MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
3, 10 (1972)

O NIEKTÓRYCH UOGÓLNIENIACH TWIERDZEŃ NOŚNOŚCI GRANICZNEJ DLA OŚRODKA COSSERATÓW

JÓZEF JOACHIM TELEGA (GLIWICE)

W ostatnich latach ukazało się kilka prac poświęconych naprężeniom momentowym w teorii plastyczności [4, 5, 9, 11, 16, 25].

MIŞICU [11] rozważył pewne możliwe formy warunku plastyczności dla ciał sprężysto-plastycznych przy uwzględnieniu naprężeń momentowych. Przedstawił on również równania konstytutywne dla ciała lepkosprężystego i lepko-sprężysto-plastycznego z naprężeniami momentowymi oraz uogólnił postulat Druckera; mikrostruktura ośrodka omówionego w [11] jest sztywna.

SAWCZUK [16] rozważa materiał plastyczny o mikrostrukturze sztywnej, przy czym ośrodek płynie przy pewnych wartościach naprężeń i naprężeń momentowych, przed osiągnięciem tych wartości jest on sztywny. Krótko mówiąc, w pracy [16] autor zajmuje się analogonem znanego z teorii klasycznej ciała sztywno-plastycznego. SAWCZUK formułuje równania konstytutywne tensorowo liniowe skojarzone z maksymalnym rozproszeniem lokalnym. Ogólny warunek plastyczności otrzymany w [16] ma postać

$$\psi(d_{ij}d_{ij}, m_{(ij)}m_{(ij)}, m_{[ij]}m_{[ij]}) = 0,$$

gdzie d_{ij} jest dewiatorem symetrycznej części tensora naprężenia, natomiast $m_{(ij)}(m_{[ij]})$ oznacza symetryczną (skośnie symetryczną) część dewiatora naprężeń momentowych (por. [8]). Okazuje się, że tylko w przypadku, gdy (por. [11])

$$2\psi = \frac{1}{A}(d_{ij}d_{ij} + L_1^{-2}m_{(ij)}m_{(ij)} + L_1^{-2}m_{[ij]}m_{[ij]}) = \text{const},$$

to otrzymujemy prawo plastycznego płynięcia, tzn.

$$\dot{\varepsilon}_{ij} : \dot{\varkappa}_{(ij)} : \dot{\varkappa}_{[ij]} = \frac{\partial\psi}{\partial d_{ij}} : \frac{\partial\psi}{\partial m_{(ij)}} : \frac{\partial\psi}{\partial m_{[ij]}},$$

gdzie A, L_1, L_2 są stałymi, $\dot{\varepsilon}_{ij}$ jest tensorem prędkości odkształceń, a $\dot{\varkappa}_{ij}$ tensorem prędkości zginania–skręcania.

W pracy GREENA, NAGHDI'EGO, OSBORNA [5] omówiono sprężysto-plastyczną powierzchnię Cosseratów, tzn. powierzchnię posiadającą w każdym punkcie wektor kierunkowy. Wyniki uzyskane w tej pracy są dalszym rozwinięciem rezultatów pracy [3].

KOLOKOŁCZYKOW [25], rozwijając wyniki pracy [8], właściwie w sposób formalny uogólnił związki odkształceniowej teorii plastyczności na przypadek sprężysto-plastycznych ośrodków Cosseratów.

Inne podejście, przy wprowadzaniu naprężeń momentowych, zaproponował LIPPMANN [9]. Przedstawił on teorię plastycznego płynięcia dla sztywno-plastycznych ośrodków Cosseratów, w których cząstki, oprócz obrotów spowodowanych przemieszczeniem, obracają się dodatkowo w sposób niezależny od pola przemieszczeń (ośrodek Cosseratów z niezwiązanymi obrotami cząstek). Podstawą naszych dalszych rozważań będzie właśnie praca [9]. W punkcie pierwszym przedstawimy podstawowe zależności omówione w pracy [9], w punkcie drugim uogólnimy postulat Druckera, w punkcie zaś trzecim zastanowimy się nad niektórymi możliwymi warunkami plastyczności i uplastycznieniem częściowym. W punkcie czwartym przedstawimy pewien wniosek wynikający z drugiej zasady termodynamiki. Punkt piąty jest poświęcony uogólnieniu nośności granicznej, a w punkcie szóstym uogólnimy zasadę wariacyjną przedstawioną w pracy [12] (por. [13, 14, 15]). Na koniec w punkcie siódmym uogólnimy twierdzenia Melana i Koitera [7].

1. Podstawowe zależności

W pracy stosujemy wyłącznie prostokątne kartezjańskie układy współrzędnych, a także konwencję sumacyjną odnoszącą się do takich układów.

Równania równowagi rozważanego przez nas ośrodka Cosseratów z niezwiązanymi obrotami cząstek mają postać [6], [9]

$$s_{ij,i}+X_j = 0, \tag{1.1}$$

$$m_{ij,i}+2\tau_j+Y_j = 0, \quad i,j = 1,2,3, \tag{1.2}$$

gdzie s_{ij} jest niesymetrycznym tensorem naprężeń, m_{ij} tensorem naprężeń momentowych; X_j, Y_j oznaczają odpowiednio siły masowe i momenty masowe (na jednostkę objętości). Ponadto

$$\tau_j = \frac{1}{2}\varepsilon_{jkl}\tau_{kl}, \quad k,l = 1,2,3, \tag{1.3}$$

$$s_{ij} = \sigma_{ij}+\tau_{ij}, \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ji}, \quad \tau_{ij} = -\tau_{ji}, \tag{1.4}$$

przy czym ε_{ijk} jest symbolem Ricciego.

Jednostkowa moc odkształceń i zginania-skręcania $\dot{A}$ ma postać

$$\dot{A} = \sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}+m_{ij}\dot{\varkappa}_{ij}+2\dot{\Omega}_i\tau_i, \tag{1.5}$$

gdzie

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}(\dot{u}_{j,i}+\dot{u}_{i,j}), \tag{1.6}$$

$$\dot{\varkappa}_{ij} = \dot{\omega}_{j,i}, \tag{1.7}$$

przy czym $\dot{u}_i$ i $\dot{\omega}_i$ są odpowiednio współrzędnymi wektora prędkości przemieszczeń i wektora prędkości obrotów własnych (cząstki). Wektor $(\dot{\omega}_i)$ jest niezależny od wektora prędkości obrotów ($\dot{\gamma}_j$); ten ostatni określony jest zależnością

$$\dot{\gamma}_j = \frac{1}{2}\varepsilon_{jkl}\dot{\gamma}_{kl}, \quad \dot{\gamma}_{kl} = \frac{1}{2}(\dot{u}_{l,k} - \dot{u}_{k,l}), \tag{1.8}$$

gdzie $\dot{\varepsilon}_{ij}$ jest tensorem prędkości odkształceń, $\dot{\varkappa}_{ij}$ tensorem prędkości zginania-skręcania, zaś $\dot{\gamma}_{ij}$ tensorem prędkości obrotów pola prędkości przemieszczeń $\dot{u}_i$. Względna prędkość obrotów $\dot{\Omega}_i$ wynosi

$$\dot{\Omega}_i = \dot{\gamma}_i - \omega_i. \tag{1.9}$$

SAWCZUK [16], KOLOKOLCZYKOW [25] i MIŞICU [11] przyjmują $\dot{\Omega}_i = 0$.

Zależność (1.5) wygodnie jest przedstawić w postaci

$$\dot{A} = Q_s\dot{q}_s = \mathbf{Q}\dot{\mathbf{q}}, \tag{1.10}$$

gdzie wektor $\mathbf{Q} = (Q_1, \ldots, Q_{18})$ utworzony jest z sześciu niezależnych współrzędnych tensora σ_{ij}, dziewięciu współrzędnych tensora m_{ij} i trzech współrzędnych τ_i; natomiast wektor $\dot{\mathbf{q}} = (\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_{18})$, zbudowany jest z $\dot{\varepsilon}_{ij}$ $(i = j)$ lub $2\dot{\varepsilon}_{ij}(i \neq j)$, $\dot{\varkappa}_{ij}$ i $2\dot{\Omega}_i$. Wektory $\mathbf{Q}$ i $\dot{\mathbf{q}}$ można również uważać za wektory sił uogólnionych (por. [20]) i uogólnionych prędkości odkształceń.

