

ODBICIE PŁASKICH FAŁ NAPRĘŻENIA W OŚRODKU SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNYM
O ZMIENNEJ GRANICY PLASTYCZNOŚCI

KRZYSZTOF PODOLAK (WARSZAWA)

1. Wstęp

Celem niżej przedstawionych rozważań jest określenie pól naprężenia i prędkości przemieszczeń, powstałych na skutek nagłego pojawienia się ciśnienia na swobodnym brzegu warstwy materiału sprężysto-plastycznego, leżącej na półprzestrzeni wypełnionej ośrodkiem sprężystym. Dodatkowo przyjmuje się założenie, że intensywność wymuszenia maleje od wartości początkowej w sposób monotoniczny z czasem, przyjmując od pewnego momentu wartość równą zeru. Materiał warstwy jest niejednorodny, przy czym własność ta przejawia się w zmienności granicy plastyczności z odległością od powierzchni warstwy. Taką cechę wykazują na przykład grunty.

Przeprowadzona analiza uwzględnia zjawiska propagacji płaskich fał naprężenia powstałych w sprężysto-plastycznej warstwie wskutek wymuszenia brzegu, ich odbicie od powierzchni półprzestrzeni sprężystej oraz wzajemne oddziaływanie fal padających i odbitych.

Zagadnienie podobne do przedstawionego, w przypadku ośrodka warstwowego, jednorodnego, który posiada własności ciała sztywno-plastycznego ze sztywnym odciążeniem (uwzględniono również przypadek szczególny, gdy granica plastyczności jest równa zeru) jest przedmiotem pracy [1].

Modele ciał sztywno- i sprężysto-plastycznych ze sztywnym odciążeniem były wykorzystane w szeregu innych prac dotyczących problemu rozprzestrzeniania się i odbicia płaskich fał naprężenia [2 ÷ 4] z uwagi na to, że dają one możliwość uzyskiwania rozwiązań w postaci zamkniętej.

Analogiczne zagadnienia w przypadku ośrodka niejednorodnego, charakteryzującego się zmiennym w zależności od współrzędnej modułem wzmocnienia oraz odciążenia (przy założeniu granicy plastyczności równej zeru) zostały zbadane w pracy [5], w dużej mierze przy wykorzystaniu metod numerycznych.

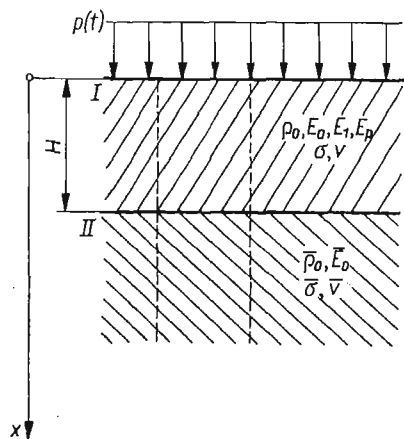
Pewną liczbę prac wchodzących w zakres omawianej problematyki i nie wymienionych wyżej zawiera [6].

Na tle przedstawionych publikacji praca niniejsza stanowi ich częściowe uzupełnienie. Jej wyniki mogą być wykorzystane przy obliczaniu oddziaływań fał naprężenia, silnej nieciągłości na konstrukcje oddzielone warstwą gruntu od źródła wywołującego te fale, jak również do oceny wielkości energii przekazywanej przez warstwę do półprzestrzeni podczas procesu odbicia zachodzącego w płaszczyźnie ich styczności.

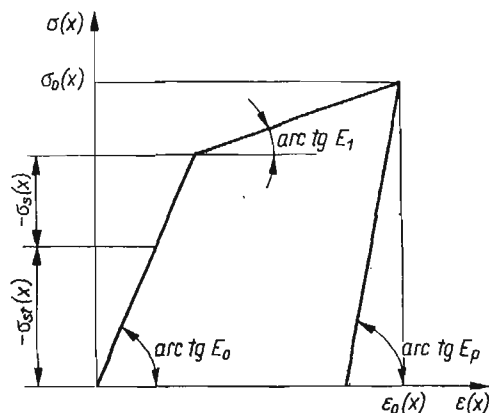
2. Sformułowanie zagadnienia

2.1 Rozważmy ośrodek składający się z warstwy ograniczonej dwiema równoległymi płaszczyznami o odległości H i leżącej na półprzestrzeni, której powierzchnia stanowi jedną z granicznych płaszczyzn warstwy.

Materiał warstwy posiada własności opisane przez sprężysto-plastyczny model Prandtla z odciążeniem, którego moduł E_p jest różny od modułu sprężystości E_0 (patrz rys. 2).



Rys. 1



Rys. 2

Niejednorodność własności warstwy uwzględniona jest przez założenie, że granica plastyczności jest funkcją odległości x od swobodnej powierzchni warstwy, wyrażoną następująco:

$$(2.1) \quad \sigma_s(x) = \sigma_s(0) + \sum_{m=1}^l B_m x^m,$$

gdzie B_m — stałe współczynniki.

Odnosnie do gęstości ośrodka przyjmuje się, że jest ona niezależna od współrzędnej x i równa ρ_0 .

Półprzestrzeń, na której spoczywa warstwa, jest wypełniona ośrodkiem sprężystym o module sprężystości \bar{E}_0 i gęstości $\bar{\rho}_0$. Wprowadzimy oś współrzędnych x skierowaną w głąb ośrodka, a punkt początkowy osi umiejscowimy na swobodnej powierzchni ośrodka (rys. 1).

Założmy obecnie, że na swobodnej powierzchni ($x = 0$) opisanego wyżej ośrodka, w chwili $t = 0$ pojawia się nagle ciśnienie o wartości maksymalnej p_m . W dalszym ciągu ciśnienie maleje z czasem w sposób monotoniczny przyjmując dla $t \geq \tau$ wartość równą zero. Przyjmijmy, że obciążenie brzegu opisuje następująca funkcja:

$$(2.2) \quad p(t) = \begin{cases} p_m \left(1 - \frac{t}{\tau}\right)^n & \text{dla } 0 \leq t \leq \tau, \\ 0 & \text{dla } t > \tau, \end{cases}$$

gdzie

n — liczba naturalna,

τ — czas, po upływie którego ciśnienie na granicy ośrodka osiąga wartość zero.

Zauważmy, że zaburzenia rozprzestrzeniające się w czasie trwania procesu zdeterminowanego podanymi wyżej warunkami mają charakter płaskich fal o frontach równoległych do granic warstwy. Fakt ten pozwala sprowadzić rozważane zagadnienie do jednowymiarowego, a co za tym idzie, badać interesujące nas efekty na przykładzie pręta składającego się z dwu części o jednakowym, stałym przekroju. Dodatkowo należy przyjąć, że pręt nie ma możliwości rozszerzania się w kierunku prostopadłym do wektora przemieszczeń w rozważanym procesie falowym (por. [5]).

