

## WEWNĘTRZNA STATECZNOŚĆ SPRĘŻYSTEGO WALCA KOŁOWEGO PRZY ODKSZTAŁCENIACH SKOŃCZONYCH

ALEKSANDER R A C Z E W (SOFIA)

Utratę stateczności nieograniczonego lub ograniczonego nieodkształcalnymi powierzchniami ośrodka jednorodnego i nieliniowego omówiono po raz pierwszy w pracy [1] oraz nazwano wewnętrzną niestatecznością. Zjawisko to różni się od utraty stateczności elementów posiadających swobodne granice, niejednorodności lub nieciągłości. W [1] BIOT rozważył zagadnienie płaskie stosując zlinearyzowaną teorię ciał wstępnie zdeformowanych — zaproponowaną w [2]. Następnie WESOŁOWSKI, korzystając z teorii małych odkształceń nałożonych na duże odkształcenia, zbadał wewnętrzną stateczność pełnej sprężystej kuli obciążonej równomiernie na powierzchni [3], zaś DUSZCZYK przedyskutował niektóre płaskie przypadki stateczności pełnego walca poddanego działaniu ciśnienia hydrostatycznego [4].

W niniejszej pracy rozważono osiowo-symetryczne zagadnienie utraty wewnętrznej stateczności pełnego walca kołowego wykonanego z materiału nieliniowo hipersprężystego w założeniu, że punkty powierzchni tworzącej walca nie przemieszczają się w kierunku promieniowym, zaś na powierzchniach kołowych działa obciążenie normalne wywołujące deformację skończoną. Warunek utraty stateczności wyprowadzono postulując istnienie rozwiązania niezerowego dla małego odkształcenia nałożonego na początkowe odkształcenie skończone i jednorodne.

### 1. Skończone odkształcenie wstępne

Rozważa się pełny walec kołowy, który w stanie nieodkształconym  $B^0$  posiada promień  $R$  i wysokość  $2h_0$ . Materiał walca jest jednorodny i hipersprężysty. Przemieszczenie w kierunku promieniowym jest kinematycznie ograniczone (powierzchnia tworząca walca ograniczona jest nieodkształcalną powłoką), tak że pod działaniem obciążenia normalnego na czoło walca wszystkie punkty doznają skończonych przemieszczeń tylko w kierunku osiowym. W stanie odkształconym  $B$  walec posiada promień  $R$  i wysokość  $2h$ .

Jeśli w stanie odkształconym jako ruchome (konwekcyjne) współrzędne wybrać współrzędne  $r, \theta, z$ , to współrzędne kartezjańskie  $x_i$  oraz  $y_i$  dowolnego punktu przed oraz po odkształceniu określone są zależnościami

$$(1.1) \quad x_1 = r \cos \theta, \quad x_2 = r \sin \theta, \quad x_3 = \frac{z}{\lambda},$$

$$(1.2) \quad y_1 = r \cos \theta, \quad y_2 = r \sin \theta, \quad y_3 = z,$$

gdzie  $\lambda = h/h_0 < 1$  oznacza parametr odkształcenia.

W dalszym ciągu wykorzystamy oznaczenia i niektóre wyniki zamieszczone w [5].

Tensory metryczne  $\mathbf{g}$  i  $\mathbf{G}$  odpowiednio dla stanu nieodkształconego i odkształconego mają następujące składowe kowariantne i kontrawariantne:

$$(1.3) \quad g_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda^2} \end{bmatrix}, \quad g^{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 \end{bmatrix},$$

$$(1.4) \quad G_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad G^{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Niezmienniki odkształcenia są następujące:

$$(1.5) \quad I_1 = 2 + \lambda^2, \quad I_2 = 1 + 2\lambda^2, \quad I_3 = \lambda^2,$$

niezerowe zaś symbole Christoffela drugiego rodzaju

$$(1.6) \quad \Gamma_{22}^1 = -r, \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{r}.$$