Przypomnimy obecnie podstawowe założenia teorii LIPPMANNA [9]. Ponieważ rozważa on sztywno-plastyczny ośrodek Cosseratów, więc $\dot{\mathbf{q}}^{(pl)} = \dot{\mathbf{q}}$.

Przyjmijmy postulat Lippmanna o n niezależnych warunkach plastyczności

$$f_p(\mathbf{Q}) = 0, \quad p = 1, \ldots, n, \tag{1.11}$$

przy czym n nie przekracza liczby współrzędnych wektora $\mathbf{Q}$ (tzn. 18). Zakładamy, że funkcje te są gładkie, tzn. w przestrzeni fizycznej o osiach współrzędnych Q_s w każdym punkcie powierzchni (ściśle hiperpowierzchni) f_p istnieje wektor normalny. Powierzchnie f_p mogą być w ogólności rozłączne. Funkcje f_p mogą zależeć również od historii obciążenia, temperatury, mocy dysypowanej $\dot{A}$ i prędkości $\dot{\mathbf{q}}$. LIPPMANN przyjmuje ponadto, że warunki (1.11) są równocześnie spełnione (uplastycznienie zupełne). Jeśli $f_p < 0$, to mamy stan sztywny, jeśli $f_p = 0$ — stan plastyczny. Stan $f_p > 0$ jest niemożliwy (przy nieuwzględnieniu efektu wzmocnienia).

Sprecyzujemy obecnie pojęcie obciążania i odciążania dla ośrodków Cosseratów (w pracy [9] tego nie zrobiono). Otóż dla idealnie plastycznego ośrodka Cosseratów (powierzchnie plastyczności nie zmieniają się w procesie odkształceń plastycznych) obciążanie określamy następująco:

$$f_p = 0, \quad \dot{f}_p = 0,$$

natomiast związki

$$f_p = 0, \quad \dot{f}_p < 0$$

definiują odciążanie.

Dla ośrodków Cosseratów ze wzmocnieniem (powierzchnie plastyczności mogą się zmieniać w procesie odkształceń plastycznych) obciążanie, stan neutralny i odciążanie dane są odpowiednio zależnościami:

$$f_p = 0, \quad \dot{f}_p > 0; \quad f_p = 0, \quad \dot{f}_p = 0; \quad f_p = 0, \quad \dot{f}_p < 0.$$

W celu otrzymania zależności pomiędzy $\mathbf{Q}$ i $\dot{\mathbf{q}}$ LIPPMANN [9] postuluje zasadę Sadowskiego-Phillipsa-Hilla, która mówi, że dla danego stanu prędkości $\dot{\mathbf{q}}$, siły $\mathbf{Q}$ są takie, że moc dysypowana osiąga extremum (ściśle maximum). Stąd wnioskujemy, że $\delta\dot{A} = 0$, przy czym dokonujemy wariacji $\mathbf{Q}$ o $\delta\mathbf{Q}$. Po prostych przekształceniach otrzymujemy związki

$$\dot{q}_s = \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial Q_s}, \quad \lambda_p \geqslant 0. \tag{1.12}$$

Z ostatniej zależności wnioskujemy, że wektor $\dot{\mathbf{q}}$ jest kombinacją liniową, o współczynnikach nieujemnych, gradientów $\frac{\partial f_p}{\partial \mathbf{Q}}$. LIPPMANN wykazał, iż przyjęcie prawa plastycznego płynięcia (1.12) i tylko jednego warunku plastyczności powoduje trudności przy przejściu do teorii klasycznej, tzn. gdy $m_{ij} \to 0$, $\tau_i \to 0$. Trudności te polegają na tym, iż otrzymany przez przejście $m_{ij} \to 0$, $\tau_i \to 0$ układ równań zawiera więcej równań niż niewiadomych, co powoduje, że nie posiada on na ogół rozwiązań.

2. Uogólnienie postulatu Druckera

W klasycznej teorii plastyczności (tzn. w teorii bez naprężeń momentowych) fundamentalną rolę odgrywa postulat Druckera (por. np. [1, 7, 20]). Ma on postać

$$(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*)\dot{\varepsilon}_{ij}^{(pl)} \geqslant 0, \tag{2.1}$$

gdzie σ_{ij} spełnia równanie powierzchni plastyczności, natomiast σ_{ij}^* jest naprężeniem dopuszczalnym, tzn. znajduje się wewnątrz lub na powierzchni plastyczności, $\dot{\varepsilon}_{ij}^{(pl)}$ jest częścią tensora prędkości odkształceń związaną z odkształceniami plastycznymi. Dla ciała sztywno-plastycznego $\dot{\varepsilon}_{ij}^{(pl)} = \dot{\varepsilon}_{ij}$. Wiadomo, że postulat Druckera jest równoważny wypukłości powierzchni plastyczności.

Postulat (2.1) można uogólnić na przypadek rozważanej przez nas teorii Lippmanna następująco:

$$(Q_s - Q_s^*)\tilde{\dot{q}}_{sp} \geqslant 0, \quad p = 1, \ldots, n, \tag{2.2}$$

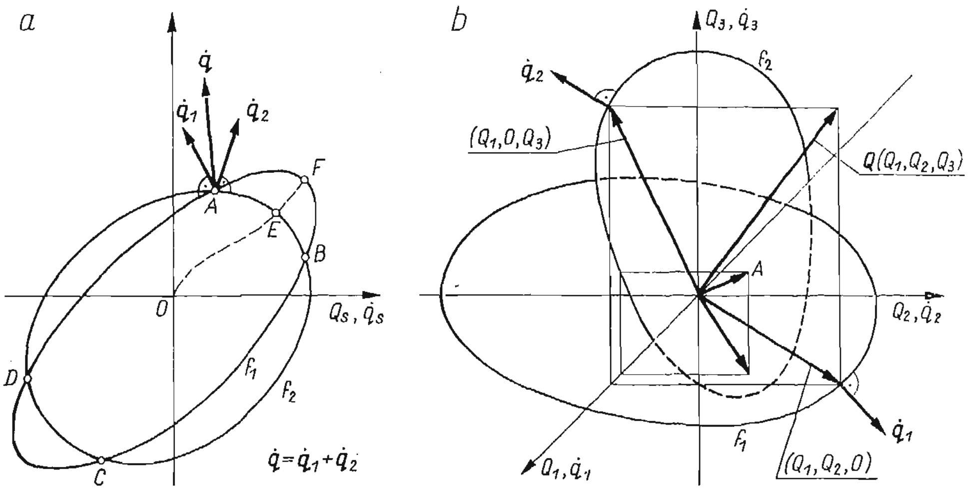
gdzie $\tilde{\dot{q}}_{sp} \overset{\mathrm{df}}{=} \lambda_{\underline{p}} \frac{\partial f_{\underline{p}}}{\partial Q_s}$ (po p nie sumować). Wektor $\mathbf{Q}^*(Q_s^*)$ nazwiemy naprężeniami dopuszczalnymi. Jest to wektor, który w fizycznej przestrzeni naprężeń znajduje się wewnątrz (lub na) wszystkich powierzchni f_p. Z zależności (2.2) wnioskujemy, że każda z powierzchni f_p jest wypukła, tzn. obszar ograniczony przez każdą z tych powierzchni jest wypukły. Sumując w (2.2) po „p" mamy

$$\sum_p (Q_s - Q_s^*)\tilde{\dot{q}}_{sp} = (Q_s - Q_s^*)\dot{q}_s \geqslant 0. \tag{2.3}$$

Tak więc związek (2.3) jest formalnie podobny do klasycznego postulatu Druckera.

