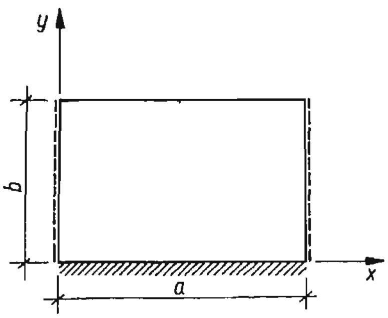
MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
3, 10 (1972)

PŁYTY PROSTOKĄTNE O JEDNOKIERUNKOWO ZMIENNEJ SZTYWNOŚCI

KAROL H. BOJDA (GLIWICE)

W pracy wykorzystano własności operacji T^{α} [1] do rozwiązania równania różniczkowego płyty prostokątnej izotropowej o jednokierunkowo zmiennej sztywności. Rozważania ograniczono do płyt o dwóch przeciwległych krawędziach $x = 0$ i $x = a$ swobodnie



Rys. 1

podpartych, krawędzi $y = 0$ sztywno utwierdzonej i o dowolnych warunkach brzegowych na krawędzi $y = b$ (rys. 1).

Płyty o innych warunkach brzegowych na krawędzi $y = 0$ rozwiązuje się tak samo.

1. Równanie wyjściowe

Równanie różniczkowe powierzchni ugięcia płyty niejednorodnej w swej płaszczyźnie ma kształt [2]

$$\nabla^2(D\nabla^2 w)-(1-\nu)L(D, w) = q, \tag{1.1}$$

gdzie

$$L(D, w) = \frac{\partial^2 D}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-2\frac{\partial^2 D}{\partial x\partial y}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 D}{\partial y^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}.$$

W wielu przypadkach zmienność sztywności płyty może być wyrażona z dostateczną dokładnością równaniem

$$D(y) = D_0\delta^{y/b}, \tag{1.2}$$

w którym δ — stała, którą w każdym poszczególnym przypadku należy tak dobrać, by równanie (1.2) odtwarzało możliwie najwierniej rzeczywistą zmienność sztywności płyty. Podstawiając wyrażenie (1.2) do równania (1.1) znajdujemy

$$(1.3)\qquad D_0\delta^{y/b}\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right)+2D_0\delta^{y/b}\frac{1}{b}\ln\delta\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial y}+\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}\right)+$$
$$+D_0\delta^{y/b}\frac{1}{b^2}(\ln\delta)^2\left(\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)=q.$$

2. Rozwiązanie równania (1.3)

Wprowadźmy operację T^α zdefiniowaną równością [1]

$$\bigwedge_{\{\varphi(y)\}\in\mathscr{K}}\left(T^\alpha\{\varphi(y)\}=\{e^{\alpha y}\varphi(y)\}\right),$$

gdzie $\mathscr{K}$ jest pewną klasą funkcji określoną w [1].

Ponieważ

$$\frac{\partial^{k+l}w}{\partial x^k\partial y^l}\in\mathscr{K}\quad\text{dla } k+l\leqslant 4,$$

więc równanie (1.3) z warunkami brzegowymi

$$w(0,y)=0,\qquad w(a,y)=0,\qquad w(x,0)=0,$$
$$w_{x^2}(0,y)=0,\qquad w_{x^2}(a,y)=0,\qquad w_y(x,0)=0$$

sprowadza się do postaci operatorowej

$$(2.1)\qquad T^{(1/b)\ln\delta}\left[(w^{(4)}+2s^2w''+s^4w)+\frac{2}{b}\ln\delta(sw''+s^3w)+\frac{1}{b^2}(\ln\delta)^2(\nu w''+s^2w)\right]=$$
$$=\frac{q}{D_0}+\left(s-\frac{1}{b}\ln\delta\right)w_{y^2}(x,0)+w_{y^3}(x,0)+\frac{2}{b}\ln\delta\, w_{y^3}(x,0),$$

