

OSZACOWANIE ROZWIĄZAŃ RÓWNAŃ KANONICZNYCH METODY SIŁ  
W PRZYPADKU PRZYBLIŻONEGO WYZNACZANIA LICZB WPŁYWOWYCH

SZCZEPAN BORKOWSKI (GLIWICE)

1. Wstęp

Zagadnienie optymalizacyjne dla układów prętowych statycznie niewyznaczalnych sprowadza się do takiego doboru przekrojów pręta, aby spełnione były pewne kryteria optymalności (np. minimum objętości) oraz dane warunki ograniczające. Przy takim postawieniu zagadnienia napotykamy zasadnicze trudności: poszukiwane wskaźniki przekroju, będące funkcjami współrzędnych, a także wymiarów poprzecznych przekroju, są wyrażeniami podcałkowymi, które z kolei określają liczby wpływowe. Liczby te występują jako współczynniki równań kanonicznych metody sił. Wariacyjne postawienie problemu optymalności, a następnie jego rozwiązanie prowadzi do algorytmu trudnego do zaprogramowania. Przedstawiona w niniejszej pracy metoda wykorzystuje przybliżony sposób całkowania Simpsona; pozwala to na proste rozwiązanie postawionego zagadnienia oraz, co jest w zastosowaniach bardzo istotne, na oszacowanie uzyskanych przybliżonych rozwiązań. Sposób ten może być również wykorzystany przy rozwiązywaniu układów statycznie niewyznaczalnych posiadających pręty o zmiennym przekroju, poddanych wpływom pola temperatur i statycznego pola obciążeń. Analogiczny sposób rozwiązywania układów statycznych może być stosowany również i w metodzie przemieszczeń.

Praca stanowi kontynuację zadania sformułowanego w streszczeniu [1]. Rozpoczynając od opracowania sposobu przybliżonego rozwiązania równań kanonicznych metody sił mamy na względzie fakt, że sposób ten może mieć zastosowanie nie tylko w problemach optymalizacyjnych.

2. Sformułowanie zadania

Rozpatrywać będziemy rozwiązanie równań kanonicznych metody sił przy uwzględnieniu wpływów termicznych oraz statycznego pola obciążeń, dla układu prętów  $n$ -krotnie ( $n > 0$ ) statycznie niewyznaczalnych. Równania te mają znaną postać

$$(2.1) \quad \delta_{ij} X_j + \Delta_{iP} + \Delta_{iT} = \Delta_i \quad (i, j = 1, \dots, n),$$

w której występujące współczynniki mogą być obliczone ze wzorów

$$(2.2) \quad E\delta_{ij} = \int_L \left[ \frac{1}{I_y} \bar{M}_{yi} \bar{M}_{yj} + \frac{2(1+\nu)}{I_s} \bar{K}_i \bar{K}_j + \frac{1}{I_z} \bar{M}_{zi} \bar{M}_{zj} \right] ds,$$

$$(2.2) \quad E\Delta_{iT} = \int_L \left[ \frac{1}{I_y} \bar{M}_{yi} \bar{M}_{yT} + \frac{1}{I_z} \bar{M}_{zi} \bar{M}_{zT} \right] ds,$$

[c.d.]

$$E\Delta_{iP} = \int_L \left[ \frac{1}{I_y} \bar{M}_{yi} \bar{M}_{yP} + \frac{2(1+\nu)}{I_s} \bar{K}_i K_P + \frac{1}{I_z} \bar{M}_{zi} \bar{M}_{zP} \right] ds,$$

ważnych dla przestrzennego układu prętów albo ze wzorów

$$(2.2a) \quad E\delta_{ij} = \int_L \frac{\bar{M}_i \bar{M}_j}{I} ds, \quad E\Delta_{iT} = \int_L \frac{\bar{M}_i \bar{M}_T}{I} ds,$$

$$E\Delta_{iP} = \int_L \frac{\bar{M}_i \bar{M}_P}{I} ds,$$

słusznych dla płaskich układów prętowych (o ile pominąć momenty skręcające).