2.2. Równania ruchu ośrodka wyprowadzone na podstawie przyjętych w 2.1 założeń posiadają następującą postać:

$$(2.3) \quad v_{,t} = \frac{1}{\rho_0} \sigma_{,x}, \quad v_{,x} = \frac{1}{\rho_0 a_i^2(\sigma)} \sigma_{,t} \quad \text{— w przypadku warstwy sprężysto-plastycznej,}$$

$$(2.4) \quad \bar{v}_{,\bar{t}} = \frac{1}{\bar{\rho}_0} \bar{\sigma}_{,\bar{x}}, \quad \bar{v}_{,\bar{x}} = \frac{1}{\bar{\rho}_0 \bar{a}_0^2(\bar{\sigma})} \bar{\sigma}_{,\bar{t}} \quad \text{— w przypadku półprzestrzeni,}$$

gdzie

$v(x, t), \bar{v}(\bar{x}, \bar{t})$ — prędkości przemieszczeń,

$\sigma(x, t), \bar{\sigma}(\bar{x}, \bar{t})$ — naprężenia,

$$a_i(\sigma) = \begin{cases} \sqrt{\frac{E_i}{\rho_0}} = a_i, & \text{gdzie } i = 0, 1, p \text{ — dla warstwy,} \\ \sqrt{\frac{E_0}{\bar{\rho}_0}} = \bar{a}_0 & \text{— dla półprzestrzeni,} \end{cases}$$

$$\bar{x} = x - H,$$

$$\bar{t} = t - \frac{H}{a_0}.$$

Każdy z podanych wyżej układów równań cząstkowych (2.3) i (2.4) można sprowadzić do równań zwyczajnych, które są spełnione wzdłuż charakterystyk. Otrzymamy w ten sposób:

a) wzdłuż dodatniej charakterystyki, $dx = a dt$

$$d\sigma = \rho_0 a_i(\sigma) dv, \quad d\bar{\sigma} = \bar{\rho}_0 \bar{a}_0 d\bar{v},$$

b) wzdłuż ujemnej charakterystyki, $dx = -a dt$

$$d\sigma = -\rho_0 a_i(\sigma) dv, \quad d\bar{\sigma} = -\bar{\rho}_0 \bar{a}_0 d\bar{v}.$$

Układ równań (2.3) rozwiążemy przy następujących warunkach brzegowych:

a) na brzegu $x = 0$

$$(2.5) \quad \sigma(0, t) = \begin{cases} -p(t) & \text{dla } 0 \leq t \leq \tau, \\ 0 & \text{dla } t > \tau; \end{cases}$$

b) na brzegu $x = H$

$$(2.6) \quad \begin{aligned} \sigma\left(H, t - \frac{H}{a_0}\right) &= \bar{\sigma}(0, \bar{t}), \\ v\left(H, t - \frac{H}{a_0}\right) &= \bar{v}(0, \bar{t}). \end{aligned}$$

Warunki początkowe na obu odcinkach pręta przyjmujemy jednorodne.

3. Rozwiązanie zagadnienia

Zajmiemy się na wstępie przypadkiem, gdy w części warstwy bezpośrednio przylegającej do półprzestrzeni (por. obszar *IV* na rys. 3) wystąpi zjawisko odciążenia po odbiciu pierwszej, sprężystej fali silnej nieciągłości:

$$(3.1) \quad x = a_0 t.$$

Rozważać będziemy ponadto warstwy, których grubość spełnia warunek

$$H < \frac{a_0 a_1}{a_0 + a_1} \tau,$$

(co dla warstwy z piasku daje ograniczenie $H < 167$ m, gdy czas działania zewnętrznego obciążenia $\tau = 1$ sek).

Obraz rozwiązań, jaki otrzymamy na płaszczyźnie fazowej, w określonych wyżej warunkach został przedstawiony na rys. 3.

W dalszym ciągu podamy sposób otrzymania oraz postać rozwiązań w poszczególnych obszarach. Następnie na podstawie analizy tych rozwiązań określimy warunki, których spełnienie wprowadzi zmiany o charakterze jakościowym w przyjętym na rys. 3 obrazie rozwiązań oraz przedstawimy postać tych zmian.

Naprężenia i prędkości przemieszczeń w kolejnych obszarach (według oznaczeń z rys. 3) płaszczyzny fazowej wyrażają niżej podane zależności.

Obszar 0. Obszar niezaburzony

$$(3.2) \quad \sigma_0(x, t) = 0, \quad v_0(x, t) = 0.$$

Obszar I. Obszar sprężystego obciążenia

$$(3.3) \quad \sigma_1(x, t) = -\sigma_s(\xi_1), \quad v_1(x, t) = \frac{\sigma_s(\xi_1)}{\rho_0 a_0},$$

gdzie

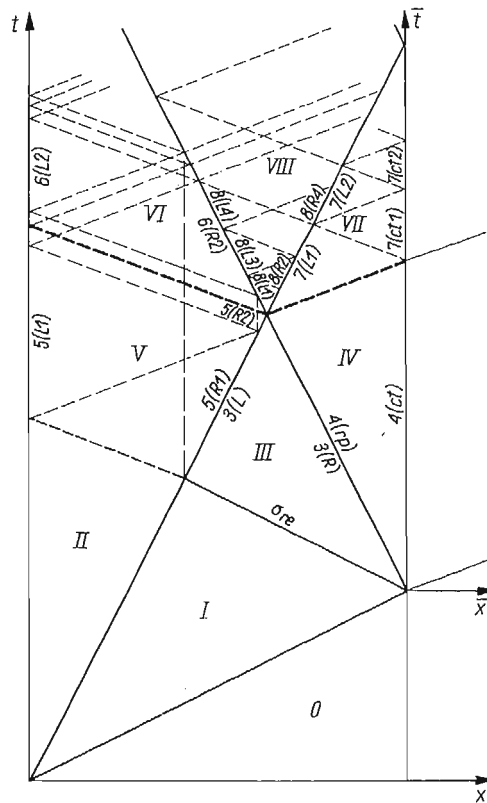
$$\xi_1 = -\frac{a_1}{a_0 - a_1} (a_0 t - x).$$

Obszar II. Jest to obszar odciążenia. Określenie rozwiązań wewnątrz obszaru jest możliwe po uprzednim wyznaczeniu rozkładu naprężenia i prędkości przemieszczeń wzdłuż fali odciążenia

$$(3.4) \quad x = a_1 t.$$

Odpowiednie wyrażenia analityczne tych wielkości możemy uzyskać na drodze omówionej w rozdz. 1 [6]. W dalszym ciągu stosując metodę charakterystyk otrzymamy wyrażenie określające prędkość przemieszczeń brzegu ($x = 0$) ośrodka

$$(3.5) \quad v_{2(L)}(t) = \frac{1}{\rho_0 a_p} \left[p(t) + \frac{a_1 - a_p}{a_1} \sigma_{02} \left(\frac{a_p a_1}{a_p + a_1} t \right) + a_p \frac{a_0 - a_1}{a_0 a_1} \sigma_s \left(\frac{a_p a_1}{a_p + a_1} t \right) \right]$$