3. Niektóre możliwe warunki plastyczności. Uplastycznienie częściowe

Przyjęcie n niezależnych warunków plastyczności, które mają być równocześnie spełnione, jest dużym ograniczeniem na możliwe drogi obciążeń.



$$\dot{q} = \dot{q}_1 + \dot{q}_2 = \left(\lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial Q_1} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial Q_1},\ \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial Q_2},\ \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial Q_3}\right)$$

Rys. 1

Rozpatrzmy przypadek $n = 2$. Na rys. 1a przedstawiono dwie powierzchnie f_1, f_2 przecinające się w punktach A, B, C, D. Ponieważ założyliśmy, że warunki plastyczności mają być równocześnie spełnione, oznaczałoby to, że teoria opisuje tylko stany uplastycznienia odpowiadające tym czterem punktom. Jeśli natomiast wektor $\mathbf{Q}$ odpowiada punktowi E, to będziemy mieć tzw. uplastycznienie częściowe: $f_2 = 0, f_1 < 0$. Podobnie sprawa wygląda z przypadkiem przedstawionym na rys. 1b. W tym przypadku teoria Lippmanna opisuje tylko takie stany uplastycznienia, dla których

$$f_1(Q_1, Q_2) = 0 \quad \text{i} \quad f_2(Q_1, Q_3) = 0.$$

Jeśli wektor naprężeń $\mathbf{Q}(Q_1, Q_2, Q_3)$ odpowiada na przykład punktowi A (rys. 1b), to wówczas stanu takiego nie można opisać teorią Lippmanna.

Rozpatrzmy pewne możliwe (teoretycznie) sposoby włączenia do teorii Lippmanna stanów częściowego uplastycznienia. Niech wektor $\mathbf{Q}$ odpowiada punktowi E (rys. 1a). Powstaje pytanie, co się będzie działo na drodze EF przy obciążaniu. Można sobie wyobrazić następujące odpowiedzi na tak postawione pytanie:

1° Powierzchnia f_2 doznaje wzmocnienia izotropowego, przesuwa się i obraca. Włączamy tutaj również obroty, gdyż badania eksperymentalne na gruncie teorii klasycznej (por. [18], [21]) wykazały, iż w niektórych przypadkach powierzchnia plastyczności może się obracać. Kiedy punkty E i F pokryją się wówczas mamy sytuację podobną do stanu A (rys. 1a).

2° Oznaczmy wektor naprężeń odpowiadający punktowi E przez $\bar{\mathbf{Q}}(\bar{Q}_s)$. Wówczas $\bar{\dot{q}}_s = \lambda_1 \left.\frac{\partial f_1}{\partial Q_s}\right|_{Q_s = \bar{Q}_s}$. Zakładamy, że na drodze EF wektor $\dot{\mathbf{q}}$ nie doznaje przyrostów. Natomiast w punkcie F

$$\tilde{\dot{q}}_s = \lambda_2 \left.\frac{\partial f_2}{\partial Q_s}\right|_{Q_s = \tilde{Q}_s},$$

gdzie $\tilde{\mathbf{Q}}(\tilde{Q}_s)$ jest wektorem naprężenia odpowiadającym punktowi F. Całkowita prędkość odkształceń $\dot{q}_s$ wyniesie

$$\dot{q}_s = \bar{\dot{q}}_s + \tilde{\dot{q}}_s = \lambda_1 \left.\frac{\partial f_1}{\partial Q_s}\right|_{Q_s = \bar{Q}_s} + \lambda_2 \left.\frac{\partial f_2}{\partial Q_s}\right|_{Q_s = \tilde{Q}_s}. \tag{3.1}$$

SAYIR [17] rozważa warunek plastyczności (w teorii klasycznej) w postaci wielomianowej

$$\Phi = K_0 + K_{ij}\sigma_{ij} + K_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl} + K_{ijklmn}\sigma_{ij}\sigma_{kl}\sigma_{mn} + \ldots,$$

gdzie współczynniki $K_0, K_{ij}, K_{ijkl}, \ldots$ są tensorami stałych materiałowych. Ich charakter tensorowy wynika z zasady obiektywności materiału tzn. niezależności równania konstytutywnego od układu odniesienia. W teorii plastyczności zasada ta oznacza niezależność warunku plastyczności od układu współrzędnych, stanowiących układ odniesienia. W naszym przypadku można by przyjąć trzy następujące warunki plastyczności:

$$f_1 = K_0 + K_{ij}s_{ij} + K_{ijkl}s_{ij}s_{kl} + \ldots, \tag{3.2}$$

$$f_2 = L_0 + L_{ij}m_{ij} + L_{ijkl}m_{ij}m_{kl} + \ldots, \tag{3.3}$$

$$f_3 = M_0 + M_{ijkl}s_{ij}m_{kl} + \bar{M}_{ijkl}s_{kl}m_{ij} + M_{ijklmn}s_{ij}s_{kl}m_{nm} + \ldots. \tag{3.4}$$

Nie będziemy dalej szczegółowo rozpatrywać związków (3.2)–(3.4), gdyż ze względu na brak danych doświadczalnych przyjęcie takiego czy innego warunku plastyczności — w teorii z naprężeniami momentowymi — jest, jak na razie, sprawą czysto formalną.

LIPPMANN [9] uogólnił warunek plastyczności Hubera–Misesa i warunek Treski na przypadek ośrodka Cosseratów.

4. Wnioski wynikające z pierwszej i drugiej zasady termodynamiki

ZIEGLER [23] wykazał, że w klasycznej teorii plastyczności warunek

$$\sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}^{(pl)} \geqslant 0 \tag{4.1}$$

wynika z drugiej zasady termodynamiki. Rozpatrzmy ośrodek sztywno-plastyczny. Przedstawiamy energię swobodną f, przypadającą na jednostkę masy, w postaci

$$\varrho f = \varrho f_0 - \varrho s_0(\vartheta - \vartheta_0) - \frac{\varrho c}{2\vartheta_0}(\vartheta - \vartheta_0)^2, \tag{4.2}$$

gdzie f_0 odnosi się do stanu początkowego $\vartheta = \vartheta_0$, ϑ jest temperaturą bezwzględną, natomiast s_0 przedstawia wartość entropii na jednostkę masy w stanie ϑ_0, ϱ jest stałą gęstością (w teorii małych odkształceń).

Ponadto

$$c = \left.\frac{\partial u}{\partial \vartheta}\right|_{\vartheta = \vartheta_0},$$

przy czym

(4.3) $$\varrho u = \varrho(f+\vartheta s),$$

gdzie

(4.4) $$\varrho s = -\varrho \frac{\partial f}{\partial \vartheta} = \varrho s_0 + \frac{\varrho c}{\vartheta}(\vartheta - \vartheta_0).$$

Zależność (4.4) przedstawia entropię na jednostkę objętości.

Z pierwszej zasady termodynamiki — dla przedziału czasu dt — otrzymujemy (por. [2], [26])

(4.5) $$\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} - h_{k,k} dt = \varrho du = \varrho c \frac{\vartheta}{\vartheta_0} d\vartheta,$$

gdzie h_k jest wektorem strumienia ciepła.

Z (4.4) i (4.5) otrzymujemy następujący wzór na przyrost entropii w czasie dt

(4.6) $$\varrho ds = \frac{\varrho c}{\vartheta_0} d\vartheta = \frac{\varrho du}{\vartheta} = \frac{1}{\vartheta}\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} - \frac{h_{k,k}}{\vartheta} dt.$$

Przekształćmy ostatnią zależność do postaci

(4.7) $$\varrho ds = \frac{1}{\vartheta}\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} + \left[-\frac{h_k}{\vartheta^2}\vartheta_{,k} - \left(\frac{h_k}{\vartheta}\right)_{,k}\right] dt.$$

Druga zasada termodynamiki (por. [2], [26]) mówi, że

(4.8) $$\varrho ds \geqslant 0.$$

Ograniczając się do procesów adiabatycznych ($h_k = 0$) lub izotermicznych ($\vartheta_{,k} = 0$), z (4.7) i (4.8) otrzymujemy (4.1). Oznacza to, że powierzchnia plastyczności, dla materiału sztywno-plastycznego ze wzmocnieniem, nie może przesuwać się nieograniczenie, lecz musi zawierać początek układu odpowiadający stanowi beznaprężeniowemu. Fakt ten został przez Zieglera [23] udowodniony również dla materiałów sprężysto-plastycznych ze wzmocnieniem.