W (2.2), przez  $\delta_{ij}$ ,  $\Delta_{iP}$ ,  $\Delta_{iT}$  oznaczono kolejno: liczby wpływowe, współczynnik uwzględniający wpływ pola obciążeń oraz temperatur; symbolami  $I_y$ ,  $I_z$ ,  $I_s$  oznaczono, w kolejności występowania — moment bezwładności względem osi  $y$ ,  $z$  oraz wskaźnik geometryczny skręcania. Występujący w każdym punkcie osi pręta ortogonalny, lokalny układ współrzędnych  $Oxyz$  zorientowany jest w ten sposób, że oś  $x$  jest styczna do osi pręta w punkcie  $O$ , natomiast osie  $y$ ,  $z$  są głównymi, centralnymi osiami bezwładności przekroju pręta. Symbolami  $M_{(\cdot)[\cdot]}$ ,  $K_{[\cdot]}$  oznaczono współrzędne wektora momentu, kolejno: zginającego względem osi  $(\cdot)$  i skręcającego. Indeks  $[\cdot]$  symbolizuje wpływ: obciążeń jednostkowych (wtedy zamiast  $[\cdot]$  wstawiamy  $i$  dodając nad literą rdzeniową — kreskę, gdzie  $i = 1, \dots, n$ ); pola obciążeń (zamiast  $[\cdot]$  wstawiamy  $P$ ) lub wreszcie — pola temperatur (wówczas zamiast  $[\cdot]$  wstawiamy  $T$ ). W równaniach (2.1), a także w pozostałych relacjach, stosujemy konwencję sumacyjną.

Występujące w wyrażeniach podcałkowych funkcje  $M_{(\cdot)[\cdot]}$ ,  $K_{[\cdot]}$  [układy (2.2)] są zależne od współrzędnej łuku  $s$  lub od zmiennych  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , określających początek lokalnego układu współrzędnych, będący zarazem środkiem geometrycznym przekroju.

O k r e ś l e n i e z a d a n i a. Należy wyznaczyć z układu (2.1) niewiadome  $X_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ) zastępując prawe strony wzorów (2.2) wzorami Simpsona, a następnie przeprowadzić oszacowanie uzyskanych przybliżonych wartości niewiadomych.

### 3. Rozwiązanie zadania

Zanim przystąpimy do podstawowego twierdzenia, które ujmować będzie odpowiedź na postawione w poprzednim punkcie zadanie, sformułujemy wpierw następujący l e m a t. Jeżeli spełnione będą założenia:

a) oś pręta będzie łukiem gładkim, regularnym, którego równanie w postaci parametrycznej możemy przedstawić przy pomocy równań

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad \text{jeśli } t \in [\alpha, \beta],$$

w tym przypadku element łuku określać będzie wzór

$$ds = f(t)dt, \quad \text{gdzie } f(t) \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{x_t^2 + y_t^2 + z_t^2};$$

b) występujące w (2.2) funkcje podcałkowe, po uwzględnieniu założenia a) oznaczymy symbolicznie przez

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \Phi_{ij}(t) &\stackrel{\text{def}}{=} \left[ \frac{1}{I_y(t)} \bar{M}_{yi}(t) \bar{M}_{yj}(t) + \frac{2(1+\nu)}{I_s(t)} \bar{K}_i(t) \bar{K}_j(t) + \frac{1}{I_z(t)} \bar{M}_{zi}(t) \bar{M}_{zj}(t) \right] f(t), \\ \Psi_{iT}(t) &\stackrel{\text{def}}{=} \left[ \frac{1}{I_y(t)} \bar{M}_{yi}(t) M_{yT}(t) + \frac{1}{I_z(t)} \bar{M}_{zi}(t) M_{zT}(t) \right] f(t), \\ \Omega_{iP}(t) &\stackrel{\text{def}}{=} \left[ \frac{1}{I_y(t)} \bar{M}_{yi}(t) M_{yP}(t) + \frac{2(1+\nu)}{I_s(t)} \bar{K}_i(t) K_P(t) + \frac{1}{I_z(t)} \bar{M}_{zi}(t) M_{zP}(t) \right] f(t) \end{aligned}$$

i przyjmować będziemy, że posiadają one pochodne względem zmiennej  $t$  do rzędu czwartego przy uwzględnieniu, że wskaźniki przebiegają ciąg liczb skończony ( $i, j = 1, \dots, n$ );