Rys. 3

oraz rozwiązania wewnątrz rozważanego obszaru:

$$(3.6) \quad \begin{aligned} \sigma_2(x, t) &= -p \left(t - \frac{x}{a_p} \right) + \frac{a_1 - a_p}{2a_1} [\sigma_{02}(\xi_2) - \sigma_{02}(\eta_2)] + a_p \frac{a_0 - a_1}{2a_0 a_1} [\sigma_s(\xi_2) - \sigma_s(\eta_2)], \\ v_2(x, t) &= \frac{1}{\rho_0 a_p} \left\{ p \left(t - \frac{x}{a_p} \right) + \frac{a_1 - a_p}{2a_1} [\sigma_{02}(\xi_2) + \sigma_{02}(\eta_2)] + a_p \frac{a_0 - a_1}{2a_0 a_1} [\sigma_s(\xi_2) + \sigma_s(\eta_2)] \right\}, \end{aligned}$$

gdzie

$$\sigma_{02}(x') = -p_m \left\{ 1 + \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{2n(n-1) \dots (n-k+1) (\mu_p^2 - 1)^k}{[(\mu_p + 1)^{k+1} - (\mu_p - 1)^{k+1}] k! \mu_p^k} \left(\frac{x'}{a_1 \tau} \right)^k \right\} + \\ + \frac{E_1}{E_0} \sum_{k=1}^l (\mu_0 - 1) \mu_0 B_k \left[1 - \frac{(\mu_p + 1)^k + (\mu_p - 1)^k}{(\mu_p + 1)^{k+1} - (\mu_p - 1)^{k+1}} \right] (x')^k,$$

$$\xi_2 = \frac{a_1}{a_1 + a_p} (a_p t + x), \quad \eta_2 = \frac{a_1}{a_1 + a_p} (a_p t - x), \quad \mu_0 = \frac{a_0}{a_1}, \quad \mu_p = \frac{a_p}{a_1},$$

n, l – wynikają ze związków (2.2) i (2.1).

Obszar III. Założenia przyjęte na wstępie obecnego paragrafu i przeprowadzona na ich podstawie analiza zjawiska odbicia sprężystej fali opisanej równaniem (3.1) prowadzą do wniosku, że wzdłuż odbitej fali silnej nieciągłości

$$(3.7) \quad x = -a_0 t + 2H$$

występują naprężenia równe granicy plastyczności

$$(3.8) \quad |\sigma_{re}(x)| = \sigma_s(x),$$

natomiast prędkości przemieszczeń wynikające z warunku ciągłości dynamicznej wyraża wzór następujący:

$$(3.9) \quad v_{re}(x) = \frac{1}{\rho_0 a_0} \left\{ \sigma_s(0) + \sum_{m=1}^l B_m \left[2 \left(2a_1 \frac{H-x}{a_0 - a_1} \right)^m - x^m \right] \right\}.$$

Wykorzystując (3.8) i (3.9) oraz mając na uwadze fakt, że w rozważanym obecnie obszarze następuje plastyczne obciążenie, określimy rozwiązania we wnętrzu obszaru metodą charakterystyk:

$$(3.10) \quad \sigma_3(x, t) = -\frac{1}{2} [\sigma_s(\xi_3) + \sigma_s(\eta_3)] - \frac{\rho_0 a_1}{2} [v_{re}(\xi_3) - v_{re}(\eta_3)], \\ v_3(x, t) = \frac{1}{2\rho_0 a_1} [\sigma_s(\xi_3) - \sigma_s(\eta_3)] + \frac{1}{2} [v_{re}(\xi_3) + v_{re}(\eta_3)],$$

gdzie

$$\xi_3 = \frac{a_0(x - a_1 t) + 2a_1 H}{a_0 + a_1}, \quad \eta_3 = \frac{a_0(x + a_1 t) - 2a_1 H}{a_0 - a_1}.$$

Obszar IV. W obszarze tym, zgodnie z postawionym na wstępie obecnego rozdziału żądaniem, występuje zjawisko odciążenia. Znalezienie rozwiązań wewnątrz obszaru możliwe jest po określeniu zależności wyrażających naprężenie i prędkości przemieszczeń w płaszczyźnie styku warstwy z półprzestrzenią oraz wzdłuż fali silnej nieciągłości

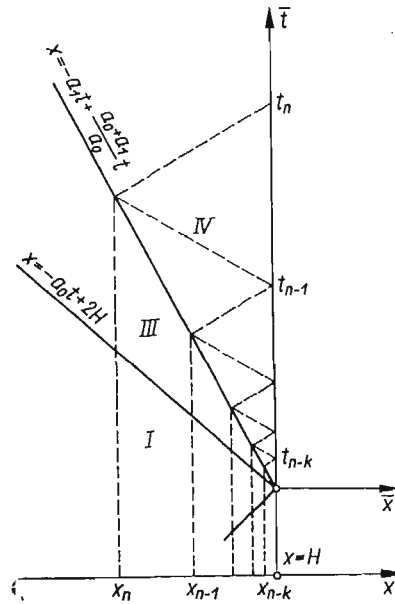
$$(3.11) \quad x = -a_1 t + \frac{a_0 + a_1}{a_0} H.$$

W tym celu wykorzystujemy relację wynikającą z rozważenia zjawiska propagacji fal naprężenia w półprzestrzeni sprężystej,

$$(3.12) \quad \sigma_4(H, t) = -\bar{\rho}_0 \bar{a}_0 v_4(H, t)$$

oraz warunek ciągłości dynamicznej wzdłuż fali odbitej (3.11).

Stosując metodę podobną do opisanej w rozdz. 1 [6] określimy zależności rekurencyjne, wiążące naprężenia lub prędkości przemieszczeń w punktach leżących na prostej $x = H$, o współrzędnych t_n, t_{n-1}, \dots oraz w punktach o współrzędnych x_n, x_{n-1}, \dots , znajdujących się na fali odbitej (3.11) (patrz rys. 4). Punkty te wyznaczamy prowadząc kolejno charakterystyki dodatnie i ujemne dla zakresu odciążenia do przecięcia się z granicami rozważanego obszaru, jak to wskazuje rys. 4. Punktem początkowym omawianej procedury



Rys. 4

jest ten, w którym określamy naprężenie bądź prędkość przemieszczenia.