Stan naprężenia walca opisany jest tensorem naprężenia ze składowymi kontrawariantnymi

$$(1.7) \quad \tau^{11} = \Phi + \Psi(1 + \lambda^2) + p = -H, \quad \tau^{22} = \frac{1}{r^2} [\Phi + \Psi(1 + \lambda^2) + p] = -\frac{H}{r^2},$$

$$\tau^{33} = \Phi \lambda^2 + 2\Psi \lambda^2 + p = -P, \quad \tau^{12} = \tau^{23} = \tau^{31} = 0,$$

gdzie

$$(1.8) \quad \Phi = \frac{2}{\sqrt{I_3}} \frac{\partial W}{\partial I_1}, \quad \Psi = \frac{2}{\sqrt{I_3}} \frac{\partial W}{\partial I_2}, \quad p = 2\sqrt{I_3} \frac{\partial W}{\partial I_3},$$

zaś  $W(I_1, I_2, I_3)$  oznacza funkcję energii odkształcenia materiału hipersprężystego, która określa całkowicie jego mechaniczne zachowanie się.

Jak wynika z (1.7), naprężenia styczne na powierzchni tworzącej  $r = R$  równają się zeru. A zatem, jeśli walec ograniczony jest ciałem sztywnym, to dla zrealizowania założonego odkształcenia konieczne jest, żeby między tym ciałem i walcem nie istniało tarcie.

Różniczkowe równania równowagi przy braku sił masowych

$$(1.9) \quad \tau_{,i}^i + \Gamma_{ir}^j \tau^{ir} + \Gamma_{ir}^r \tau^{ij} = 0$$

spełnione są tożsamościowo. W ten sposób dla założonego materiału stan naprężenia i odkształcenia określone są parametrem  $\lambda$  lub odpowiednio obciążeniem  $P$ . Bada się stateczność takiego stanu.

2. Małe odkształcenie dodatkowe

Po rozważonej dotychczas deformacji skończonej, walec został poddany dodatkowemu małemu odkształceniu określone mu polem wektora przemieszczenia  $\varepsilon w$ . Parametr  $\varepsilon$  przyjmuje się na tyle mały, żeby można było pominąć  $\varepsilon^2$  i wyższe potęgi w porównaniu z  $\varepsilon$ .

Jako wynik dodatkowego małego przemieszczenia ciało przechodzi w nowy stan  $B'$  i wszystkie wielkości związane ze stanem odkształcenia lub naprężenia doznają odpowiednich przyrostów. Ich główne liniowe części oznaczono primami. Teoria małych odkształceń nałożonych na odkształcenia skończone zamieszczona jest w [5] i [6].

Oznaczmy fizyczne składowe wektora  $w$  w bazie konwekcyjnego układu współrzędnych przez  $u, v$  i  $w$ . Rozważmy przypadek osiowosymetrycznej dodatkowej deformacji, dla którego  $v = 0, u = u(r, z), w = w(r, z)$ . Stosując teorię rozwiniętą w [5], [6], otrzymamy dla przyrostów interesujących nas wielkości

$$(2.1) \quad G'_{ij} = \begin{bmatrix} 2u_{,r} & 0 & u_{,z} + w_{,r} \\ 0 & 2ru & 0 \\ u_{,z} + w_{,r} & 0 & 2w_{,z} \end{bmatrix}, \quad G'^{ij} = \begin{bmatrix} -2u_{,r} & 0 & -(u_{,z} + w_{,r}) \\ 0 & -\frac{2}{r^3}u & 0 \\ -(u_{,z} + w_{,r}) & 0 & -2w_{,z} \end{bmatrix},$$

$$(2.2) \quad I'_1 = 2 \left( u_{,r} + \frac{u}{r} + \lambda^2 w_{,z} \right), \quad I'_2 = 2(1 + \lambda^2) \left( u_{,r} + \frac{u}{r} \right) + 4\lambda^2 w_{,z},$$

$$I'_3 = 2\lambda^2 \left( u_{,r} + \frac{u}{r} + w_{,z} \right),$$

$$(2.3) \quad \tau'^{11} = c_{11}u_{,r} + c_{12}\frac{u}{r} + c_{13}w_{,z}, \quad \tau'^{22} = \frac{1}{r^2} \left( c_{12}u_{,r} + c_{11}\frac{u}{r} + c_{13}w_{,z} \right),$$

$$\tau'^{33} = c_{31} \left( u_{,r} + \frac{u}{r} \right) + c_{33}w_{,z}, \quad \tau'^{13} = c_{44}(u_{,z} + w_{,r}), \quad \tau'^{12} = \tau'^{23} = 0,$$