c) przedział  $[\alpha, \beta]$  rozbijamy na  $2m$  równych części

$$[t_0 = \alpha, t_1], [t_1, t_2], \dots, [t_{2m-1}, t_{2m} = \beta], \quad \alpha > \beta$$

budujemy z (3.1) pomocnicze funkcje

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \varphi_{ij}^{(m)} &= \Phi_{ij}(\alpha) - \Phi_{ij}(\beta) + 2 \sum_{p=1}^m [2\Phi_{ij}(t_{2p-1}) + \Phi_{ij}(t_{2p})], \\ \psi_{iT}^{(m)} &= \Psi_{iT}(\alpha) - \Psi_{iT}(\beta) + 2 \sum_{p=1}^m [2\Psi_{iT}(t_{2p-1}) + \Psi_{iT}(t_{2p})], \\ \omega_{iP}^{(m)} &= \Omega_{iP}(\alpha) - \Omega_{iP}(\beta) + 2 \sum_{p=1}^m [2\Omega_{iP}(t_{2p-1}) + \Omega_{iP}(t_{2p})], \end{aligned}$$

pod warunkiem, aby  $\det[\varphi_{ij}^{(m)}] \neq 0$ , to wówczas, po zastosowaniu metody Simpsona uzyskujemy zamiast wzorów (2.2) następujące wyrażenia

$$(3.3) \quad \begin{aligned} E\delta_{ij} &= \frac{\beta - \alpha}{6m} \varphi_{ij}^{(m)} - \left( \frac{\beta - \alpha}{2} \right)^5 \frac{1}{90m^4} \Phi_{ij}^{(IV)}(\alpha + \theta_1 t), \\ EA_{iT} &= \frac{\beta - \alpha}{6m} \psi_{iT}^{(m)} - \left( \frac{\beta - \alpha}{2} \right)^5 \frac{1}{90m^4} \Psi_{iT}^{(IV)}(\alpha + \theta_2 t), \\ EA_{iP} &= \frac{\beta - \alpha}{6m} \omega_{iP}^{(m)} - \left( \frac{\beta - \alpha}{2} \right)^5 \frac{1}{90m^4} \Omega_{iP}^{(IV)}(\alpha + \theta_3 t), \end{aligned}$$

gdzie występujące we wzorach (3.3) pochodne czwartego rzędu określone są w punktach  $\alpha + \theta_k t$ ,  $0 < \theta_k < 1$  ( $k = 1, 2, 3$ ).

Przy powyższych założeniach dowód lematu przebiega analogicznie, jak w [2] s. 252.

Mając na uwadze poprzednio przytoczony lemat, wykażemy, że słuszne jest następujące twierdzenie. Jeżeli spełnione są założenia:

a) konfiguracja pręta, przemieszczenia punktów jego osi środkowej, poie obciążeń i temperatur, materiał ośrodka oraz nałożone więzy są tego rodzaju, iż słuszne pozostają równania kanoniczne metody sił (2.1);

b) wszystkie występujące w (2.2) całki są obliczone metodą Simpsona (por. lemat)

c) pochodne rzędu czwartego funkcji  $\Phi_{ij}$ ,  $\Psi_{iT}$ ,  $\Omega_{iP}$  względem zmiennej  $t$  są ograniczone nierównościami

$$(3.4) \quad M_i = \max_{t \in [\alpha, \beta]} \{ |X_j \Phi_{ij}^{(IV)}(t)|, |\Psi_{iT}^{(IV)}(t)|, |\Omega_{iP}^{(IV)}(t)| \} \leq \tilde{M}_i < \infty \quad (i = 1, \dots, n),$$

— to wówczas wielkości nadliczbowe  $X_j^{(m)}$  traktowane jako  $m$ -te przybliżenie niewiadomych  $X_j$  można wyznaczyć w sposób przybliżony z równania

$$(3.5) \quad \varphi_{ij}^{(m)} X_j^{(m)} + \omega_{iP}^{(m)} + \psi_{iT}^{(m)} = \frac{6m}{\beta - \alpha} E \Delta_i \quad (i, j = 1, \dots, n).$$

Niewiadome  $X_j^{(m)}$  szacujemy w stosunku do wartości dokładnych  $X_j$  za pomocą nierówności

$$(3.6) \quad \|[X_j - X_j^{(m)}]\| \leq \|\mathbf{F}^{-1}\| \|\boldsymbol{\epsilon}(m)\|,$$

gdzie  $\mathbf{F}^{-1}$  jest macierzą odwrotną macierzy  $\mathbf{F} = [\varphi_{ij}^{(m)}]$ ,  $\boldsymbol{\epsilon}(m)$  — resztą wynikającą ze wzoru Simpsona, a  $\|\cdot\|$  jest symbolem normy macierzy.