Nierówność (4.1) łatwo uogólnić na przypadek teorii Lippmanna. Jak wiemy, w tym przypadku moc dysypowana dana jest wzorem (1.5), więc zależność (4.7) przyjmuje postać

$$\varrho ds = \frac{1}{\vartheta}(\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} + m_{ij} d\varkappa_{ij} + 2\tau_i d\Omega_i) + \left[-\frac{h_k}{\vartheta^2}\vartheta_{,k} - \left(\frac{h_k}{\vartheta}\right)_{,k}\right] dt.$$

Rozważając, podobnie jak w teorii klasycznej, tylko procesy izotermiczne lub adiabatyczne mamy

(4.9) $$\sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} + m_{ij}\dot{\varkappa}_{ij} + 2\dot{\Omega}_i \tau_i \geqslant 0.$$

Korzystając z poprzednio wprowadzonych oznaczeń, związek (4.9) zapiszemy krótko w następującej postaci:

$$\mathbf{Q}\dot{\mathbf{q}} = Q_s \dot{q}_s = \sum_p Q_s \dot{\tilde{q}}_{sp} \geqslant 0. \tag{4.10}$$

Jeśli więc przyjmiemy, że powierzchnie f_p mogą przesuwać się (ośrodek Cosseratów z wzmocnieniem), to uwzględniając (4.10) i niezależność warunków plastyczności wnioskujemy, że muszą one zawierać początek układu współrzędnych przestrzeni fizycznej.

Uwaga 4.1. VALANIS [22] wykazał również na drodze termodynamicznej, że powierzchnia plastyczności (w teorii klasycznej) musi zawierać początek układu. Niemniej jednak wydaje się, iż dowód ZIEGLERA [23] jest bardziej interesujący, gdyż VALANIS [22] korzysta z postulatu Druckera (2.1), zaś ZIEGLER nie.

5. Nośność graniczna dla ośrodka Cosseratów

Niech rozpatrywany przez nas sztywno-plastyczny ośrodek Cosseratów o objętości V będzie ograniczony powierzchnią S. Załóżmy, że w każdym punkcie tej powierzchni istnieje zewnętrzny, jednostkowy wektor normalny o współrzędnych n_i i niech S_{u^n}, S_{u^t}, S_{T^n}, S_{T^t}, S_{ω^n}, S_{ω^t}, S_{M^n}, $S_{M^t} \subset S$, przy czym zachodzą następujące rozłączne rozkłady:

$$S = S_{u^n} \cup S_{T^n} = S_{u^t} \cup S_{T^t} = S_{\omega^n} \cup S_{M^n} = S_{\omega^t} \cup S_{M^t}. \tag{5.1}$$

Przyjmijmy następujące warunki brzegowe [6]:

$$\dot{u}^n = \dot{u}_0^n \quad \text{na} \quad S_{u^n}, \tag{5.2a}$$

$$\dot{u}_i^t = \dot{u}_{0i}^t \quad \text{na} \quad S_{u^t}, \tag{5.2b}$$

$$\dot{\omega}^n = \dot{\omega}_0^n \quad \text{na} \quad S_{\omega^n}, \tag{5.2c}$$

$$\dot{\omega}_i^t = \dot{\omega}_{0i}^t \quad \text{na} \quad S_{\omega^t}, \tag{5.2d}$$

$$T^n = \overline{T}^n \quad \text{na} \quad S_{T^n}, \tag{5.3a}$$

$$T_i^t = \overline{T}_i^t \quad \text{na} \quad S_{T^t}, \tag{5.3b}$$

$$M^n = \overline{M}^n \quad \text{na} \quad S_{M^n}, \tag{5.3c}$$

$$M_i^t = \overline{M}_i^t \quad \text{na} \quad S_{M^t}, \tag{5.3d}$$

przy czym wskaźniki n lub t oznaczają odpowiednio składową normalną lub styczną wektora, tzn.

$$\dot{u}_o^n = \dot{u}_{oj}^n n_j, \quad \dot{u}_{oi}^t = \dot{u}_{0i} - \dot{u}_{0j} n_j n_i, \quad \dot{u}^n = \dot{u}_j n_j, \quad \dot{u}_i^t = \dot{u}_i - \dot{u}_j n_j n_i,$$
$$T^n = s_{jk} n_j n_k, \quad T_i^t = s_{ji} n_j - s_{jk} n_j n_k n_i, \quad s_{jk} = \sigma_{jk} + \tau_{jk},$$

i podobnie dla $\dot{\omega}_i$, m_{ij}.

Łatwo udowodnić, że

$$\dot{A} = \sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} + m_{ij}\dot{\varkappa}_{ij} + 2\dot{\Omega}_i \tau_i = s_{ij}(\dot{u}_{j,i} - \varepsilon_{ijk}\dot{\omega}_k) + m_{ij}\dot{\varkappa}_{ij}. \tag{5.4}$$

Przez wektor $\mathbf{Q}$ można więc rozumieć wektor odpowiadający tensorom s_{ij}, m_{ij}, zaś przez $\dot{\mathbf{q}}$ wektor odpowiadający tensorom $\dot{\lambda}_{ij} = \dot{u}_{j,i} - \varepsilon_{ijk}\dot{\omega}_k$ i $\dot{\varkappa}_{ij}$.

Zasada mocy przygotowanych dla ośrodka Cosseratów z niezwiązanymi obrotami cząstek ma postać [6]

$$(5.5)\qquad \int_V [s_{ij}(\dot{u}_{j,i}-\varepsilon_{ljk}\dot{\omega}_k)+m_{ij}\dot{\varkappa}_{ij}]dV = \int_V (X_i\dot{u}_i+Y_i\dot{\omega}_i)dV+\int_{S_{Tn}} \overline{T}^n\dot{u}^n dS+\int_{S_{Tt}} \overline{T}_i^t\dot{u}_i^t dS+$$

$$+\int_{S_{Mn}} \overline{M}^n\dot{\omega}^n dS+\int_{S_{Mt}} \overline{M}_i^t\dot{\omega}_i^t dS+\int_{S_{un}} T^n\dot{u}_0^n dS+\int_{S_{ut}} T_i^t\dot{u}_{0i}^t dS+\int_{S_{\omega n}} M^n\dot{\omega}_0^n dS+\int_{S_{\omega t}} M_i^t\dot{\omega}_{0i}^t dS,$$

(po n i t nie sumować).

Uogólnimy obecnie znane — z klasycznej teorii nośności granicznej (por. [7, 20, 24]) pojęcia statycznie dopuszczalnego pola naprężeń i kinematycznie dopuszczalnego pola prędkości przemieszczeń.

Przez statycznie dopuszczalne pole naprężeń $\mathbf{Q}^\circ$ rozumieć będziemy pola naprężeń s_{ij}^0 i naprężeń momentowych m_{ij}^0 spełniające następujące warunki:

1° spełnione są warunki równowagi

$$s_{jl,j}^0+X_l = 0,\qquad m_{jl,j}^0+2\tau_l^0+Y_l = m_{jl,j}^0+\varepsilon_{lij}s_{ij}^0+Y_l = 0,$$

i warunki brzegowe (5.3a)–(5.3d);

2° $f_p(\mathbf{Q}^\circ) \leqslant 0,\ p = 1, \ldots, n.$

Mówimy, że zbiór $\{\dot{\mathbf{U}}^*\} = \{\dot{u}_i^*, \dot{\omega}_i^*\}$ stanowi kinematycznie dopuszczalne pole prędkości przemieszczeń $\dot{u}_i^*$ i mikroobrotów $\dot{\omega}_i^*$ jeśli:

I. Pole to spełnia kinematyczne warunki brzegowe (5.2a)–(5.2d).

II. Można z niego otrzymać pole $\dot{\mathbf{q}}^*$, tzn. pole prędkości odkształceń $\dot{\lambda}_{ij}^*$ i pole $\dot{\varkappa}_{ij}^*$ (lub $\dot{\varepsilon}_{ij}^*, \dot{\varkappa}_{ij}^*, \dot{\Omega}_i^*$).