gdzie argument, po którym się różniczkuje, występuje po przecinku, zaś

$$(2.4) \quad c_{11} = 2A_{11} + 2(1 + \lambda^2)^2 A_{22} + 2\lambda^4 A_{33} + 4(1 + \lambda^2)A_{12} + 4\lambda^2 A_{13} + 4\lambda^2(1 + \lambda^2)A_{23} - \Phi - (1 + \lambda^2)\Psi - p,$$

$$c_{13} = 2\lambda^2 A_{11} + 4\lambda^2(1 + \lambda^2)A_{22} + 2\lambda^4 A_{33} + 2\lambda^2(3 + \lambda^2)A_{12} + 2\lambda^2(1 + \lambda^2)A_{13} + 2\lambda^2(1 + 3\lambda^2)A_{23} - \Phi - (1 - \lambda^2)\Psi + p,$$

$$c_{33} = 2\lambda^4(A_{11} + 4A_{22} + A_{33} + 4A_{12} + 2A_{13} + 4A_{23}) - \lambda^2(\Phi + 2\Psi) - p,$$

$$c_{12} = c_{11} + 2(\Psi + p), \quad c_{31} = c_{13} + (1 - \lambda^2)(\Phi + \Psi), \quad c_{44} = -2(\lambda^2\Psi + p),$$

$$A_{ij} = \frac{2}{\sqrt{I_3}} \frac{\partial^2 W}{\partial I_i \partial I_j}.$$

Składowe dodatkowego tensora naprężenia  $\tau'^{ij}$  muszą spełniać następujące równania różniczkowe:

$$(2.5) \quad \tau'_{,i}{}^{ij} + \Gamma_{ir}^j \tau'^{ir} + \Gamma_{ir}^r \tau'^{ij} + \Gamma_{,r}^j \tau'^{ir} + \Gamma_{ir}^r \tau'^{ij} = 0,$$

gdzie  $\Gamma'_{ij}$  są liniowymi częściami przyrostów symboli Christoffela. W naszym przypadku różne od zera są tylko następujące przyrosty:

$$(2.6) \quad \begin{aligned} \Gamma'_{11}{}^1 &= u_{,rr}, & \Gamma'_{21}{}^1 &= ru_{,r}-u, & \Gamma'_{33}{}^1 &= u_{,zz}, \\ \Gamma'_{13}{}^1 &= u_{,rz}, & \Gamma'_{23}{}^2 &= \frac{u_{,z}}{r}, & \Gamma'_{12}{}^2 &= \frac{1}{r} \left( u_{,r} - \frac{u}{r} \right), \\ \Gamma'_{11}{}^3 &= w_{,rr}, & \Gamma'_{22}{}^3 &= rw_{,r}, & \Gamma'_{33}{}^3 &= w_{,zz}, & \Gamma'_{13}{}^3 &= w_{,rz}. \end{aligned}$$

Po podstawieniu (1.7) i (2.3) do (2.5) oraz wykorzystaniu (1.6) i (2.6) stwierdzamy, że równanie równowagi dla  $j = 2$  spełnione jest tożsamościowo, a pozostałe przyjmują postać

$$(2.7) \quad \begin{aligned} 2(c_{11}-2H) \left[ \frac{1}{r}(ru)_{,r} \right]_{,r} + (c_{44}-2P)u_{,zz} + (c_{44}-2c_{13}-2H)w_{,rz} &= 0, \\ (c_{44}+2c_{31}-2P) \left[ \frac{1}{r}(ru)_{,r} \right]_{,z} + 2(c_{33}-2P)w_{,zz} + (c_{44}-2H) \frac{1}{r}(rw_{,r})_{,r} &= 0. \end{aligned}$$

Nałożone małe odkształcenie jest dopuszczalne wówczas, gdy spełnia warunki brzegowe dla rozważanego walca.

Na powierzchni tworzącej walca  $r = R$  znika przemieszczenie  $u$ , działa zaś tylko obciążenie normalne. A zatem spełnione są warunki

$$(2.8) \quad u = 0, \quad \tau'^{13} = 0, \quad \text{przy } r = R.$$

Wykorzystując (2.3), wyrażenia (2.8) prowadzą do

$$(2.9) \quad u = 0, \quad u_{,z} + w_{,r} = 0, \quad \text{przy } r = R.$$

Rozważmy obecnie dwa sposoby realizacji obciążenia zewnętrznego na powierzchniach czołowych  $z = \pm h$ .