D o w ó d. Z założeń a) i b) wynika, że możemy napisać następującą równość

$$(3.5a) \quad \varphi_{ij}^{(m)} X_j + \omega_{iP}^{(m)} + \psi_{iT}^{(m)} = \varepsilon_i(m) + \frac{6m}{\beta - \alpha} E \Delta_i$$

wynikającą z podstawienia (3.3) do (2.1); w (3.5a) przez  $\varepsilon_i(m)$  oznaczono

$$(3.7) \quad \varepsilon_i(m) = \left( \frac{\beta - \alpha}{2} \right)^4 \frac{1}{30m^3} [X_j \Phi_{ij}^{(IV)}(\alpha + \theta_1 t) + \Psi_{iT}^{(IV)}(\alpha + \theta_2 t) + \Omega_{iP}^{(IV)}(\alpha + \theta_3 t)].$$

Pomijając w (3.5)  $\varepsilon_i(m)$  zmieniamy zbiór poszukiwanych niewiadomych, które oznaczymy teraz przez  $X_j^{(m)}$ ; tym samym z (3.5a) uzyskujemy równanie (3.5). Równanie to posłuży nam do przybliżonego wyznaczenia poszukiwanych wielkości nadliczbowych  $X_j^{(m)}$  ( $m$ -te przybliżenie). Odejmując równanie (3.5) od (3.5a) uzyskujemy  $\varphi_{ij}^{(m)} [X_j - X_j^{(m)}] = \varepsilon_i(m)$ , a dalej  $[\varphi_{ij}^{(m)}] [X_j - X_j^{(m)}] = [\varepsilon_i(m)]$ , skąd już ostatecznie

$$(3.8) \quad [X_j - X_j^{(m)}] = [\varphi_{ij}^{(m)}]^{-1} [\varepsilon_i(m)].$$

Jeżeli wprowadzimy normy macierzy  $\mathbf{F}^{-1} = [\varphi_{ij}^{(m)}]^{-1} = [\tilde{\varphi}_{ij}^{(m)}]$  podporządkowane normie oktaedrycznej wektorów  $\mathbf{X} = [X_j - X_j^{(m)}]$ ,  $[\varepsilon_i(m)] = \boldsymbol{\epsilon}(m)$ , które określone są w sposób następujący (por. [3])

$$(3.9) \quad \|\mathbf{F}^{-1}\| = \max_j \sum_{i=1}^n |\tilde{\varphi}_{ij}^{(m)}|, \|\boldsymbol{\epsilon}(m)\| = \sum_{i=1}^n |\varepsilon_i(m)|, \|\mathbf{X}\| = \sum_{i=1}^n |X_j - X_j^{(m)}|,$$

to wówczas z (3.8) uzyskujemy oszacowanie

$$\|[X_j - X_j^{(m)}]\| = \|\mathbf{F}^{-1} \boldsymbol{\epsilon}(m)\| \leq \|\mathbf{F}^{-1}\| \|\boldsymbol{\epsilon}(m)\|,$$

zgodnie z (3.6). Uwzględniając w (3.7) oszacowanie (3.4), uzyskujemy

$$(3.10) \quad |\varepsilon_i(m)| = |[(\beta - \alpha)^4 / 480m^3] \cdot [X_j \Phi_{ij}^{(IV)}(\alpha + \theta_1 t) + \Psi_{iT}^{(IV)}(\alpha + \theta_2 t) + \Omega_{iP}^{(IV)}(\alpha + \theta_3 t)]| \leq \\ \leq [(\beta - \alpha)^4 / 60(2m)^3] [2 + 1] M_i = B_i / (2m)^3,$$

gdzie  $B_i = [(\beta - \alpha)^4 / 60] [2 + n] M_i$ .