III. Określona prawą stroną wzoru (5.5) moc obciążeń zewnętrznych — oznaczmy ją przez $\dot{L}$ — jest dodatnia, tzn. $\dot{L} > 0$.

Dla prostoty rozważań rozpatrzmy szczególny przypadek, gdy

$$S_{un} = S_{ut} = S_{\omega n} = S_{\omega t} = S_u,\qquad S_{Tn} = S_{Tt} = S_{Mn} = S_{Mt} = S_T.$$

Wówczas warunki brzegowe (5.2a)–(5.2d), (5.3a)–(5.3d) przyjmują odpowiednio postać

$$(5.6)\qquad \dot{u}_i = \dot{u}_{0i},\qquad \dot{\omega}_i = \dot{\omega}_{0i}\ \text{na}\ S_u,$$

$$(5.7)\qquad \overline{T}_i = s_{ji}n_j,\qquad \overline{M}_i = m_{ji}n_j\ \text{na}\ S_T.$$

Załóżmy ponadto, że $\dot{u}_{0i} = \dot{\omega}_{0i} = 0$. Uwzględniając (1.10), (5.4), (5.6) i (5.7) w (5.5) otrzymujemy

$$(5.8)\qquad \int_V Q_s\dot{q}_s dV = \int_V (X_i\dot{u}_i+Y_i\dot{\omega}_i)dV+\int_{S_T} \overline{T}_i\dot{u}_i dS+\int_{S_T} \overline{M}_i\dot{\omega}_i dS.$$

Weźmy pod uwagę obciążenie jednoparametrowe, tzn. obciążenie dane zależnościami (por. [25])

$$(5.9)\qquad X_i = \mu X_i^0(x_j),\qquad Y_i = \mu Y_i^0(x_j),\qquad \overline{T}_i = \mu T_i^0(x_j),\qquad \overline{M}_i = \mu M_i^0(x_j),$$

gdzie $\mu > 0$ jest parametrem obciążenia.

Można również wprowadzić pojęcie statycznie dopuszczalnego μ_s i kinematycznie dopuszczalnego μ_k mnożników obciążenia. Zdefiniujemy je podobnie jak w teorii klasycznej (por. [7, 20, 24]). I tak, jeśli dla obciążenia μX_i^0, μY_i^0, μT_i^0, μM_i^0 można wyznaczyć jakiekolwiek pole Q_s^0, to odpowiadające temu μ nazwiemy statycznie dopuszczalnym mnożnikiem obciążenia μ_s. Kinematycznie dopuszczalny mnożnik μ_k określony jest następująco:

$$\mu_k^{dt} = \frac{\int\limits_V Q_s^* \dot{q}_s^* dS}{\int\limits_V (X_i^0 \dot{u}_i^* + Y_i \dot{\omega}_i^*) dV + \int\limits_{S_T} (T_i^0 \dot{u}_i^* + M_i^0 \dot{\omega}_i^*) dS}. \tag{5.10}$$

Z postulatu III wynika, że mianownik we wzorze (5.10) jest dodatni.

Przez rozwiązanie zupełne rozumiemy takie rozwiązanie, które spełnia zarówno wymagania strony statycznej, jak i kinematycznej (por. [20]). Odnoszący się do rozwiązania zupełnego mnożnik obciążenia oznaczmy symbolem μ_G. Łatwo udowodnić, że

$$\mu_s \leqslant \mu_G \leqslant \mu_k. \tag{5.11}$$

Dowód przebiega jak w przypadku klasycznym.

Uwaga 5.1. Ponieważ zasadę mocy wirtualnych (5.5) można uogólnić na przypadek nieciągłych pól naprężeń s_{ij} i naprężeń momentowych m_{ij} [6], zależność (5.11) pozostaje słuszna i dla takiego przypadku.

Uwaga 5.2. Rozpatrzmy zagadnienie nieciągłości pól prędkości przemieszczeń $\dot{u}_i$ i prędkości mikroobrotów $\dot{\omega}_i$ Oznaczmy przez S_{hk} powierzchnie nieciągłości prędkości przemieszczeń między obszarami R_h, R_k rozpatrywanego ośrodka, zaś przez M_{lm} powierzchnie nieciągłości pola mikroobrotów $\dot{\omega}_i$ pomiędzy obszarami Z_l, Z_m. Niech ponadto pole $\dot{u}_i$ jest nieciągłe w kierunku stycznym do powierzchni S_{hk}, natomiast pole $\dot{\omega}_i$ w kierunku normalnym do M_{lm}. Wówczas moc dysypowana na powierzchniach nieciągłości ma postać (por. [24], [14])

$$\overline{D} = \Sigma \int\limits_{S_{hk}} T^{(hk)} [\dot{u}_T^{(h)} - \dot{u}_T^{(k)}] dS + \Sigma \int\limits_{M_{lm}} M^{(lm)} [\dot{\omega}_N^{(l)} - \dot{\omega}_N^{(m)}] dS, \tag{5.12}$$

gdzie $T^{(hk)}$ oznacza naprężenie styczne przekazywane przez element powierzchni dS z obszaru R_k do R_h; $\dot{u}_T^{(h)}$, $\dot{u}_T^{(k)}$ są składowymi stycznymi prędkości przemieszczeń odpowiednio w obszarach R_h, R_k, natomiast $M^{(lm)}$ oznacza normalne do powierzchni M_{lm} naprężenie momentowe przekazywane przez element powierzchni dS z obszaru Z_l do Z_m; $\dot{\omega}_N^{(l)}$, $\dot{\omega}_N^{(m)}$ są składowymi normalnymi prędkości mikroobrotów w obszarach Z_l, Z_m.

Naprężenie styczne $T^{(hk)}$, związane z naprężeniami s_{ij} na powierzchni S_{hk}, wynosi (por. [9] rys. 2).

$$T^{(hk)} = \sqrt{\sum_l (s_{jl} n_j)^2 - (s_{jk} n_j n_k)^2}, \tag{5.13}$$

natomiast momentowe naprężenie normalne $M^{(lm)}$, związane z naprężeniami momentowymi m_{ij} na powierzchni M_{lm}, dane jest wzorem

$$M^{(lm)} = m_{jk} n_j n_k, \tag{5.14}$$

przy czym w (5.13) wektor jednostkowy n_j jest wektorem normalnym do powierzchni S_{hk}, natomiast w (5.14) — do M_{lm}.

Całkowita moc dysypowana D wynosi

$$D = \int_V \dot{A}\, dV + \bar{\bar{D}}. \tag{5.15}$$

Jeśli w (5.10) uwzględnimy moc $\bar{D}$, dysypowaną na powierzchniach nieciągłości, to związek (5.11) pozostaje słuszny.

6. Uogólnienie zasady wariacyjnej T. Mury i S. Lee

W pracach [12], [14] MURA i LEE podali zasadę wariacyjną przydatną w nośności granicznej. Zasadę tę będziemy krótko oznaczać symbolem ML. W pracy [13] autorzy ci stosują zasadę ML do analizy granicznej ortotropowej płyty kołowej swobodnie podpartej i poddanej obciążeniu rozłożonemu. SACCHI i SAVE [15] stosując zasadę ML, rozważyli statyczne i kinematyczne podejście dla trójwymiarowego kontinuum.

Obecnie naszym celem będzie uogólnienie zasady ML na ośrodki Cosseratów.