Wielkości te wewnątrz obszaru wyrażają następujące zależności:

$$(3.13) \quad \begin{aligned} \sigma_4(x, t) &= \frac{1}{2} [\sigma_{4(ct)}(\bar{\xi}_4) + \sigma_{4(rp)}(\bar{\eta}_4)] + \frac{\rho_0 a_p}{2} [v_{4(ct)}(\bar{\xi}_4) - v_{4(rp)}(\bar{\eta}_4)], \\ v_4(x, t) &= \frac{1}{2} [v_{4(ct)}(\bar{\xi}_4) + v_{4(rp)}(\bar{\eta}_4)] + \frac{1}{2\rho_0 a_p} [\sigma_{4(ct)}(\bar{\xi}_4) - \sigma_{4(rp)}(\bar{\eta}_4)], \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned} \sigma_{4(ct)}(\xi) &= C \cdot D \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j-1} (A \cdot B)^{j-1} [\sigma_{3(R)}(\xi_{n-j+1}) - \rho_0 a_1 v_{3(R)}(\xi_{n-j+1})], \\ v_{4(ct)}(\xi) &= -\frac{\sigma_{4(ct)}(\xi)}{\rho_0 a_0}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{4(rp)}(\eta) &= \frac{a_p}{a_p + a_1} [\sigma_{3(R)}(\eta) - \varrho_0 a_1 v_{3(R)}(\eta)] + \\ &+ \frac{2a_p a_1}{(a_p + a_1)^2} \sum_{j=2}^{\infty} (-1)^j A^{j-1} B^{j-2} [\sigma_{3(R)}(\eta_{n-j+1}) - \varrho_0 a_1 v_{3(R)}(\eta_{n-j+1})], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_{4(rp)}(\eta) &= -\frac{1}{\varrho_0(a_p + a_1)} [\sigma_{3(R)}(\eta) - \varrho_0 a_1 v_{3(R)}(\eta)] + \\ &+ \frac{2a_p}{\varrho_0(a_p + a_1)^2} \sum_{j=2}^{\infty} (-1)^j A^{j-1} B^{j-2} [\sigma_{3(R)}(\eta_{n-j+1}) - \varrho_0 a_1 v_{3(R)}(\eta_{n-j+1})], \end{aligned}$$

$$\bar{\xi}_4 = \frac{x + a_p t - H}{a_p}, \quad \bar{\eta}_4 = \frac{x - a_p t}{a_p + a_1} a_1 + \frac{a_p(a_0 + a_1)}{a_0(a_p + a_1)} H,$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{3(R)}(x) &= [\sigma_3(x, t)] \quad \text{dla } t = -\frac{x}{a_1} + \frac{a_0 + a_1}{a_0 a_1} H, \\ v_{3(R)}(x) &= [v_3(x, t)] \quad \text{dla } t = -\frac{x}{a_1} + \frac{a_0 + a_1}{a_0 a_1} H, \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{— wielkości te określamy} \\ \text{na podstawie (3.10);} \end{array}$$

$$\xi_{n-j+1} = -B^{j-1} \left[\frac{a_1 a_p}{a_1 + a_p} \xi_j - \frac{a_0(a_p + a_1) + a_p a_1}{a_0(a_1 + a_p)} H \right] + a_0 \mathcal{H} \sum_{i=2}^j B^{i-2},$$

$$\eta_{n-j+1} = B^{j-1} \eta + a_0 \mathcal{H} \sum_{i=2}^j B^{i-2},$$

$$A = \frac{\bar{\varrho}_0 \bar{a}_0 - \varrho_0 a_p}{\bar{\varrho}_0 \bar{a}_0 + \varrho_0 a_p}, \quad B = \frac{a_p - a_1}{a_p + a_1}, \quad C = \frac{2a_p}{a_p + a_1},$$

$$D = \frac{\bar{\varrho}_0 \bar{a}_0}{\bar{\varrho}_0 \bar{a}_0 + \varrho_0 a_p}, \quad \mathcal{H} = \frac{2a_1 H}{a_0(a_p + a_1)}.$$

Z (3.13), po podstawieniu $x = H$ i $t = H/a_0$ w wyrażeniu określającym naprężenia, wynika następujący warunek pojawienia się w momencie odbicia pierwszej fali sprężystej (3.1) naprężenia, którego wartość bezwzględna przewyższa granicę plastyczności

$$(3.14) \quad \frac{\sigma_s(0)}{\sigma_s(H)} > \frac{\bar{\varrho}_0 \bar{a}_0 + \varrho_0 a_0}{2\bar{\varrho}_0 \bar{a}_0}.$$

Obszar V. Jest to obszar odciążenia. Analiza obrazu rozwiązań przedstawionego na rys. 3 wskazuje, że wartości, jakie przyjmują naprężenia i prędkości przemieszczeń w obszarach V, VI i VIII nie wpływają na rozwiązania w płaszczyźnie styku warstwy z półprzeźrzeniem w rozważanym zakresie czasów (tj. do momentu odbicia fali (3.4) od powierzchni półprzeźrzenia).

Aby nie rozszerzać zbytnio objętości artykułu, jak również biorąc pod uwagę fakt stwierdzony w poprzednim zdaniu, nie będziemy zamieszczać wymagających zbyt wiele miejsca zależności rekurencyjnych, które wyrażają naprężenia i prędkości przemieszczeń

w poszczególnych częściach wymienionych obszarów. Ograniczymy się więc w dalszym ciągu do zwięzłego omówienia sposobu uzyskania tych zależności.

Jako pierwszy krok w kierunku określenia rozwiązań wewnątrz obszaru V potraktujemy wyznaczenie naprężeń i prędkości przemieszczeń występujących na froncie fali odciążenia (3.4), wzdłuż jej odcinka 5 (RI) (patrz rys. 3). W tym celu należy wykorzystać scałkowane związki dla dodatnich charakterystyk w zakresie odciążenia, które biorą początek na granicy $x = 0$ obszaru II i przecinają front fali (3.4) na odcinku 5 (RI). Otrzymana w ten sposób zależność między naprężeniem i prędkością przemieszczeń występującymi na froncie fali (3.4) pozwala określić każdą z tych wielkości, jeśli uwzględnimy warunek dynamicznej ciągłości oraz (3.10). W dalszym ciągu na podstawie scałkowanych związków wzdłuż ujemnych charakterystyk w zakresie odciążenia, biorących początek na odcinku 5 (RI) oraz (2.5) wyznaczamy prędkość przemieszczeń na brzegu $x = 0$ warstwy na odcinku 5 (LI) — patrz rys. 3).

Procedura określania rozwiązań na kolejnych odcinkach fali odciążenia (3.4) i granicy $x = 0$ rozważanego obszaru dalej powtarza się.

Stosując metodę charakterystyk znajdziemy bez trudu rozwiązanie wewnątrz obszaru pamiętając o tym, że określiliśmy je na granicach tego obszaru.

Obszar VI. W obszarze tym materiał warstwy znajduje się w zakresie odciążenia, jednakże mamy tu do czynienia z procesem narastania bezwzględnej wartości naprężenia. Osiąga ono w poszczególnych punktach o współrzędnej przestrzennej x leżących przed frontem fali silnej nieciągłości (3.11) (na jej odcinku stanowiącym granicę między obszarami VI i VII) wartości takie jakie przyjmowało w punktach o tej samej współrzędnej na froncie fali odciążenia (3.4). Fakt ten pozwala w sposób podobny do stosowanego w obszarze V określić rozwiązania na granicach rozważanego obecnie obszaru, a następnie w jego wnętrzu.

Obszar VII. W obszarze tym występuje zjawisko podobne jak w obszarze VI . Naprężenie w poszczególnych punktach o współrzędnej przestrzennej x , należących do obszaru i znajdujących się przed frontem fali silnej nieciągłości (3.1) osiąga wartość taką samą, jaką miało w punktach o tej samej współrzędnej, leżących na fali odbitej (3.11). Fakt ten pozwala, w sposób analogiczny do stosowanego w obszarze VI , określić rozwiązania poszukiwane obecnie.

