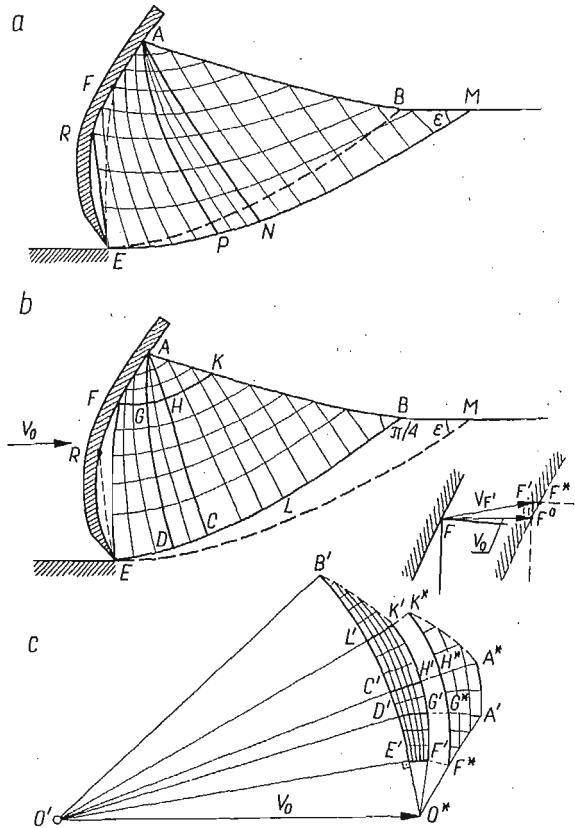


Rys. 7

Stosując metodę kolejnych kroków można prześledzić dość znaczną część przebiegu początkowej fazy pracy lemieszki. Dla każdego kroku wyznacza się siatki charakterystyk dla naprężeń i prędkości, a następnie po zbudowaniu hodografu określa zmianę kształtu powierzchni gruntu dla tego kroku. Stanowi to punkt wyjścia dla zbudowania rozwiązania w następnym kroku.

W zależności od kształtu i położenia lemiesza oraz formy powierzchni gruntu można otrzymać różne typy rozwiązań dla początkowej fazy pracy lemiesza. W pewnych przypadkach na całej powierzchni lemiesza może występować przeslizg gruntu. W innych przypadkach mogą tworzyć się obszary martwego materiału przylegającego do lemiesza na całej lub części długości jego profilu. Poniżej podamy dwa przykłady takich rozwiązań.

Jako pierwszy omówimy przypadek, gdy przeslizg gruntu następuje na całej powierzchni lemiesza. Lemiesz przesuwa się na prawo z zadaną prędkością  $v_0$ . Kształt swobodnej powierzchni gruntu  $AM$  (rys. 7) jest również znany.



Rys. 8

Siatkę charakterystyk dla naprężeń przedstawia rys. 7a. Na jej podstawie została następnie zbudowana wykreślnie siatka charakterystyk dla prędkości (rys. 7b). Obszar odkształcania gruntu ograniczony jest linią nieciągłą prędkości  $EDCB$ , poniżej której cząstki gruntu pozostają w spoczynku.

Budowę hodografu (rys. 7c) rozpoczynamy od punktu  $E$  rozkładając prędkość lemiesza  $v_0$  na składową przeslizgu wzdłuż linii nieciągłości  $EB$  (wektor  $O'E'$ ) i wzdłuż powierzchni lemiesza (wektor  $O^*E'$ ). Linię nieciągłości  $EB$  reprezentuje na hodografie łuk koła  $E'B'$ . W obszarze  $EDA$  pole prędkości jest określone przez warunek, że prędkość przeslizgu gruntu po lemieszu musi być styczna do jego powierzchni, oraz przez dane na  $ED$ . Profil

lemiesza reprezentuje na hodografie łuk  $E'A'$ . Punkтови osobliwemu  $A$  odpowiada na płaszczyźnie hodografu odcinek  $A'A^*$ , a odcinek  $B'A^*$  przedstawia prędkości punktów swobodnej powierzchni gruntu  $BA$ . Prędkość ruchu dowolnego punktu obszaru odkształcania znajdujemy jako wektor łączący biegun hodografu  $O'$  z punktem hodografu odpowiadającym wybranemu punktowi na płaszczyźnie fizycznej. Dla wyznaczenia prędkości ruchu cząstek gruntu względem lemiesza należy jako biegun przyjąć punkt  $O^*$ . Widoczne jest, że pole prędkości odniesione do lemiesza jest silnie niejednorodne. Fakt ten stwierdzono również doświadczalnie w badaniach modelowych przy użyciu suchego piasku [14].

Rysunek 8 przedstawia inny typ rozwiązania, w którym pojawia się martwy obszar gruntu przylegający do części profilu lemiesza. W rozwiązaniu statycznym (rys. 8a) charakterystyka  $RE$  wychodząca z punktu  $R$  przechodzi przez ostrze lemiesza  $E$ . Podobna sytuacja występuje w siatce charakterystyk dla prędkości (rys. 8b), w której charakterystyka  $EF$  wychodząca z punktu  $E$  przecina kontur lemiesza w punkcie  $F$ . Obszar odkształcania gruntu zawiera się między odcinkiem  $AF$  profilu lemiesza i charakterystykami  $FE$  i  $EB$ . Obszar na lewo od  $FE$  stanowi martwą strefę poruszającą się jak sztywna całość wraz z lemieszem. Oprócz obu linii nieciągłości prędkości  $FE$  i  $EB$  pojawia się trzecia linia nieciągłości  $FK$ , konieczna dla spełnienia warunków zwartości w punkcie  $F$ .