gdzie s jest operatorem różniczkowym, z operatorowymi warunkami

$$w(0)=0,\qquad w''(0)=0,\qquad w(a)=0,\qquad w''(a)=0.$$

Przyjmując

$$q=\sum_{m\geqslant1}q_m\sin\alpha_m x,\qquad w_{y^2}(x,0)=\sum_{m\geqslant1}A_m\sin\alpha_m x,$$
$$w_{y^3}(x,0)=\sum_{m\geqslant1}B_m\sin\alpha_m x,\qquad w=\sum_{m\geqslant1}w_m\sin\alpha_m x,\qquad \alpha_m=\frac{m\pi}{a},$$

z (2.1) otrzymujemy

$$(2.2)\qquad T^{(1/b)\ln\delta}w_m\left[(\alpha_m^4-2\alpha_m^2s^2+s^4)+\frac{2}{b}\ln\delta(-\alpha_m^2s+s^3)+\frac{1}{b^2}(\ln\delta)^2(-\nu\alpha_m^2+s^2)\right]=$$
$$=\frac{q_m}{D_0}+A_m\left(s-\frac{1}{b}\ln\delta\right)+B_m+2\frac{A_m}{b}\ln\delta.$$

Przedstawiając operatory w_m w postaci

$$w_m = \sum_{n\geq 0} C_{mn} \frac{1}{s^{n+1}} \tag{2.3}$$

i uwzględniając, że jeżeli $\varphi(s)$ jest dowolnym wyrażeniem wymiernym operatora s

$$\varphi(s) = \frac{\beta_k s^k + \ldots + \beta_0}{\gamma_l s^l + \ldots + \gamma_0}, \tag{2.4}$$

to

$$T^\alpha \varphi(s) = \varphi(s-\alpha)$$

oraz że każdy wyraz szeregu (2.3) jest postaci (2.4), wartości C_{mn} można wyznaczyć metodą współczynników nieoznaczonych. Należy w tym celu porównać współczynniki przy tych samych potęgach wyrażenia $\left(s - \frac{1}{b}\ln\delta\right)$.

Po wyznaczeniu współczynników C_{mn} rozwiązanie dane jest wzorem

$$w = \sum_{m\geq 1} \sum_{n\geq 0} C_{mn} \frac{y^n}{n!} \sin\alpha_m x.$$

Stałe A_m i B_m wyznacza się z warunków brzegowych na krawędzi $y = b$.

Jeżeli obciążenie nieciągłe ze względu na zmienną y dane jest funkcją operatorową

$$q(x) = \sum_{t=0}^{j} \sum_{m\geq 1} q_{tm} h^{y_t} \sin\alpha_m x,$$

gdzie h^{y_t} jest operatorem przesunięcia, to operatory w_m należy przyjąć w postaci

$$w_m = \sum_{t=0}^{j} \sum_{n\geq 0} C_{tmn} h^{y_t} \frac{1}{s^{n+1}}. \tag{2.5}$$

Po podstawieniu (2.5) do (2.2) należy porównać współczynniki przy tych samych operatorach przesunięcia i tych samych potęgach wyrażenia $\left(s - \frac{1}{b}\ln\delta\right)$. Otrzymujemy wtedy j niezależnych związków rekurencyjnych dla C_{tmn}.

Należy zwrócić uwagę, że teraz współczynniki $C_{tmn}h^{y_t}$ nie są już operatorami liczbowymi, zatem

$$T^{(1/b)\ln\delta}\left[C_{tmn} h^{y_t} \frac{1}{s^{n+1}}\right] = C_{tmn}(T^{(1/b)\ln\delta} h^{y_t}) \frac{1}{\left(s - \frac{1}{b}\ln\delta\right)^{n+1}}.$$

Ponieważ [1]

$$T^\alpha e^{\lambda\varphi} = e^{\lambda T^\alpha \varphi}$$

gdzie λ jest dowolną liczbą rzeczywistą, a φ dowolnym operatorem, to

$$T^{(1/b)\ln\delta} h^{y_t} = \delta^{y_t/b} h^{y_t}.$$

Wobec tego

$$T^{(1/b)\ln\delta}\left[C_{tmn}h^{y_t}\frac{1}{s^{n+1}}\right] = C_{tmn}\delta^{y_t/b}h^{y_t}\frac{1}{\left(s-\frac{1}{b}\ln\delta\right)^{n+1}}. \tag{2.6}$$