**I Przypadek. Warunki brzegowe w przemieszczeniach.** Niech obciążenie zewnętrzne działa za pośrednictwem nieskończenie sztywnych płyt ograniczających dodatkowe przemieszczenie punktów powierzchni czołowej w kierunku stycznym i normalnym. W tym przypadku składowe przemieszczenia  $w$  muszą spełniać następujące warunki brzegowe:

$$(2.10) \quad u = 0, \quad w = 0, \quad \text{przy } z = \pm h.$$

**II Przypadek. «Mieszane» warunki brzegowe.** Niech obciążenie działa na powierzchnie czołowe walca za pośrednictwem sztywnych płyt i niech nie istnieje tarcie między tymi powierzchniami i płytami. Płyty uniemożliwiają dodatkowy ruch punktów płaszczyzn czołowych tylko w kierunku normalnym. Wówczas dodatkowe odkształcenie musi spełniać warunki

$$(2.11) \quad w = 0, \quad \tau'^{13} = 0, \quad \text{przy } z = \pm h$$

lub o wykorzystaniu (2.3)

$$(2.12) \quad w = 0, \quad u_{,z} + w_{,r} = 0, \quad \text{przy } z = \pm h.$$

3. Badanie stateczności odkształconego walca

Ażeby zbadać stateczność odkształconego walca posłużymy się metodą statyczną. Zgodnie z tym podejściem, ciało znajduje się w równowadze trwałej póki nie istnieje niezerowe rozwiązanie dla dodatkowego małego odkształcenia spełniającego różniczkowe równanie równowagi (2.7) oraz jednorodne warunki brzegowe (2.9) i (2.10) lub odpowiednio (2.9) i (2.12).

Rozwiązania postawionych zagadnień brzegowych dla układu liniowych równań różniczkowych (2.7) poszukuje się w postaci

$$(3.1) \quad u = f_{1n}(z)J_1(\alpha_n r), \quad w = f_{2n}(z)J_0(\alpha_n r),$$

gdzie  $J_0(\alpha_n r)$  i  $J_1(\alpha_n r)$  oznaczają funkcje Bessela pierwszego rodzaju, odpowiednio zerowego i pierwszego rzędu, zaś  $\alpha_n$  — parametr wyznaczony z warunków brzegowych.

Po podstawieniu (3.1) do (2.7), dla wyznaczenia funkcji  $f_{1n}(z)$  i  $f_{2n}(z)$  otrzymujemy układ równań

$$(3.2) \quad \begin{aligned} (c_{44}-2P)f''_{1n}-2\alpha_n^2(c_{11}-2H)f_{1n}-\alpha_n(c_{44}+2c_{13}-2H)f'_{2n} &= 0, \\ 2(c_{33}-2P)f''_{2n}-\alpha_n^2(c_{44}-2H)f_{2n}+\alpha_n(c_{44}+2c_{31}-2P)f'_{1n} &= 0. \end{aligned}$$

Z (3.2) wynika, że

$$(3.3) \quad f_{2n}(z) = \frac{1}{\alpha_n^3} a_1 f'''_{1n}(z) + \frac{1}{\alpha_n} a_2 f'_{1n}(z),$$

gdzie

$$(3.4) \quad \begin{aligned} a_1 &= \frac{2(c_{33}-2P)(c_{44}-2P)}{(c_{44}-2H)(c_{44}+2c_{13}-2H)}, \\ a_2 &= \frac{(c_{44}+2c_{13}-2H)(c_{44}+2c_{31}-2P)-4(c_{11}-2H)(c_{33}-2P)}{(c_{44}-2H)(c_{44}+2c_{13}-2H)}. \end{aligned}$$

Po wyeliminowaniu  $f_{2n}(z)$  z (3.2), otrzymujemy następujące zwyczajne równanie różniczkowe na funkcję  $f_{1n}(z)$

$$(3.5) \quad f_{1n}^{IV}-2b\alpha_n^2 f''_{1n}+c\alpha_n^4 f_{1n} = 0,$$

gdzie

$$(3.6) \quad \begin{aligned} b &= \frac{4(c_{11}-2H)(c_{33}-2P)+(c_{44}-2H)(c_{44}-2P)-(c_{44}+2c_{13}-2H)(c_{44}+2c_{31}-2P)}{4(c_{33}-2P)(c_{44}-2P)}, \\ c &= \frac{(c_{11}-2H)(c_{44}-2H)}{(c_{33}-2P)(c_{44}-2P)}. \end{aligned}$$