Naprężenie i prędkości przemieszczeń wzdłuż odcinków 7(Rk) granicy prawostronnej $x = H$ o bszaru, o numerach kolejnych „ k ”, wyrażają się następująco:

$$(3.15) \quad \sigma_{7(Rk)}(t) = (-A)^k \sigma_{4(ct)}(t_n) + \frac{2\varrho_0 a_0}{\varrho_0 \bar{a}_0 + \varrho_0 a_0} \sum_{i=1}^k (-A)^{k-i} \sigma_{4(rp)}(x_{si}),$$

$$v_{7(Rk)}(t) = -\frac{\sigma_{7(Rk)}(t)}{\varrho_0 \bar{a}_0},$$

gdzie

$$t_n = B^{-k}t + \frac{H}{a_p}(B^{-k} + 1) - 2\frac{H}{a_p} \sum_{j=0}^k B^{-j},$$

$$x_{si} = \frac{a_p a_1}{a_p - a_1} \left\{ \left(t + \frac{H}{a_p} \right) B^{-(k-i)} - 2 \frac{H}{a_p} \sum_{j=1}^{k-(i-1)} B^{1-j} \right\},$$

$\sigma_{4(ct)}(t_n)$, $\sigma_{4(rp)}(x_{si})$ — odpowiednio naprężenia na styku warstw oraz na froncie fali odbitej (3.11) określone w objaśnieniach wzorów (3.13).

Rozwiązania wzdłuż kolejnych odcinków o numerach „ k ” lewostronnej granicy obszaru [tj. przed frontem fali silnej nieciągłości (3.4)]:

$$(3.16) \quad \begin{aligned} \sigma_{7(Lk)}(x) &= \sigma_{4(rp)}(x), \\ v_{7(Lk)}(x) &= \frac{\bar{\rho}_0 \bar{a}_0 - \rho_0 a_p}{\rho_0 a_0 \rho_0 a_p} (-A)^{k-1} \sigma_{4(ct)}(t_n) - \frac{\sigma_{4(rp)}(x)}{\rho_0 a_p} - \\ &\quad - \frac{2}{\rho_0 a_p} \sum_{i=1}^{k-1} (-A)^{k-1} \sigma_{4(rp)}(x_{si}), \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned} t_n &= \frac{a_p + a_1}{a_p a_1} B^{-(k-1)} x - 2 \frac{H}{a_p} \sum_{i=0}^{k-1} B^i + \frac{H}{a_p}, \\ x_{si} &= B^{-(k-i)} x - 2 \frac{a_1 H}{a_p - a_1} \sum_{j=0}^{k-(i+1)} B^{-j}. \end{aligned}$$

Na podstawie (3.15) i (3.16) określamy rozwiązania w dowolnym punkcie (x, t) leżącym wewnątrz obszaru:

$$(3.17) \quad \begin{aligned} \sigma_7(x, t) &= \begin{cases} \frac{1}{2} [\sigma_{7(Rk)}(t_h) + \sigma_{7(L1)}(x_s)] + \frac{\rho_0 a_p}{2} [v_{7(Rk)}(t_h) - v_{7(L1)}(x_s)], \\ \frac{1}{2} [\sigma_{4(ct)}(t_n) + \sigma_{7(L1)}(x_s)] + \frac{\rho_0 a_p}{2} [v_{4(ct)}(t_n) - v_{7(L1)}(x_s)], \end{cases} \\ v_7(x, t) &= \begin{cases} \frac{1}{2} [v_{7(Rk)}(t_h) + v_{7(L1)}(x_s)] + \frac{1}{2\rho_0 a_p} [\sigma_{7(Rk)}(t_h) - \sigma_{7(L1)}(x_s)], \\ \frac{1}{2} [v_{4(ct)}(t_n) + v_{7(L1)}(x_s)] + \frac{1}{2\rho_0 a_p} [\sigma_{4(ct)}(t_n) - \sigma_{7(L1)}(x_s)], \end{cases} \end{aligned}$$

gdzie

$$t + \frac{x-H}{a_p} = \begin{cases} t_h \\ t_n \end{cases} \text{ — dla punktu } (x, t) \text{ leżącego wewnątrz trójkąta przyległego do odcinka } \delta(L1) \text{ lewostronnej granicy (ograniczonego charakterystykami — patrz rys. 3),}$$

$$x_s = \frac{a_p t - x}{a_p - a_1} a_1,$$

l, k — numery kolejnych odcinków odpowiednio lewo i prawostronnej granicy obszaru, które określa się po obliczeniu wielkości t_h, t_n, x_s na podstawie wyrażeń podanych wyżej.

Obszar VIII. Jest to obszar odciążenia. Poszukiwanie rozwiązań w obecnym przypadku można sprowadzić do dwu etapów. W pierwszym z nich wykorzystując warunki dynamicz-

nej ciągłości na frontach fal silnej nieciągłości (3.4) i (3.11) (stanowiących granice obszaru) oraz rozwiązania w sąsiednich obszarach *VI* i *VII* określimy naprężenia i prędkości przemieszczeń na odcinkach $\delta(LI)$ i $\delta(RI)$ tych granic (patrz rys. 3). Zastosujemy w tym celu metodę podobną, jak przy znajdowaniu rozwiązań w obszarze *IV*.

Naprężenia i prędkości przemieszczeń określają następujące wzory:

$$\sigma_{8(R1)}(x) = \frac{a_p}{a_p + a_1} \sum_{i=1}^{\infty} B^{2(i-1)} [\varphi_{\varphi}(x_{s-(i-1)}) - B\varphi_{\varphi}(x_{s-1})] + (B-1) \frac{a_p}{a_p + a_1} \sum_{i=1}^{\infty} B^{2(i-1)} \varphi_{\varphi}(x_{q-(i-1)}), \quad (3.18)$$

$$v_{8(R1)}(x) = -\frac{\sigma_{8(R1)}(x)}{\varrho_0 a_1} + v_{7(L1)}(x) + \frac{\sigma_{4(rp)}(x)}{\varrho_0 a_1},$$

gdzie

$$\varphi_{\varphi}(x) = \varrho_0 a_1 v_{7(L1)}(x) + \sigma_{4(rp)}(x),$$

$$\varphi_{\varphi}(x) = \varrho_0 a_1 v_{6(R1)}(x) + \sigma_{6(R1)}(x),$$

$$x_{s-(i-1)} = B^{2(i-1)}x + 2 \frac{a_p a_1}{(a_p + a_1)^2} \frac{a_0 + a_1}{a_0} H \sum_{j=1}^{i-1} B^{2(j-1)},$$

$$x_{s-1} = B^{2i}x + 2 \frac{a_p a_1}{(a_p + a_1)^2} \frac{a_0 + a_1}{a_0} H \sum_{j=1}^i B^{2(j-1)},$$