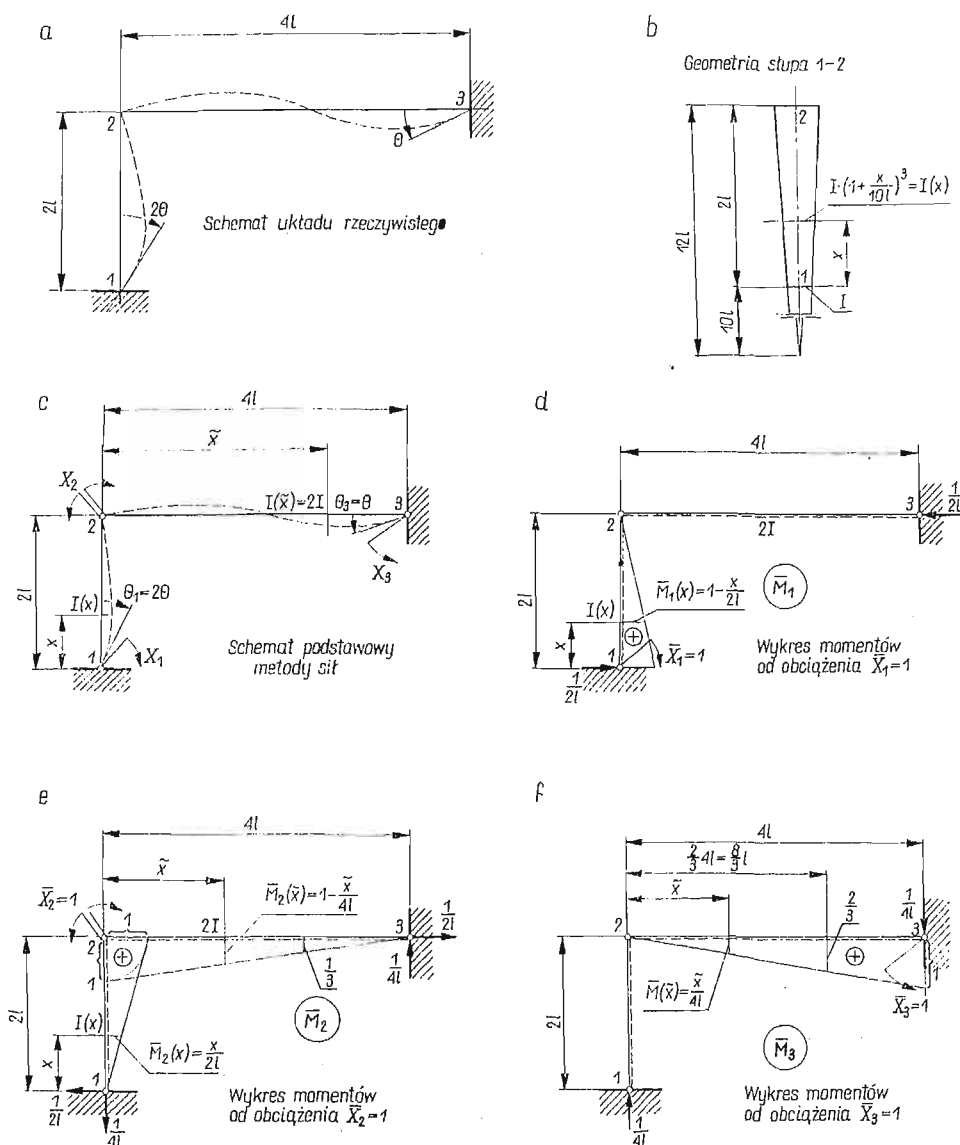
Podstawiając ostatnie wyniki do (3.9) otrzymamy

$$(3.10a) \quad \|\boldsymbol{\epsilon}(m)\| \leq \frac{1}{(2m)^3} \sum_{i=1}^n B_i.$$

W ten sposób zakończyliśmy dowód twierdzenia.