Po wyznaczeniu współczynników C_{tmn} operatorowe rozwiązanie przyjmuje postać

$$w = \sum_{m\geqslant 1}\sum_{n\geqslant 0}\sum_{t=0}^{j} C_{tmn}h^{y_t}\frac{1}{s^{n+1}}\sin\alpha_m x. \tag{2.7}$$

3. Przykład

Jako przykład zastosowania przedstawionego sposobu rozpatrzmy płytę dowolnie obciążoną wzdłuż prostej $y = y_1$. Ponieważ

$$q(x) = \sum_{m\geqslant 1} q_m h^{y_1}\sin\alpha_m x,$$

to zgodnie z (2.5) operatory w_m przyjmujemy w postaci

$$w_m = \sum_{n\geqslant 0}(C_{0mn}+C_{1mn}h^{y_1})\frac{1}{s^{n+1}}. \tag{3.1}$$

Podstawiając (3.1) do (2.2) otrzymujemy

$$\sum_{n\geqslant 0}(C_{0mn}+C_{1mn}\delta^{y_1/b}h^{y_1})\left[\frac{\alpha_m^4-\frac{\nu\alpha_m^2}{b^2}(\ln\delta)^2}{\left(s-\frac{1}{b}\ln\delta\right)^{n+1}} - \frac{\frac{2\alpha_m^2}{b}\ln\delta}{\left(s-\frac{1}{b}\ln\delta\right)^{n}} + \right.$$

$$\left. + \frac{\frac{1}{b^2}(\ln\delta)^2-2\alpha_m^2}{\left(s-\frac{1}{b}\ln\delta\right)^{n-1}} + \frac{\frac{2}{b}\ln\delta}{\left(s-\frac{1}{b}\ln\delta\right)^{n-2}} + \frac{1}{\left(s-\frac{1}{b}\ln\delta\right)^{n-3}}\right] =$$

$$= \frac{q_m}{D_0}h^{y_1}+A_m\left(s-\frac{1}{b}\ln\delta\right)+B_m+\frac{2A_m}{b}\ln\delta.$$

Z (3.2) znajdujemy natychmiast

$$C_{0m0} = 0,\quad C_{0m1} = 0,\quad C_{0m2} = A_m,\quad C_{0m3} = B_m,$$

$$C_{1m0} = 0,\quad C_{1m1} = 0,\quad C_{1m2} = 0,\quad C_{1m3} = \frac{q_m}{D_0\,\delta^{y_1/b}}$$

oraz dwa związki rekurencyjne dla $n \geqslant 4$,

$$C_{tmn} = -\frac{2}{b}\ln\delta\, C_{tmn-1}+\left[2\alpha_m^2-\frac{1}{b^2}(\ln\delta)^2\right]C_{tmn-2}+2\frac{\alpha_m^2}{b}\ln\delta\, C_{tmn-3}+$$

$$+\left[\frac{\nu\alpha_m^2}{b^2}(\ln\delta)^2-\alpha_m^4\right]C_{tmn-4},$$

$$(t = 0, 1).$$

Rozwiązanie w rozpatrywanym przypadku ma postać

$$w = \begin{cases} \sum_{m\geq 1}\sum_{n\geq 0} C_{0mn}\frac{y^n}{n!}\sin\alpha_m x & \text{dla } 0\leq y<y_1, \\ \sum_{m\geq 1}\sum_{n\geq 0}\left[C_{0mn}\frac{y^n}{n!}+C_{1mn}\frac{(y-y_1)^n}{n!}\right]\sin\alpha_m x & \text{dla } 0\leq y_1<y. \end{cases}$$