$$x_{q-(i-1)} = -B^{2i-1}x + \frac{a_p(a_0 + a_1)}{a_0(a_p + a_1)} H \left[1 - \frac{2a_1 B}{a_p + a_1} \sum_{j=1}^{i-1} B^{2(j-1)} \right].$$

$$\sigma_{8(L1)}(x) = -B^{-1}\sigma_{8(R1)}(x_s) + \frac{a_p}{a_p - a_1} \{ [\sigma_{4(rp)}(x_s) + \varrho_0 a_1 v_{7(L1)}(x_s)] + [\sigma_{6(R1)}(x) - \varrho_0 a_1 v_{6(R1)}(x)] \}, \quad (3.19)$$

$$v_{8(L1)}(x) = \frac{\sigma_{8(L1)}(x)}{\varrho_0 a_1} + v_{6(R1)}(x) - \frac{\sigma_{6(R1)}(x)}{\varrho_0 a_1},$$

gdzie

$$x_s = -B^{-1}x + \frac{a_p(a_0 + a_1)}{a_0(a_p + a_1)} B^{-1}H.$$

Zależności (3.18) i (3.19) stanowią podstawę do określenia rozwiązań na dalszych odcinkach prawo i lewostronnej granicy obszaru oraz w jego wnętrzu. Sposób znajdowania tych rozwiązań podano przy omawianiu obszaru *V*.

Podział rozważanego obecnie obszaru na części może przyjmować różne formy w zależności od przyjętych wartości parametrów. Fakt ten pociąga za sobą konieczność określania rozwiązań osobno dla każdego przypadku. Z tego względu nie będziemy tutaj zamieszczać wymagających wiele miejsca zależności, które odpowiadają przedstawionemu na rys. 3 obrazowi rozwiązań.

Znając w dalszym ciągu rozkład naprężenia na frontach fal silnej nieciągłości (3.4) i (3.11), jak również przed ich frontami (na podstawie rozwiązań w obszarach *VI* i *VII*) możemy określić współrzędne punktów, w których silna nieciągłość zanika. W przypadku zaistnienia tego rodzaju możliwości wyniknie konieczność analizy zjawiska odbicia fali słabej nieciągłości od powierzchni półprzestrzeni sprężystej.

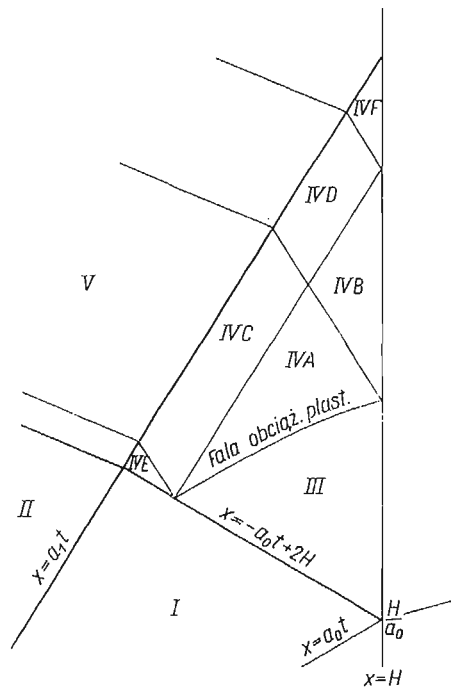
Jeśli natomiast od powierzchni półprzestrzeni ulegnie odbiciu fala silnej nieciągłości (3.4) (jak to widać na rys. 3), wówczas znajdowanie rozwiązań w dalszych obszarach płaszczyzny fazowej sprowadzi się do rozważań prowadzonych poprzednio.

W dalszym ciągu zostaną scharakteryzowane dwa przypadki, dla których pola naprężenia i prędkości przemieszczeń różnią się jakościowo od analizowanych dotychczas.

4. Inne przypadki pól naprężenia i prędkości przemieszczeń

W tym rozdziale zajmiemy się wyłącznie analizą naprężenia występującego w części płaszczyzny fazowej zawartej w granicach obszarów oznaczonych numerami *III*, *IV*, i *VII* na rys. 3.

4.1. Jako pierwszy rozważymy przypadek, gdy wartość bezwzględna naprężenia po odbiciu sprężystej fali silnej nieciągłości (3.1) od powierzchni półprzestrzeni sprężystej



Rys. 5

będzie mniejsza od granicy plastyczności materiału warstwy o współrzędnej $x = H$. Analitycznie fakt ten oznacza niespełnienie warunku (3.14).

Zmieniony obraz rozwiązań w zakresie interesującej nas części płaszczyzny fazowej przedstawia rys. 5. Maksymalne (co do wartości bezwzględnej) naprężenia i prędkości

przemieszczeń na froncie sprężystej fali odbitej (w punkcie o współrzędnej $x = H$) określonej równaniem (3.7) obliczamy na podstawie następujących zależności:

$$(4.1) \quad \begin{aligned} \sigma_{re}(H) &= -\frac{2\bar{\rho}_0\bar{a}_0}{\bar{\rho}_0\bar{a}_0 + \rho_0 a_0} \sigma_s(0), \\ v_{re}(H) &= \frac{2}{\bar{\rho}_0\bar{a}_0 + \rho_0 a_0} \sigma_s(0). \end{aligned}$$

Rozwiązania we wnętrzu obszaru *III* określimy metodą charakterystyk wykorzystując warunek ciągłości dynamicznej na froncie wspomnianej fali odbitej oraz warunki (2.6) i (4.1). Uzyskane tą drogą wzory na naprężenie i prędkości przemieszczeń w punkcie (x, t) rozważanego obszaru są następujące:

$$(4.2) \quad \begin{aligned} \sigma_3(x, t) &= -\frac{2\bar{\rho}_0\bar{a}_0}{\bar{\rho}_0\bar{a}_0 + \rho_0 a_0} \sigma_s(0) + \\ &+ \sum_{m=1}^l B_m \left\{ \left[\frac{a_1}{a_0 - a_1} (a_0 t - x) \right]^m + \frac{\bar{\rho}_0\bar{a}_0 - \rho_0 a_0}{\bar{\rho}_0\bar{a}_0 + \rho_0 a_0} \left[\frac{a_1}{a_0 - a_1} (x + a_0 t - 2H) \right]^m \right\}, \\ v_3(x, t) &= \frac{2}{\bar{\rho}_0\bar{a}_0 + \rho_0 a_0} \sigma_s(0) + \\ &+ \sum_{m=1}^l \frac{B_m}{\rho_0 a_0} \left\{ \left[\frac{a_1}{a_0 - a_1} (a_0 t - x) \right]^m - \frac{\bar{\rho}_0\bar{a}_0 - \rho_0 a_0}{\bar{\rho}_0\bar{a}_0 + \rho_0 a_0} \left[\frac{a_1}{a_0 - a_1} (x + a_0 t - 2H) \right]^m \right\}. \end{aligned}$$

Przyrównując wartość bezwzględną naprężenia z (4.2) do granicy plastyczności (2.1) znajdujemy równanie fali obciążenia plastycznego, która oddziela analizowany obecnie obszar odkształceń sprężystych *III* od obszaru odkształceń plastycznych *IV*.