## 4. Przykład liczbowy

Dla schematu układu rzeczywistego, który przedstawiony jest na rys. 1a, należy wyznaczyć w sposób przybliżony wielkości hiperstatyczne pokazane na schemacie podstawowym metody sił (por. rys. 1c). Moment bezwładności przekroju słupa 1-2 jest zmienny zgodnie z funkcją podaną na rys. 1b. Po wyznaczeniu wielkości hiperstatycznych, przybliżonych należy przeprowadzić ich oszacowanie, a następnie porównać otrzymane wyniki z rozwiązaniem dokładnym podanym w pracy [4], s. 338. Ponieważ w rozpatrywanym przypadku



Rys. 1

nie ma wpływów termicznych ani międzyprzęstowego pola sił zewnętrznych [ $A_{iP} = A_{iT} = 0$  ( $i = 1, 2, 3$ )], przeto z wzoru (3.1) otrzymujemy

$$(4.1) \quad [\Phi_{ij}] = [\bar{\Phi}_{ij}] + [\check{\Phi}_{ij}],$$

gdzie

$$[\bar{\Phi}_{ij}] = \left[ \frac{1}{I(x)} \bar{M}_i(x) \bar{M}_j(x) \right], \quad [\check{\Phi}_{ij}] = \left[ \frac{1}{2I} \bar{M}_i(\tilde{x}) \bar{M}_j(\tilde{x}) \right].$$

Podstawiając do (4.1)<sub>2</sub> odpowiednie wielkości za  $\bar{M}_i(x)$ ,  $\bar{M}_i(\tilde{x})$  ( $i = 1, 2, 3$ ), które podane są na rys. 1, uzyskamy

$$(4.1a) \quad [\bar{\Phi}_{ij}] = \frac{1}{I} \begin{bmatrix} (1-x/2l)^2(1+x/10l)^{-3} & (1-x/2l)(x/2l)(1+x/10l)^{-3} & 0 \\ \cdot & (x/2l)^2(1+x/10l)^{-3} & 0 \\ \cdot & \cdot & 0 \end{bmatrix},$$

$$[\check{\Phi}_{ij}] = \frac{1}{I} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \frac{1}{2}(1-\tilde{x}/4l) & \frac{1}{2}(1-x/4l)(\tilde{x}/4l) \\ \cdot & \cdot & \frac{1}{2}(\tilde{x}/4l)^2 \end{bmatrix},$$

gdzie w macierzy (4.1a) oznaczono kropkami elementy, które są równe elementom macierzy symetrycznym względem przekątnej głównej. Dla odcinka 1-2 «ramy 1-2-3» przyjmujemy podział na dwie części  $2m = 2$ ; z równania (3.2)<sub>1</sub> uzyskamy wówczas

$$\hat{\varphi}_{ij}^{(1)} = \Phi_{ij}(0) + 4\Phi_{ij}(l) + \Phi_{ij}(2l)$$

lub w zapisie macierzowym, po uwzględnieniu (4.1a)

$$(4.2) \quad [\hat{\varphi}_{ij}^{(1)}] = \frac{1}{I} \begin{bmatrix} 1,75131 & 0,75131 & 0 \\ \cdot & 1,33001 & 0 \\ \cdot & \cdot & 0 \end{bmatrix}.$$

Analogiczną macierz możemy podać i dla współczynników (4.1a)<sub>2</sub>, lecz z uwagi na prostą budowę funkcji momentów oraz stały moment bezwładności przekroju pręta 2-3, wygodniej uczynić to przez «przemnożenie» wykresów momentów; po wykonaniu tej ostatniej operacji otrzymamy

$$(4.3) \quad \left[ \frac{l}{3E} \tilde{\varphi}_{ij} \right] = \frac{l}{3EI} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \cdot & 2 & 1 \\ \cdot & \cdot & 2 \end{bmatrix}.$$

Współczynniki  $\varphi_{ij}$  należy pomnożyć przez  $(\beta - \alpha)/6m = (2l - 0)/6 \cdot 1 = l/3$ , oraz podzielić przez  $E$ , zgodnie z równaniem (3.3)<sub>1</sub>. Dodając do siebie macierze (4.2) i (4.3) uzyskamy

$$(4.3a) \quad [\varphi_{ij}^{(1)}] = [\hat{\varphi}_{ij}^{(1)} + \tilde{\varphi}_{ij}] = \mathbf{F} = \frac{1}{I} \begin{bmatrix} 1,75131 & 0,75131 & 0,00000 \\ \cdot & 3,33001 & 1,00000 \\ \cdot & \cdot & 2,00000 \end{bmatrix}.$$