Rozważmy funkcjonał

$$F(s_{ij}, m_{ij}, \dot{u}_i, \dot{\omega}_i, R_i, M_i^R, \mu, \varphi_p) = \int_V s_{ij}(\dot{u}_{j,i} - \varepsilon_{ijk}\dot{\omega}_k)dV + \int_V m_{ij}\dot{\omega}_{j,i}dV -$$
$$- \int_{S_u} R_i \dot{u}_i dS - \int_{S_u} M_i^R \dot{\omega}_i dS - \mu\Big[\int_{S_T} (T_i^0 \dot{u}_i + M_i^0 \dot{\omega}_i)dS - 1\Big] - \int_V \lambda_p [f_p(s_{ij}, m_{ij}) + \varphi_p^2] dV. \tag{6.1}$$

Z zasady stacjonarności funkcjonału F dla dowolnych wariacji jego argumentów — przy dodatkowym warunku $\lambda_p \geqslant 0$, $p = 1, \ldots, n$ — otrzymujemy

$$\delta F = \int_V \delta s_{ij}(\dot{u}_{j,i} - \varepsilon_{ijk}\dot{\omega}_k)dV + \int_V s_{ij}(\delta\dot{u}_{j,i} - \varepsilon_{ijk}\delta\dot{\omega}_k)dV + \int_V \delta m_{ij}\dot{\omega}_{j,i}dV +$$
$$+ \int_V m_{ij}\delta\dot{\omega}_{j,i}dV - \int_{S_u} \delta R_i \dot{u}_i dS - \int_{S_u} R_i \delta\dot{u}_i dS - \int_{S_u} \delta M_i^R \dot{\omega}_i dS - \int_{S_u} M_i^R \delta\dot{\omega}_i dS -$$
$$- \delta\mu\Big[\int_{S_T} (T_i^0 \dot{u}_i + M_i^0 \dot{\omega}_i)dS - 1\Big] - \mu \int_{S_T} (T_i^0 \delta\dot{u}_i + M_i^0 \delta\dot{\omega}_i)dS - \int_V \delta\lambda_p [f_p(s_{ij}, m_{ij}) + \varphi_p^2) dV -$$
$$- \int_V \lambda_p \left(\frac{\partial f_p}{\partial s_{ij}}\delta s_{ij} + \frac{\partial f_p}{\partial m_{ij}}\delta m_{ij}\right) dV - \int_V 2 \sum_p \lambda_p \varphi_p \delta\varphi_p \, dV = 0. \tag{6.2}$$

Ponieważ spełnione są związki

$$\int_V s_{ij}\delta\dot{u}_{j,i}dV - \int_V s_{ij}\varepsilon_{ijk}\delta\dot{\omega}_k dV = \int_V (s_{ij}\delta\dot{u}_j)_{,i} - \int_V s_{ij,i}\delta\dot{u}_j dV - \int_V s_{ij}\varepsilon_{ijk}\delta\dot{\omega}_k dV =$$
$$= \int_V s_{ij}\delta\dot{u}_j n_i dS - \int_V s_{ij,i}\delta\dot{u}_j dV - \int_V s_{ij}\varepsilon_{ijk}\delta\dot{\omega}_k dV, \tag{6.3}$$

$$\int_V m_{ij}\delta\dot{\omega}_{j,i}dV = \int_V m_{ij}\delta\dot{\omega}_j n_i dS - \int_V m_{ij,i}\delta\dot{\omega}_j dV, \tag{6.4}$$

więc z (6.2), po uwzględnieniu (6.3), (6.4) i z dowolności wariacji otrzymujemy

$$\left.\begin{aligned} s_{ij,i} &= 0 \\ m_{ij,i}+\varepsilon_{ijk}s_{jk} &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ w } V, \tag{6.5, 6.6}$$

$$R_i = s_{ij}n_i \quad \text{na } S_u, \tag{6.7}$$

$$\mu T_i^0 = s_{ij}n_i \quad \text{na } S_T, \tag{6.8}$$

$$M_i^R = m_{ij}n_i \quad \text{na } S_u, \tag{6.9}$$

$$\mu M_i^0 = m_{ij}n_i \quad \text{na } S_T, \tag{6.10}$$

$$\dot{u}_i = 0 \quad \text{na } S_u, \tag{6.11}$$

$$\dot{\omega}_i = 0 \quad \text{na } S_u, \tag{6.12}$$

$$\left.\begin{aligned} \dot{u}_{j,i}-\varepsilon_{ijk}\dot{\omega}_k &= \lambda_p\frac{\partial f_p}{\partial s_{ij}} \\ \dot{\omega}_{j,i} &= \lambda_p\frac{\partial f_p}{\partial m_{ij}} \end{aligned}\right\} \text{ w } V, \tag{6.13, 6.14}$$

$$\int\limits_{S_T}(T_i^0\dot{u}_i+M_i^0\dot{\omega}_i)dS = 1 \quad \text{na } S_T, \tag{6.15}$$

$$f_p(s_{ij}, m_{ij})+\varphi_p^2 = 0, \quad p = 1, \dots, n, \text{ w } V \tag{6.16}$$

$$\lambda_p\varphi_p = 0 \quad \text{w } V. \tag{6.17}$$

Podobnie, jak uczyniono to w pracy [15], można wykazać, że $F_G = \mu_G$, gdzie F_G jest wartością funkcjonału F odpowiadającą zależnościom (6.5)–(6.17).

7. Twierdzenia Melana i Koitera o dostosowywaniu, uogólnione na przypadek ośrodków Cosseratów

W dotychczasowych naszych rozważaniach przyjmowaliśmy model sztywno-plastyczny. Aby mówić o zagadnieniach dostosowywania, należy rozpatrywać ośrodek sprężysto-plastyczny [7].

Przez sprężysto-plastyczny ośrodek Cosseratów z niezwiązanymi obrotami cząstek będziemy rozumieć taki ośrodek Cosseratów, dla którego całkowite odkształcenia λ_{ij} i całkowite zginanie–skręcanie $\varkappa_{ij}$ są dane zależnościami

$$\lambda_{ij} = \lambda_{ij}^{(e)}+\lambda_{ij}^{(p)}, \tag{7.1}$$

$$\varkappa_{ij} = \varkappa_{ij}^{(e)}+\varkappa_{ij}^{(p)}, \tag{7.2}$$

gdzie części sprężyste $\lambda_{ij}^{(e)}$, $\varkappa_{ij}^{(e)}$ są dane wzorami [6]

$$\lambda_{ij}^{(e)} = P_{ijkl}s_{kl}+Q_{ijkl}m_{kl}, \quad P_{ijkl} = P_{klij}, \tag{7.3}$$

$$\varkappa_{ij}^{(e)} = Q_{klij}s_{kl}+S_{ijkl}m_{kl}, \quad S_{ijkl} = S_{klij}, \tag{7.4}$$

przy czym tensory P_{ijkl}, Q_{ijkl} S_{ijkl} są stałymi materiałowymi.

Uogólnimy obecnie pojęcie naprężeń resztkowych. Mianowicie rzeczywiste naprężenia

s_{ij} i rzeczywiste naprężenia momentowe m_{ij} można zapisać w postaci

$$s_{ij} = s_{ij}^{(e)} + \varrho_{ij}, \tag{7.5}$$

$$m_{ij} = m_{ij}^{(e)} + \varphi_{ij}, \tag{7.6}$$

gdzie $s_{ij}^{(e)}$, $m_{ij}^{(e)}$ oznaczają odpowiednio naprężenia i naprężenia momentowe w doskonale sprężystym ośrodku Cosseratów, poddanym tym samym obciążeniom i warunkom brzegowym, zaś ϱ_{ij}, φ_{ij} oznaczają odpowiednio naprężenia resztkowe i resztkowe naprężenia momentowe. Resztkowe naprężenia i resztkowe naprężenia momentowe definiujemy jako stałe naprężenia, pozostające w ośrodku po odciążeniu, tzn. usunięciu zewnętrznych obciążeń i powrocie przemieszczeń i obrotów na S_u do zera, przy czym odciążanie to zachodzi bez plastycznych odkształceń i bez plastycznego zginania–skręcania. Przyjmujemy, że odciążanie opisywane jest zależnościami (7.3), (7.4). Resztkowe naprężenia i resztkowe naprężenia momentowe spełnianiają równania równowagi (1.1), (1.2), (5.7), gdzie $X_i = Y_i = T_i = M_i = 0$.

Przez doskonale sprężysty ośrodek Cosseratów będziemy rozumieć ośrodek, dla którego równania konstytutywne mają postać (7.3), (7.4).