Dla przypadku  $b^2 \neq c$ , ogólne rozwiązanie równania (3.5) jest następujące:

$$(3.7) \quad f_{1n}(z) = A_{1n} e^{\alpha_n r_1 z} + A_{2n} e^{-\alpha_n r_1 z} + A_{3n} e^{\alpha_n r_2 z} + A_{4n} e^{-\alpha_n r_2 z},$$

gdzie  $A_{in}$  oznaczają stałe całkowania, zaś

$$(3.8) \quad r_1 = \sqrt{b + \sqrt{b^2 - c}}, \quad r_2 = \sqrt{b - \sqrt{b^2 - c}}.$$

Jeśli  $b^2 = c$ , równanie (3.5) posiada całkę ogólną w postaci

$$(3.9) \quad f_{1n}(z) = (B_{1n} + zB_{2n})e^{\alpha_n r z} + (B_{3n} + zB_{4n})e^{-\alpha_n r z},$$

gdzie  $B_{in}$  są stałymi całkowania, a  $r = \sqrt{b}$ .

Podstawienie (3.1) do warunków brzegowych (2.9) daje następujące równanie przesłane dla wyznaczenia parametru  $\alpha_n$ :

$$(3.10) \quad J_1(\alpha_n R) = 0,$$

skąd

$$(3.11) \quad \alpha_n = \frac{\omega_n}{R},$$

przy czym  $\omega_n$  oznacza  $n$ -te miejsce zerowe funkcji Bessela  $J_1(x)$ .

Rozważmy kolejno dwa przypadki zamocowania powierzchni czołowych walca.

**I Przypadek. Warunki brzegowe w przemieszczeniach.** Podstawienie (3.1) do (2.10) oraz wykorzystanie (3.3) daje następujące warunki brzegowe dla funkcji  $f_{1n}(z)$ .<sup>1)</sup>

$$(3.12) \quad \begin{aligned} f_1(\pm h) &= 0, \\ a_1 f_1''(\pm h) + \alpha^2 a_2 f_1'(\pm h) &= 0. \end{aligned}$$

Jeśli podstawić całkę ogólną (3.7) lub (3.9) do warunków brzegowych (3.12), otrzymuje się jednorodny liniowy układ równań algebraicznych dla wyznaczenia stałych całkowania. Warunek istnienia niezerowego rozwiązania dla założonej małej deformacji wymaga, aby stałe całkowania  $A_i$  (lub odpowiednio  $B_i$ ) nie były jednocześnie równe zero. Wynika stąd znikanie wyznacznika  $\Delta$  utworzonego z wyrazów stojących przy  $A_i$  (lub odpowiednio  $B_i$ ).

Można pokazać, że warunek  $\Delta = 0$  rozkłada się na dwa warunki:  $\Delta_1 = 0$  i  $\Delta_2 = 0$ , z których pierwszy odpowiada utracie stateczności, gdy  $f_1(z)$  jest funkcją parzystą argumentu  $z$ ; wówczas na podstawie (3.3)  $f_2(z)$  jest funkcją nieparzystą (por. rys. 1a). Warunek  $\Delta_2 = 0$  odpowiada nieparzystej funkcji  $f_1(z)$  i parzystej funkcji  $f_2(z)$  (por. rys. 1b).

W przypadku, gdy  $b^2 \neq c$  mamy

$$(3.13) \quad \Delta_1 \cdot \Delta_2 = \left[ \frac{r_1}{r_2} \frac{a_1 r_1^2 + a_2}{a_1 r_2^2 + a_2} \frac{\text{th } \lambda r_1 \kappa \omega}{\text{th } \lambda r_2 \kappa \omega} - 1 \right] \left[ \frac{r_1}{r_2} \frac{a_1 r_1^2 + a_2}{a_1 r_2^2 + a_2} \frac{\text{th } \lambda r_2 \kappa \omega}{\text{th } \lambda r_1 \kappa \omega} - 1 \right] = 0,$$