Wprowadzając oznaczenia

$$\lambda_1 = \frac{2}{b}\ln\delta, \quad \lambda_2 = \frac{1}{b^2}(\ln\delta)^2-2\alpha_m^2, \quad \lambda_3 = -2\frac{\alpha_m^2}{b}\ln\delta, \tag{3.3}$$
$$\lambda_4 = \alpha_m^4-\frac{\nu\alpha_m^2}{b^2}(\ln\delta)^2,$$

związki rekurencyjne można przedstawić w postaci równań różnicowych rzędu czwartego

$$C_{tmr+4}+\lambda_1 C_{tmr+3}+\lambda_2 C_{tmr+2}+\lambda_3 C_{tmr+1}+\lambda_4 C_{tmr} = 0, \quad (t=0,1) \tag{3.4}$$

z warunkami początkowymi

$$C_{0m0} = 0, \quad C_{0m1} = 0, \quad C_{0m2} = A_m, \quad C_{0m3} = B_m,$$
$$C_{1m0} = 0, \quad C_{1m1} = 0, \quad C_{1m2} = 0, \quad C_{1m3} = \frac{q_m}{D_0\delta^{y_1/b}}.$$

Po wprowadzeniu operatora [1]

$$\Gamma_0 = \sum_{r\geq 0} C_{0mr}h^r \tag{3.5}$$

otrzymamy równości

$$\frac{1}{h}\Gamma_0 = \sum_{r\geq 0} C_{0mr+1}h^r, \quad \frac{1}{h^2}\Gamma_0 = \sum_{r\geq 0} C_{0mr+2}h^r,$$
$$\frac{1}{h^3}(\Gamma_0-A_m h^2) = \sum_{r\geq 0} C_{0mr+3}h^r,$$
$$\frac{1}{h^4}(\Gamma_0-A_m h^2-B_m h^3) = \sum_{r\geq 0} C_{0mr+4}h^r.$$

Stąd na podstawie (3.4)

$$\frac{1}{h^4}(\Gamma_0-A_m h^2-B_m h^3)+\frac{\lambda_1}{h^3}(\Gamma_0-A_m h^2)+\frac{\lambda_2}{h^2}\Gamma_0+\frac{\lambda_3}{h}\Gamma_0+\lambda_4\Gamma_0 = 0$$

i ostatecznie

$$\Gamma_0 = \frac{(B_m+\lambda_1 A_m)h^3+A_m h^2}{\lambda_4 h^4+\lambda_3 h^3+\lambda_2 h^2+\lambda_1 h+1}. \tag{3.6}$$

Po wprowadzeniu operatora

$$\Gamma_1 = \sum_{r\geq 0} C_{1mr}h^r \tag{3.7}$$

w ten sam sposób znajdujemy

$$(3.8)\qquad \Gamma_1 = \frac{\dfrac{q_m}{D_0\,\delta^{y_1/b}}}{\lambda_4 h^4+\lambda_3 h^3+\lambda_2 h^2+\lambda_1 h+1}.$$

Wyrażenia (3.6) i (3.8) należy rozbić na ułamki proste, które z kolei należy rozwinąć w szeregi potęgowe operatora przesunięcia. Otrzymane szeregi należy porównać odpowiednio z (3.5) i (3.7) i w ten sposób znaleźć niewiadome C_{0mr}, C_{1mr}.

W obliczeniach praktycznych wygodniej jest jednak wyznaczyć kilka pierwszych współczynników szeregu (2.7) ze związków rekurencyjnych, nie szukając ogólnej postaci tych współczynników. Przedstawiony sposób może być z korzyścią stosowany, gdyż niezależnie od warunków brzegowych na krawędziach $y = 0$ i $y = b$ oraz charakteru obciążenia, do wyznaczenia pozostają zawsze tylko dwie stałe. Poza tym wyznaczanie współczynników z prostych związków rekurencyjnych nie sprawia kłopotów rachunkowych.

Metodę tę można natychmiast rozszerzyć na szereg innych przypadków, np. na płyty o zmiennej sztywności spoczywające na sprężystym podłożu.