Dla prostoty przyjmujemy, że na S_u: $u_i = \omega_i = 0$. Niech ośrodek będzie poddany pewnemu programowi obciążenia, tzn. T_i, M_i, X_i, Y_i są funkcjami czasu i zmieniają się w pewnych przedziałach w sposób na ogół dowolny, ale quasi-statyczny (por. [19]). Oznaczmy przez $s_{ij}(t)$, $\lambda_{ij}^{(e)}(t)$, $\lambda_{ij}^{(p)}(t)$ odpowiednio rzeczywiste wartości naprężeń, odkształceń sprężystych i odkształceń plastycznych, natomiast przez $m_{ij}(t)$, $\varkappa_{ij}^{(e)}(t)$, $\varkappa_{ij}^{(p)}(t)$ odpowiednio rzeczywiste naprężenia momentowe, sprężyste zginanie–skręcanie i plastyczne zginanie–skręcanie.

Rozważmy idealnie sprężysty ośrodek Cosseratów poddany tym samym obciążeniom i warunkom brzegowym, co ośrodek sprężysto-plastyczny. Niech $s_{ij}^{(e)}(t)$, $m_{ij}^{(e)}(t)$ oznaczają odpowiednio naprężenia i naprężenia momentowe w ośrodku idealnym, a odpowiadające im odkształcenia i tensor zginania–skręcania oznaczmy odpowiednio przez $\lambda_{ij}^{(s)}(t)$, $\varkappa_{ij}^{(s)}(t)$. Resztkowe naprężenia oznaczmy przez $\varrho_{ij}(t)$, resztkowe zaś naprężenia momentowe przez $\varphi_{ij}(t)$. Wstawiając do (7.3), (7.4) ϱ_{ij} zamiast s_{ij} oraz φ_{ij} zamiast m_{ij} otrzymujemy sprężyste odkształcenia $\lambda_{ij(r)}^{(e)}(t)$ i sprężyste zginanie–skręcanie $\varkappa_{ij(r)}^{(e)}(t)$. Spełnione są oczywiście związki

$$\lambda_{ij} = \lambda_{ij}^{(e)} + \lambda_{ij}^{(p)} = \lambda_{ij}^{(s)} + \lambda_{ij(r)}^{(e)} + \lambda_{ij}^{(p)}, \tag{7.7}$$

$$\varkappa_{ij} = \varkappa_{ij}^{(e)} + \varkappa_{ij}^{(p)} = \chi_{ij}^{(s)} + \varkappa_{ij(r)}^{(e)} + \varkappa_{ij}^{(p)}, \tag{7.8}$$

$$s_{ij} = s_{ij}^{(e)} + \varrho_{ij}, \tag{7.9}$$

$$m_{ij} = m_{ij}^{(e)} + \varphi_{ij}. \tag{7.10}$$

Pozostajemy na gruncie rozważań quasi-statycznych, występujące więc w (7.7)–(7.10) funkcje zmieniają się «powoli» wraz ze zmianą czasu t.

Dopuszczalny cykl prędkości odkształceń plastycznych $\dot{\lambda}_{ij0}^{(p)}(t)$ definiujemy w ten sposób, że całka

$$\Delta \lambda_{ij0}^{(p)} = \int_0^T \dot{\lambda}_{ij0}^{(p)} dt, \tag{7.11}$$

przedstawiająca przyrost odkształceń plastycznych za cykl określony czasem T, stanowi kinematycznie dopuszczalne pole odkształceń, tzn. odkształcenie (7.11) można otrzymać wiedząc, że $\lambda_{ij} = u_{j,i} - \varepsilon_{ijk}\omega_k$ (por. punkt 5), z odpowiednich pól przemieszczeń i mikroobrotów, które z kolei znikają na S_u.

Tensor odkształceń λ_{ij} zależy od pola przemieszczeń u_i i pola mikroobrotów ω_i. Musimy więc wprowadzić pojęcie dopuszczalnego cyklu prędkości plastycznego zginania–skręcania $\dot{\varkappa}^{(p)}_{ij0}$. Dopuszczalny cykl prędkości plastycznego zginania–skręcania $\dot{\varkappa}^{(p)}_{ij0}$ określamy w ten sposób, że przyrost

$$\Delta\varkappa^{(p)}_{ij0} = \int_0^T \dot{\varkappa}^{(p)}_{ij0}\,dt, \tag{7.12}$$

zaś cykl wyznaczony przez przedział czasu T stanowi kinematycznie dopuszczalne pole zginania–skręcania. Oznacza to, że tensor (7.12) można otrzymać, korzystając z (1.7), z pola mikroobrotów $\Delta\omega_{i0}$, przy czym pole to znika na S_u (zgodnie z warunkami brzegowymi). Ponieważ przyrosty odkształceń plastycznych (7.11) mają być kinematycznie dopuszczalne, można je otrzymać z pola przemieszczeń Δu_{i0}, które znika na S_u, oraz z pola $\Delta\omega_{i0}$.

Polom $\dot{\lambda}^{(p)}_{ij0}(t)$, $\dot{\varkappa}^{(p)}_{ij0}(t)$ towarzyszą resztkowe prędkości naprężeń $\dot{\varrho}_{ij0}(t)$ i resztkowe prędkości naprężeń momentowych $\dot{\varphi}_{ij0}(t)$. Z kolei tym resztkowym polom naprężeń i naprężeń momentowych odpowiadają sprężyste odkształcenia $\dot{\lambda}^{(e)}_{ij0}(t)$ i sprężyste zginanie-skręcanie $\dot{\varkappa}^{(e)}_{ij0}(t)$. Niech $\dot{u}^0_i(t)$ i $\dot{\omega}^0_i(t)$ oznaczają odpowiednio pole prędkości przemieszczeń i pole mikro-obrotów, z których otrzymujemy kinematycznie dopuszczalne pole prędkości odkształceń

$$\dot{\lambda}_{ij0} = \dot{\lambda}^{(e)}_{ij0} + \dot{\lambda}^{(p)}_{ij0} \tag{7.13}$$

i kinematycznie dopuszczalne pole prędkości zginania–skręcania

$$\dot{\varkappa}_{ij0} = \dot{\varkappa}^{(e)}_{ij0} + \dot{\varkappa}^{(p)}_{ij0}. \tag{7.14}$$

Przyrosty przemieszczeń i mikroobrotów za cykl dopuszczalnych prędkości odkształceń plastycznych i dopuszczalnych prędkości plastycznego zginania–skręcania są dane zależnościami

$$\Delta u_{i0} = \int_0^T \dot{u}^0_i\,dt, \tag{7.15}$$

$$\Delta\omega_{i0} = \int_0^T \dot{\omega}^0_i\,dt. \tag{7.16}$$

Resztkowe naprężenia i resztkowe naprężenia momentowe w chwili $t = T$ przyjmują wartość taką, jak w chwili $t = 0$, gdyż przyrosty odkształceń plastycznych i przyrosty plastycznego zginania–skręcania są kinematycznie dopuszczalne. Stąd wynika, że

$$\int_0^T \dot{\lambda}^{(e)}_{ij0}\,dt = 0, \tag{7.17}$$

$$\int_0^T \dot{\varkappa}^{(e)}_{ij0}\,dt = 0. \tag{7.18}$$

Po tych długich, aczkolwiek niezbędnych określeniach, możemy sformułować twierdzenia o dostosowaniu, uogólnione na przypadek ośrodków Cosseratów z niezwiązanymi obrotami cząstek.

Uogólnione twierdzenie Melana

a) Jeśli istnieją niezależne od czasu pola, odpowiednio naprężeń resztkowych $\bar{\varrho}_{ij}$ i resztkowych naprężeń momentowych $\bar{\varphi}_{ij}$ takie, że wektor $\mathbf{Q}(s_{ij}^{(b)}, m_{ij}^{(b)})$, gdzie $s_{ij}^{(b)} = s_{ij}^{(e)} + \bar{\varrho}_{ij}$ $m_{ij}^{(b)} = m_{ij}^{(e)} + \bar{\varphi}_{ij}$ leży w e w n ą t r z wszystkich powierzchni plastyczności, w każdym punkcie ośrodka i dla wszystkich możliwych kombinacji obciążeń dla danego programu obciążenia, to układ dostosowuje się,

b) Dostosowanie nie nastąpi, jeśli nie istnieją niezależne od czasu pola resztkowych naprężeń i resztkowych naprężeń momentowych, dla których wektor $\mathbf{Q}$ o składowych, jak w a) byłby dopuszczalnym (por. punkt 5) w każdym punkcie ośrodka i dla wszystkich możliwych kombinacji obciążenia.