Na planie prędkości (rys. 8c) znajdujemy promienie  $O'E'$  i  $O^*E'$  łuków  $E'B'$  i  $E'F'$  reprezentujących linie nieciągłości  $EB$  i  $EF$  rozkładając prędkość  $v_0$  na składowe wzdłuż tych linii. Linie nieciągłości  $FK$  reprezentują dwa równoległe łuki  $F'K'$  i  $F^*K^*$ . Swobodnemu brzegowi  $AB$  odpowiadają na płaszczyźnie hodografu dwa łuki  $A^*K^*$  i  $B'K'$ . W punkcie  $K$  powstaje więc uskok w procesie odkształcania.

### 8. Uwagi końcowe

Rozwiązania przedstawione powyżej należy traktować jako pierwszy krok w kierunku zbudowania teorii procesów mechanicznego urabiania gruntów opartej na bardziej solidnych podstawach. Obszerne badania doświadczalne [14] przeprowadzone na suchym piasku wskazują, że rozwiązania takie mają znaczenie praktyczne przynajmniej dla ośrodków bezkohezyjnych. Dobrą zgodność teoretycznych i doświadczalnych pól prędkości otrzymano dla piasku w stanie luźnym. Nieco gorszą zgodność otrzymano dla piasku w stanie zagęszczonym. Niezbędne są dalsze badania doświadczalne, przede wszystkim dla grutów ze spójnością oraz dla gruntów wykazujących niestateczność krzywych naprężenie-odkształcenie.

### Literatura cytowana w tekście

1. В. В. Соколовский, *Статика сыпучей среды*, Москва 1960.
2. П. И. Перлин, *Об уравнениях пластичности при некотором предельном условии*, Прикл. Мат. Мех., 3, 26 (1962), 580–582.
3. I. KISTEL, *Reologia w budownictwie*, Arkady, Warszawa 1967.
4. A. DRESCHER, K. KWASZCZYŃSKA, Z. MRÓZ, *Statics and kinematics of the granular medium in the case of wedge indentation*, Arch. Mech. Stos., 1, 19 (1967), 99–113.
5. A. DRESCHER, A. BUJAK, *Kinematyka ośrodka sypkiego na przykładzie wciskania płaskiego stempla*, Rozpr. Inż., 2, 14 (1966), 313–325.
6. A. J. M. SPENCER, *A theory of the kinematics of ideal soils under plane strain conditions*, J. Mech. Phys. Sol., 12 (1964), 337–351.

7. W. SZCZEPIŃSKI, H. WINEK, *Doświadczalne studium kinematyki ośrodka sypkiego dla pewnych problemów brzegowych*, Rozpr. Inż., 1, 20 (1972).
8. D. C. DRUCKER, W. PRAGER, *Soil mechanics and plastic analysis or limit design*, Quart. Appl. Math., 10 (1952), 157—165.
9. A. W. JENIKE, R. T. SHIELD, *On the plastic flow of Coulomb solids beyond original failure*, J. Appl. Mech., 27 (1959), 599—602.
10. W. SZCZEPIŃSKI, *Wstęp do analizy procesów obróbki plastycznej metali*, PWN, Warszawa 1967.
11. W. SZCZEPIŃSKI, *Mechanika ośrodka sypkiego przy pracy łyżki ładowarki*, Arch. Bud. Maszyn, 3, 18 (1971), 463—478.
12. W. SZCZEPIŃSKI, *Mechanika ruchu ośrodka sypkiego w początkowej fazie pracy lemieszki sypcharki*, Arch. Bud. Maszyn, 1, 19 (1972), 15—24.
13. W. SZCZEPIŃSKI, *Some slip-line solutions for earthmoving processes*, Arch. Mech. Stos., 6, 23 (1971), 885—896.
14. W. SZCZEPIŃSKI, H. WINEK, *Badania modelowe procesów mechanicznego urabiania gruntów (w przygotowaniu)*.

### Резюме

#### ПРОБЛЕМЫ ТЕОРИИ ЗЕМЛЕРОЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Обсуждаются вопросы, вытекающие из попытки построения математической теории землеройных процессов при помощи тяжелых строительных землеройных машин. Исследуются возможности формулировки наиболее правильного критерия предельного напряженного состояния и соответствующих зависимостей между тензорами напряжений и скоростей деформирования. Отмечается, что в данной стадии изучения вопроса при решении практически интересных проблем нет возможности учитывать силы инерции и влияние скоростей деформирования. Другие трудности возникают в связи с тем, что для грунтов с неустойчивой характеристикой напряжение — деформация, способ деформирования среды при землеройных процессах подвергается скачкообразным изменениям.

Излагается несколько квазистатистических решений некоторых практически интересных процессов. При этом предполагаются: жестко-пластическая модель материала без неустойчивости характеристики напряжение-деформация, неассоциированный закон течения, несжимаемость и изотропия.

### Summary

#### PROBLEMS OF THE THEORY OF EARTHMOVING PROCESSES

Discussed are the problems resulting if an attempt is undertaken to build the mathematical theory of the mechanics of earthmoving processes with the use of heavy construction machinery. Discussed are problems of the choice of the most suitable limit state criterion for stresses and of the respective relations between the stress and strain-rate tensors. It is pointed out that, at present, the inertia forces and strain rate effects cannot be accounted for in solutions of practical problems. Another difficulty arises from the fact that if the stress-strain curve for a given soil is unstable, the deformation during earthmoving process proceeds in a non-continuous manner.

Presented are several quasi-static solutions for some practical processes. The rigid-plastic model of the material without instability in the stress-strain curve has been assumed. A non-associated flow rule assuming incompressibility and isotropy of the soil has been introduced.

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

*Praca została złożona w Redakcji dnia 31 października 1971 r.*