W przypadku liniowej zmiany granicy plastyczności, którą założono w przykładzie liczbowym, falę obciążenia plastycznego reprezentuje na płaszczyźnie fazowej linia prosta.

Na podstawie (4.2) możemy określić rozkład naprężenia i prędkości przemieszczeń wzdłuż fali obciążenia plastycznego. W tej sytuacji znalezienie rozwiązań w poszczególnych częściach obszaru *IV* nie przedstawia trudności.

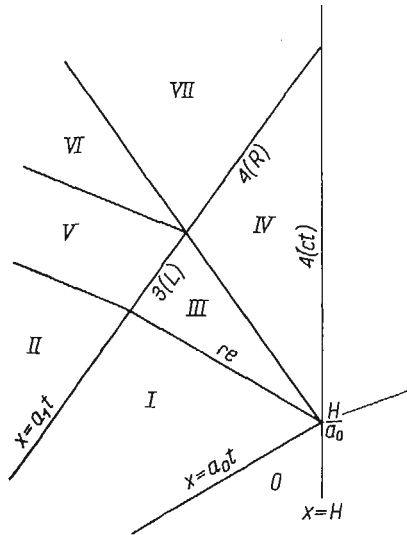
Dodatkowo należy pamiętać, że wartość bezwzględna naprężenia występującego na froncie sprężystej fali odbitej, wzdłuż jej odcinka wchodzącego w zakres obszaru *IVE* (patrz rys. 5), jest równa granicy plastyczności.

Obraz rozwiązań w rozważanym obecnie przypadku znacznie upraszcza się w porównaniu z przedstawionym na rys. 3. Z uwagi na to, że w wyniku odbicia nie pojawia się fala obciążenia plastycznego silnej nieciągłości (3.11), ulega zanikowi obszar *VII* i związany z jego występowaniem obszar *VI*. Na ich miejscu powstanie obszar, w którym pola naprężenia i prędkości przemieszczeń zachowują taki charakter, jak w omawianym uprzednio obszarze *V*. Z tego względu nie będziemy dalej omawiać wyników rozważań dotyczących obecnego przypadku.

4.2. Zbadamy obecnie możliwość wystąpienia w obszarze *IV* (patrz rys. 3) procesu obciążenia plastycznego w przypadku, gdy spełniony jest warunek (3.14). Jak pamiętamy, w rozważaniach prowadzonych w p. 3 założyliśmy, że w obszarze tym występuje odciążenie.

Rozwiązania, na podstawie których obliczamy obecnie naprężenia i prędkości przemieszczeń w obszarze *IV* mają następującą postać:

$$(4.3) \quad \begin{aligned} \sigma_4(x, t) = & -\frac{a_0 - a_1}{2a_0} \sigma_s(z_A) + \frac{a_1}{a_0} \sigma_{1(R)}(z_A) + \\ & + \frac{\bar{\rho}_0 \bar{a}_0 - \rho_0 a_1}{\bar{\rho}_0 \bar{a}_0 + \rho_0 a_1} \left[\frac{a_1}{a_0} \sigma_{1(R)}(z_B) + \frac{a_0 - a_1}{2a_0} \sigma_s(z_B) \right], \\ v_4(x, t) = & \frac{1}{2\rho_0 a_1} \left[\frac{a_0 - a_1}{a_0} \sigma_s(z_A) - 2 \frac{a_1}{a_0} \sigma_{1(R)}(z_A) \right] + \\ & + \frac{\bar{\rho}_0 \bar{a}_0 - \rho_0 a_1}{2\rho_0 a_1 (\bar{\rho}_0 \bar{a}_0 + \rho_0 a_1)} \left[\frac{a_0 - a_1}{a_0} \sigma_s(z_B) - 2 \frac{a_1}{a_0} \sigma_{1(R)}(z_B) \right], \end{aligned}$$



Rys. 6

gdzie

$\sigma_s(z_A)$ — na podstawie (2.1),

$\sigma_{1(R)}(z_A)$ — określamy przyjmując we wzorze (3.3) zależność między współrzędnymi według (3.7),

$$z_A = \frac{a_0}{a_0 + a_1} (x - a_1 t) + \frac{2a_1}{a_0 + a_1} H,$$

$$z_B = -\frac{a_0}{a_0 + a_1} (x + a_1 t) + 2H.$$

Obraz rozwiązań, w aktualnie rozważanym przypadku, w interesującej nas części płaszczyzny fazowej ma postać, jak na rys. 6.

Na podstawie (4.3) można określić zachowanie się naprężenia w czasie, badając znak pochodnej:

$$(4.4) \quad \frac{\partial \sigma_4(x, t)}{\partial t} = -\frac{a_0 - a_1}{2(a_0 + a_1)} a_1 \frac{\partial \sigma_s(z_A)}{\partial z_A} - \frac{a_1^2}{a_0 + a_1} \frac{\partial \sigma_{1(R)}(z_A)}{\partial z_A} + \\ + \frac{\bar{\rho}_0 \bar{a}_0 - \rho_0 a_1}{\bar{\rho}_0 \bar{a}_0 + \rho_0 a_1} \left[\frac{(a_0 - a_1) a_1}{(a_0 + a_1) 2} \frac{\partial \sigma_s(z_B)}{\partial z_B} - \frac{a_1^2}{a_0 + a_1} \frac{\partial \sigma_{1(R)}(z_B)}{\partial z_B} \right].$$

Jeśli przyjmiemy konkretną postać związku (2.1), wówczas warunek wystąpienia zjawiska obciążenia plastycznego w obszarze *IV* można sprowadzić do prostej postaci, która w przypadku ograniczenia się do $l = 1$ w (2.1) jest następująca:

$$(4.5) \quad \frac{a_0}{a_1} < 3.$$

W tym ostatnim przypadku, w porównaniu z rozważanym w p. 3, ulega zanikowi obszar *VI* (patrz rys. 3) i nie istnieje możliwość wystąpienia zjawiska odciążenia w obszarach położonych przed frontem fali (3.4).

Wielkości naprężenia i prędkości przemieszczeń w płaszczyźnie styku dwu warstw określamy na podstawie (4.3) przyjmując $x = H$.

Obraz rozwiązań na płaszczyźnie fazowej, w części za frontem fali (3.4) jest zbliżony do omówionego w p. 3.

5. Przykład liczbowy

Zasadniczym celem wykonanego przykładu liczbowego jest zilustrowanie zmienności naprężenia działającego w płaszczyźnie styku ośrodków o własnościach określonych wyżej.