4. Uwagi o alternatywnych rozwiązaniach równania (2.2)

Przyjmując operatory w_m w postaci

$$w_m = \sum_{t=0}^{j}\sum_{n\geqslant 0} G_{tmn} h^{y_t} \frac{1}{\left(s+\dfrac{1}{b}\ln\delta\right)^{n+1}},$$

wartości G_{tmn} można także wyznaczyć metodą współczynników nieoznaczonych. W tym celu należy porównać wyrażenia przy tych samych operatorach przesunięcia i tych samych potęgach operatora różniczkowego.

Po wyznaczeniu współczynników G_{tmn} rozwiązanie przyjmuje postać

$$w = \sum_{m\geqslant 1}\sum_{n\geqslant 1}\sum_{t=0}^{j} G_{tmn}\,\delta^{-y/b}\frac{y^n}{n!} h^{y_t}\sin\alpha_m x.$$

Rozwiązanie to jest mniej przydatne do praktycznych obliczeń od rozwiązania (2.7) z powodu czynnika $\delta^{-y/b}$. Poza tym związki rekurencyjne dla G_{tmn} są bardziej złożone od związków dla C_{tmn}.

Operatory w_m można także otrzymać w postaci zamkniętej. Istotnie, z (2.2) wynika

$$(4.1)\qquad w_m = \frac{A_m s+B_m+2\dfrac{A_m}{b}\ln\delta+\dfrac{1}{D_0}T^{-(1/b)\ln\delta}q_m}{s^4+\lambda_1 s^3+\lambda_2 s^2+\lambda_3 s+\lambda_4}.$$

Wielkości λ_k $(k = 1, 2, 3, 4)$ określone są wzorami (3.3).

Rozwiązanie operatorowe dane jest pojedynczym szeregiem sinusowym

$$(4.2)\qquad w = \sum_{m\geqslant 1}\frac{A_m s+B_m+2\dfrac{A_m}{b}\ln\delta+\dfrac{1}{D_0}T^{-(1/b)\ln\delta}q_m}{s^4+\lambda_1 s^3+\lambda_2 s^2+\lambda_3 s+\lambda_4}\sin\alpha_m x.$$

Aby otrzymać rozwiązanie w zwykłej, nieoperatorowej postaci należy wyrażenie (4.1) rozłożyć na ułamki proste, a następnie, korzystając ze znanych wzorów rachunku operatorów [1], otrzymane wyrażenia przedstawić w postaci funkcji zmiennej y. W tym przypadku trudności rachunkowe są więc takie same, jak przy wyznaczaniu ogólnej postaci współczynników C_{lmn}.

Literatura cytowana w tekście

1. J. Mikusiński, *Rachunek operatorów*, PWN, Warszawa 1957.
2. Z. Kączkowski, *Płyty*, PWN, Warszawa 1968.

Р е з ю м е

ПРЯМОУГОЛЬНЫЕ ПЛАСТИНКИ С ОДНОСТОРОННЕЙ ПЕРЕМЕННОЙ ЖЁСТКОСТЬЮ

Работа содержит точное решение дифференциального уравнения изотропной пластинки с переменной жёсткостью.

Исследованы прямоугольные пластинки с некоторыми краевыми условиями. Пластинки с другими краевыми условиями решаются подобным образом. Решение получено при помощи операторов Микусинского в виде двойного степенно-тригонометрического ряда. Коэффициенты этого ряда вычисляются по простым реккурентным формулам.

S u m m a r y

RECTANGULAR PLATES WITH UNIDIRECTIONALLY VARIABLE RIGIDITY

The paper discusses a formally accurate solution of a differential equation of bending of an isotropic plate with variable rigidity. The considerations concern rectangular plates with certain prescribed boundary conditions. Plates with other boundary conditions are to be solved in a similar way. The solution in the form of a double trigonometric exponential series has been obtained on the basis on Mikusiński's operators. The coefficients of the series are calculated by means of simple recurrent relations.

POLITECHNIKA ŚLĄSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 17 maja 1971 r.