Przybliżony układ równań kanonicznych metody sił, zgodnie z równaniem (3.5), ma postać

$$\varphi_{ij}^{(1)} X_j^{(1)} = \frac{3E}{I} \theta_i, \quad \text{gdzie} \quad \theta_1 = 2\theta, \quad \theta_2 = 0, \quad \theta_3 = \theta.$$

W równaniu (3.5) przyjęto  $6m/(\beta-\alpha) = 3/l$ , a  $\Delta_i = \theta_i$ .  
Wykonując odwracanie macierzy (4.3) uzyskamy

$$(4.4) \quad \mathbf{F}^{-1} = I \begin{bmatrix} 0,64439 & -0,17107 & 0,08554 \\ \cdot & 0,39878 & -0,19939 \\ \cdot & \cdot & 0,59969 \end{bmatrix} = [\tilde{\varphi}_{ij}^{(1)}],$$

skąd przybliżone wartości poszukiwanych wielkości hiperstatycznych ( $X_j^{(1)} = \tilde{\varphi}_{ij}^{(1)} 3E\theta_i/l$ ) wynosić będą

$$(4.5) \quad X_1^{(1)} = 4,1230 \frac{EI}{l} \theta, \quad X_2^{(1)} = -1,6246 \frac{EI}{l} \theta, \quad X_3^{(1)} = 2,3123 \frac{EI}{l} \theta.$$

Przystąpimy do oszacowania wyników (4.5). Z równania (4.1a)<sub>1</sub> wyznaczmy pochodne czwartego rzędu funkcji  $\Phi_{ij}(z)$ , gdzie  $z = 10/l + x$

$$(4.6) \quad \Phi_{ij}^{(IV)}\left(\frac{z}{l}\right) = \frac{6000}{l^4} \left(\frac{z}{l}\right)^{-5} \begin{bmatrix} 2160(z/l)^{-2} - 120(z/l)^{-1} + 1 & 1800(z/l)^{-2} - 110(z/l)^{-1} + 1 & 0 \\ \cdot & 1500(z/l)^{-2} - 100(z/l)^{-1} + 1 & 0 \\ \cdot & \cdot & 0 \end{bmatrix}$$

Korzystając z równań (3.4), (4.5) otrzymamy

$$M_i = |X_j \Phi_{ij}^{(IV)}(z/l)|_{z/l=10}, \quad \text{czyli} \quad M_1 = 3,4020 \frac{E\theta}{l}, \quad M_2 = 2,0390 \frac{E\theta}{l}, \quad M_3 = 0,$$

dalej, zgodnie z (3.10):

$$(4.7) \quad |\varepsilon_i(m)| \leq \frac{(\beta-\alpha)^4}{60(2m)^3} (0+1) M_i, \quad \text{czyli} \quad |\varepsilon_1(m)| \leq 0,1134 \frac{E\theta}{l}, \quad |\varepsilon_2(m)| \leq 0,0680 \frac{E\theta}{l}, \\ \varepsilon_3(m) = 0.$$

Norma macierzy  $[\varepsilon_j(m)]$  określona jest wzorem (3.9)<sub>2</sub>. Podstawiając równania (4.7) do (3.9)<sub>2</sub>, uzyskujemy

$$\|[\varepsilon_j(m)]\| \leq 0,1814 \frac{E\theta}{l}.$$

Przystąpimy do wyznaczania normy macierzy odwrotnej (4.4). Z określenia (3.9)<sub>1</sub> oraz wzoru (4.4) otrzymujemy

$$\|\mathbf{F}^{-1}\| = \max_j (|\tilde{\varphi}_{1j}^{(1)}|, |\tilde{\varphi}_{2j}^{(1)}|, |\tilde{\varphi}_{3j}^{(1)}|) = 0,9020l.$$

Na podstawie równania (3.6) uzyskujemy oszacowanie

$$(4.8) \quad \|X_j - X_j^{(1)}\| \leq \|\mathbf{F}^{-1}\| \|[\varepsilon_j(m)]\| \leq 0,1636 \frac{EI}{l} \theta.$$