Rozważono następujące trzy możliwości jakie mogą pojawić się w wyniku odbicia sprężystej fali silnej nieciągłości (3.1) od powierzchni półprzestrzeni sprężystej:

I — wartość bezwzględna naprężenia pojawiającego się w momencie odbicia na froncie fali odbitej jest mniejsza od granicy plastyczności $\sigma_s(H)$;

II — wartość bezwzględna naprężenia (jak w I) jest większa od granicy plastyczności, natomiast pochodna (4.4) spełnia warunek:

$$\frac{\partial \sigma_4(x, t)}{\partial t} < 0;$$

III — jak w II, lecz pochodna czyni zadość nierówności:

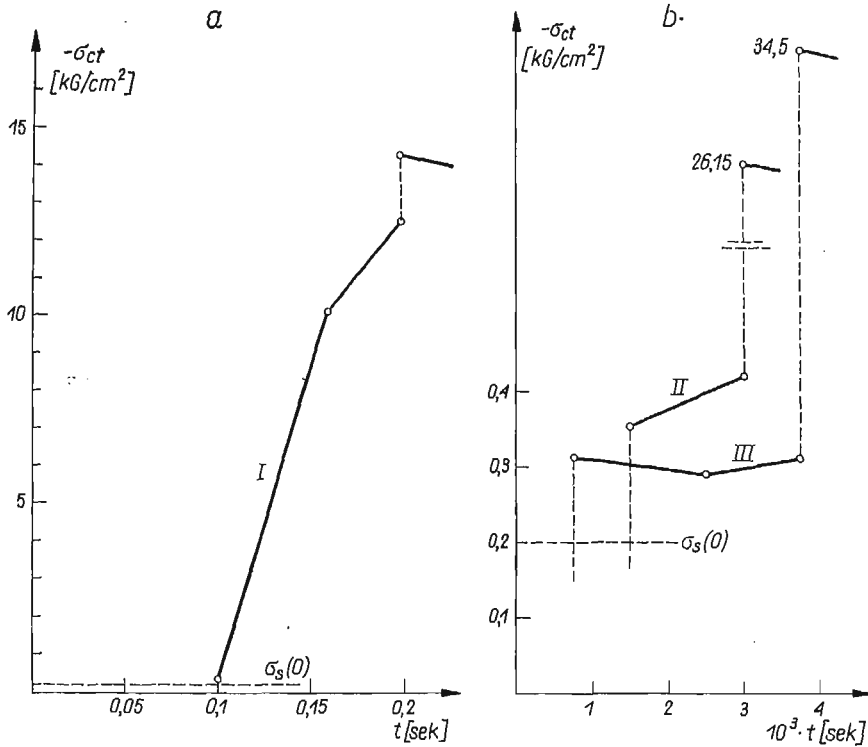
$$\frac{\partial \sigma_4(x, t)}{\partial t} > 0.$$

Do obliczeń przyjęto dane liczbowe:

dla I i II — $a_0 = 500$ [m/sek] = a_p , $a_1 = 250$ [m/sek], $\rho_0 = 200$ [kg/m³], $\sigma_s(x) = 0,2(1+x)$ [kG/cm²], $p_m = 20$ [kG/cm²], $\tau = 0,4$ [sek], $n = 2$, $\bar{a}_0 = 3000$ [m/sek], $\bar{\rho}_0 = 255$ [kg/m³]: $H = 50$ [m] (przyp. I), $H = 0,75$ [m] (przyp. II);

dla III — $a_0 = 1000$ [m/sek] = a_p , $a_1 = 200$ [m/sek], $H = 0,75$ [m], $\sigma_s(x) = 0,2 + 0,15x$ [kG/cm²], pozostałe parametry jak poprzednio.

Sporządzone na podstawie obliczeń wykresy naprężenia w funkcji czasu przedstawione są na rys. 7 (a i b). Porównanie wykresów wykazuje istnienie efektu «łagodzenia» silnej nieciągłości (przypadek I — rys. 7a) dzięki znacznej grubości warstwy (50 [m]) charakte-



Rys. 7

ryzującej się rosnącą z głębokością granicą plastyczności. Efekt ten jest znikomy w przypadkach II i III, bowiem warstwa ma tutaj grubość zaledwie 0,75 [m].

6. Uwagi końcowe

Na podstawie przeprowadzonych w pp. 3 i 4 rozważań można uzyskać szereg innych przypadków wynikających bądź z różnych warunków brzegowych (sztywna ściana lub brzeg swobodny w miejscu półprzestrzeni sprężystej), bądź też ze szczególnych własności materiału (sztywne odciążenie, stała granica plastyczności).

Przedstawione w pracy wyrażenia analityczne, określające pola naprężenia i prędkości przemieszczeń mają niejednokrotnie złożoną postać, stąd też w praktycznych przypadkach może być słuszne korzystanie z modelu materiału jeszcze bardziej uproszczonego (np. sztywne odciążenie) niż materiał opisany w p. 2. Stosując jednakże tego typu podejście nie uwzględniamy często dość istotnych efektów jakościowych, jak np. wspomniane w poprzednim punkcie «łagodzenie» silnej nieciągłości.

Literatura cytowana w tekście

1. S. KALISKI, *Fala odciążenia dla ciała o sztywnej charakterystyce odciążenia w ośrodku warstwowym*, Biul. WAT, 3 (103), X (1961).
2. E. H. LEE, *A boundary value problem in the theory of plastic wave propagation*, Quart. Appl. Math., 10, 4 (1953).
3. S. KALISKI, J. OSIECKI, *Problem odbicia się fali odciążenia od sztywnej ściany dla ciała o sztywnej charakterystyce odciążenia*, Biul. WAT, 2 (85), VIII (1959).
4. S. KALISKI, J. OSIECKI, *Zagadnienie odbicia się fali odciążenia od odkształcalnej podpory dla ciała o sztywnej charakterystyce odciążenia*, Biul. WAT, XLIII, VIII (1959).
5. J. OSIECKI, *Odbicie płaskiej fali naprężenia w ośrodku stałym niejednorodnym*, Biul. WAT, 9 (98), IX (1960).
6. X. A. РАХМАТУЛИН, Ю. А. ДЕМЯНОВ, *Прочность при интенсивных кратковременных нагрузках*, Гос. Изд. Физ.-Мат. Лит., Москва 1961.

Резюме

OTRAŻENIE PŁASKICH WOLN NAPRĘŻENIŃ W UPRUGO-PLASTYCZESKÓJ ŚREDZIE
S PEREMENNÝM PRZEDŁOZM TEKUCZESZCI

В работе рассмотрена задача о распространении плоских волн напряжения, вызванных внезапно появляющимся давлением на поверхности упруго-пластического слоя, основанного на поверхности упругого полупространства. Материал слоя обладает переменным пределом текучести, зависящим от расстояния от внешней поверхности слоя. Полученные результаты позволяют оценивать усилия, действующие на сооружение, находящееся в грунте, возникающие во время волнового процесса.

Summary

REFLECTION OF PLANE STRESS WAVES IN ELASTIC-PLASTIC MEDIUM WITH VARIABLE
YIELD LIMIT

The problem of propagation of plane stress waves in a layered medium consisting of an elastic-plastic layer and elastic semi-space is considered. At outer surface of the layer, the suddenly increasing pressure (which then monotonically decreases to zero) is given. It is assumed that the layer is inhomogeneous with respect to the yield limit. The results obtained in the present paper can be applied to estimate the dynamic forces acting on a structure placed on soil.

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 7 kwietnia 1971 r.