Uogólnione twierdzenie Koitera

a) Układ nie dostosowuje się, jeśli istnieje dopuszczalny cykl prędkości odkształceń plastycznych $\dot{\lambda}_{ij0}^{(p)}(t)$ i dopuszczalny cykl prędkości plastycznego zginania-skręcania $\dot{\varkappa}_{ij0}^{(p)}(t)$, a ponadto istnieją obciążenia zewnętrzne $X_i(t)$, $Y_i(t)$, $T_i(t)$, $M_i(t)$ wewnątrz danych przedziałów zmienności tych obciążeń, takie że,

$$\int_0^T dt \Big[\int_V (X_i \dot{u}_i^0 + Y_i \dot{\omega}_i^0) dV + \int_{S_T} (T_i \dot{u}_i^0 + M_i \dot{\omega}_i^0) ds \Big] > \int_0^T dt \int_V (s_{ij} \dot{\lambda}_{ij0}^{(p)} + m_{ij} \dot{\varkappa}_{ij0}^{(p)}) dV.$$

b) Układ dostosowuje się, jeśli istnieje $k > 1$, o takiej własności, że dla wszystkich dopuszczalnych cykli odpowiednio prędkości odkształceń plastycznych $\dot{\lambda}_{ij0}^{(p)}(t)$ i prędkości plastycznego zginania-skręcenia $\dot{\varkappa}_{ij0}^{(p)}(t)$ oraz wszystkich obciążeń zewnętrznych (wewnątrz danych przedziałów), zachodzi

$$k \int_0^T dt \Big[\int_V (X_i \dot{u}_i^0 + Y_i \dot{\omega}_i^0) dV + \int_{S_T} (T_i \dot{u}_i^0 + M_i \dot{\omega}_i^0) ds \Big] \leqslant \int_0^T dt \int_V (s_{ij} \dot{\lambda}_{ij0}^{(p)} + m_{ij} \dot{\varkappa}_{ij0}^{(p)}) dV.$$

Dowodów powyższych twierdzeń nie podajemy. Chcąc je dowieść, należy skorzystać z prac [6], [7].

Literatura cytowana w tekście

1. D. C. DRUCKER, *A definition of stable inelastic material*, J. Appl. Mech., 1, **26** (1959), 101–106; сб. пер. Механика, 2 (1960), 55–70.
2. Y. C. FUNG, *Podstawy mechaniki ciała stałego*, Warszawa 1969.
3. A. E. GREEN, P. M. NAGDI, *A general theory of an elastic-plastic continuum*, Arch. Rational Mech. Anal., 4, **18** (1965), 251–281; сб. пер. Механика, 5 (1965), 111–142.

4. A. E. GREEN, P. M. NAGHDI, *Plasticity and multipolar continuum mechanics*, Mathematica, 12 (21), (1965), 21–26.
5. A. E. GREEN, P. M. NAGHDI, R. B. OSBORN, *Theory of an elastic-plastic Cosserat surface*, Int. J. Solids Struct., **4** (1968), 907–927.
6. I. HLAVÁČEK, M. HLAVÁČEK, *On the existence and uniqueness of solution and some variational principles in linear theories of elasticity with couple-stresses*, Aplikace Mat., 5, **14** (1969), 387–410.
7. W. T. KOITER, *General theorems for elastic-plastic solids*, Progress in Solid Mechanics, Amsterdam 1960, 166–221.
8. W. T. KOITER, *Couple-stresses in the theory of elasticity*, Proc. Nederl. Akad. Wetenschappen, Ser. B, 1, **67**, (1964), 17–44, сб. Механика, 3 (1965), 89–112.
9. H. LIPPMANN, *Eine Cosserat-Theorie des plastischen Fliessens*, Acta Mechanica, **8** (1969), 255–284
10. R. D. MINDLIN, *Micro-structure in linear elasticity*, Arch. Rational Mech. Anal,. 1, **16** (1964), 51–78; сб. Механика, 4 (1964), 129–160.
11. M. MIŞICU, *On a theory of asymmetric plastic and visco-plastic solids*, Mech. Appl., 3, **9**, (1964), 477–495.
12. T. MURA, S. LEE. *Application of variational principles to limit analysis*, Quart. Appl. Math., 3, **21**, (1963), 243–248.
13. T. MURA, J. S. KAO, S. LEE, *Limit analysis of circular orthotropic plates*, Proc. ASCE, J. Engn. Mech. Div., 5, **90** (1964), 375–395.
14. T. MURA, W. H. RIMAWI, S. LEE, *Extended theorems of limit analysis*, Quart. Appl. Math., 2, **23** (1965).
15. G. SACCHI, M. SAVE, *On the evaluation of the limit load for rigid-perfectly plastic continua*; Meccanica, 3, **3** (1968), 199–206.
16. A. SAWCZUK, *On yielding of Cosserat continua*, Arch. Mech. Stos., 3, **19** (1967), 471–480.
17. M. SAYIR, *Zur Fiessbedingung der Plastizitätstheorie*, Ing. Arch., **39** (1970), 314–432.
18. W. SZCZEPIŃSKI, J. MIASTKOWSKI, *An experimental study of the effect of the prestraining history on the yield surfaces of an aluminium alloy*, J. Mech. Phys. Solids, 3, **16** (1968), 153–162.
19. J. J. TELEGA, *Zastosowanie programowania liniowego do wyznaczania nośności granicznej konstrukcji*, (Przegląd prac), Mech. Teor. Stos., 1, **9** (1971), 7–52.
20. *Teoria plastyczności*, praca zbiorowa pod red. W. OLSZAKA, P. PERZYNY, A. SAWCZUKA. Warszawa 1965.
21. K. TURSKI, *Badanie wpływu odkształcenia plastycznego na zachowanie się metalu przy różnych drogach wtórnego obciążenia*, Mech. Teor. Stos., 1, **9** (1971), 155–199.
22. K. C. VALANIS, *On the thermodynamic foundation of classical plasticity*, Acta Mechanica, **9** (1970), 278–291.
23. H. ZIEGLER, *Plastizität ohne Thermodynamik*, ZAMP, 5, **21** (1970), 798–805.
24. Л. М. КАЧАНОВ, *Основы теории пластичности*, Москва 1969.
25. В. В. КОЛОКОЛЬЧИКОВ, *Моментная теория малых упруго-пластических деформаций*, Вестн. Моск. Ун., Мат-Мех., 1 (1971), 76–84.
26. Л. И. СЕДОВ, *Механика сплошной среды*, т. I, Москва 1970.

Р е з ю м е

О НЕКОТОРЫХ ОБОБЩЕНИЯХ ТЕОРЕМ О НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ ДЛЯ СРЕДЫ КОССЕРА

В работе дано обобщение на случай среды Коссера теорем о несущей способности и теорем Мелана и Койтера о приспособляемости. Даны обобщения вариационного принципа Мюра-Ли, выводов Циглера, вытекающих из первого и второго принципов термодинамики, а также обобщение постулата Друккера. Выполненное исследование основано на предлагаемой Липпманном теории пластического течения среды Коссера.

Summary

ON SOME GENERALIZATIONS OF LIMIT ANALYSIS THEOREMS FOR COSSERAT MEDIA

This paper presents the generalizations of limit analysis and shake-down theorems of Melan and Koiter to the case of Cosserat media. Moreover, the variational principle of Mura-Lee, Ziegler's conclusion from the first and second laws of thermodynamics and Drucker's postulate have been generalized. The problems discussed in the paper are based on Lippmann's theory of plastic flow of Cosserat media.

POLITECHNIKA ŚLĄSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 16 czerwca 1971 r.