Podamy następnie oszacowanie błędu bezwzględnego wielkości nadliczbowych. Posługując się równaniami (3.5), (3.5a) uzyskamy

$$|X_j - X_j^{(1)}| \leq \sum_{i=1}^3 |\tilde{\varphi}_{ij}^{(1)}| |\varepsilon_i(m)|;$$

wykonując naznaczone działania, a następnie uwzględniając równania (4.4), (4.7) otrzymamy

$$|X_1 - X_1^{(1)}| \leq 0,085 \frac{EI}{l} \theta, \quad |X_2 - X_2^{(1)}| \leq 0,047 \frac{EI}{l} \theta, \quad |X_3 - X_3^{(1)}| \leq 0,024 \frac{EI}{l} \theta$$

lub

$$4,038 < \frac{X_1 l}{EI \theta} < 4,208, \quad -1,672 < \frac{X_2 l}{EI \theta} < -1,578, \quad 2,288 < \frac{X_3 l}{EI \theta} < 2,337.$$

Ostatnio podane oszacowanie daje błędy względne wahające się w granicach 1–3%, co jest w zastosowaniach w zupełności wystarczające; tym bardziej, że oszacowanie to jest z dużym nadmiarem w stosunku do błędów rzeczywistych.

W zakończeniu porównamy otrzymane wyniki z danymi dokładnymi, podanymi w pracy [4]. Dokładne wartości (do czterech miejsc po przecinku) wielkości hiperstatycznych wynoszą

$$X_1 = 4,1618 \frac{EI}{l} \theta, \quad X_2 = -1,6447 \frac{EI}{l} \theta, \quad X_3 = 2,3224 \frac{EI}{l} \theta,$$

a zatem błąd względny wielkości przybliżonych (4.5) waha się, dla  $m = 1$ , w granicach  $0,4 \div 1,2\%$ ; natomiast  $||[X_j - X_j^{(1)}]|| = 0,075 EI \theta / l$ . Ostatnie wyniki określają rzeczywiste błędy oraz rzeczywistą normę, a nie wielkości szacunkowe, które przytoczyliśmy poprzednio.

#### Literatura cytowana w tekście

1. S. BORKOWSKI, *Niektóre problemy optymalizacji konstrukcji prętowych przy uwzględnieniu wpływu pola temperatur*, IV Konf. Nauk. Tech., Konst. Met., Warszawa 1970, t. 1, 539–541.
2. И. С. БЕРЕЗИН, Н. П. ЖИДКОВ, *Методы вычислений*, т. I, Москва 1962.
3. Д. К. ФАДДЕЕВ, В. И. ФАДДЕЕВА, *Вычислительные методы линейной алгебры*, Москва 1963.
4. Н. В. ВЛИШВИЛИ, *Формулы для расчета рам со стойками переменного сечения*, Москва 1965.

#### Резюме

#### ОЦЕНКИ РЕШЕНИЙ КАНОНИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ СИЛОВОГО МЕТОДА ДЛЯ СЛУЧАЯ ПРИБЛИЖЕННОГО ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ ВЛИЯНИЯ

Рассмотрена задача об оптимизации стержневых систем, подверженных статическим и тепловым воздействиям. Формулировка задачи приводит к уравнениям, в которых переменные характеристики сечений стержней находятся в подинтегральных выражениях. В системе канонических уравнений для силового метода эти выражения определяют параметры влияния.

В работе дан способ оценки приближенных значений гиперстатических величин, получаемых из этих уравнений, что дает возможность приспособить оптимизационные процессы к требованиям математического программирования, а также воспользоваться методом Симпсона.



## S u m m a r y

ESTIMATION OF SOLUTION OF THE CANONICAL EQUATIONS OF THE METHOD OF FORCES  
UNDER APPROXIMATE DETERMINATION OF INFLUENCE PARAMETERS

In the case of the optimization problem of rod structures subject to static and temperature loadings, the variable rod characteristics appear in the integrands. These expressions determine the influence parameters of the canonical system of equations of the method of forces. In order to adapt the optimization processes to mathematical programming and to apply the Simpson method, the paper presents the method of estimation of the approximate values of the hyperstatic quantities obtained from these equations.

POLITECHNIKA ŚLĄSKA

*Praca została złożona w Redakcji dnia 8 października 1970 r.; po raz drugi — dnia 13 grudnia 1970 r.*

---