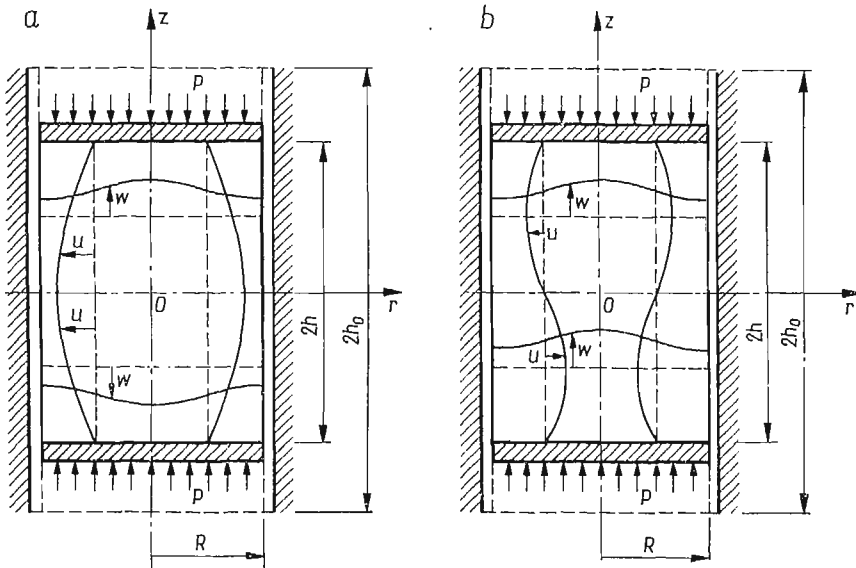
gdzie oznaczono  $\kappa = h_0/R$ .

Dla danego parametru geometrycznego  $\kappa$  i potencjału odkształceń  $W$ , mniejszy pierwiastek równania (3.13) (przy różnych  $n$ ) przedstawia poszukiwany krytyczny parametr deformacji  $\lambda_{kr}$ .

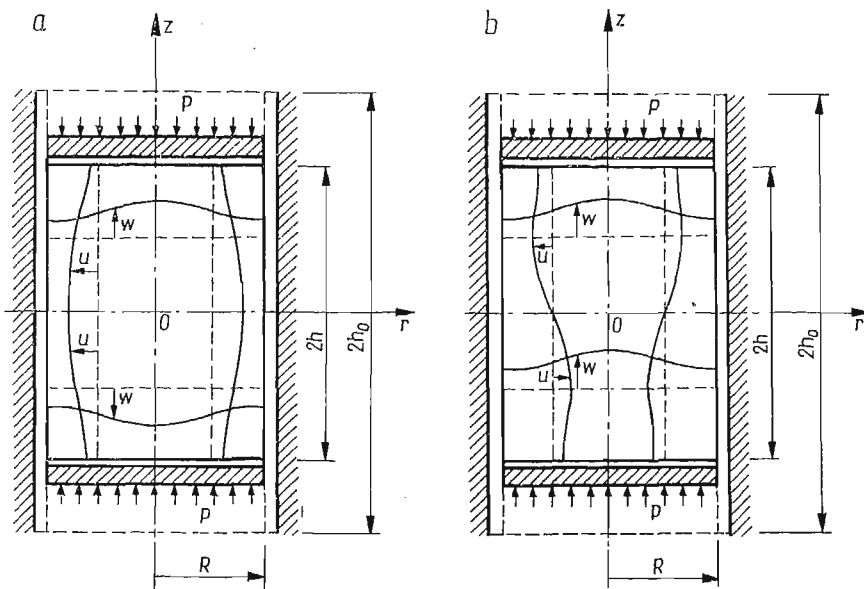
W szczególnym przypadku, gdy  $b^2 = c$ , po podstawieniu ogólnego rozwiązania (3.9) do warunków brzegowych (3.12), otrzymamy

$$(3.14) \quad \Delta_1 \cdot \Delta_2 = \left[ \frac{3a_1 r + a_2}{a_1 r^2 + a_2} \frac{\text{sh } 2\lambda r \kappa \omega}{2\lambda r \kappa \omega} + 1 \right] \left[ \frac{3a_1 r + a_2}{a_1 r^2 + a_2} \frac{\text{sh } 2\lambda r \kappa \omega}{2\lambda r \kappa \omega} - 1 \right] = 0.$$

<sup>1)</sup> W dalszym ciągu pominiemy wskaźnik  $n$ .



Rys. 1



Rys. 2

Warunek  $b^2 = c$  może być spełniony tylko dla szczególnych wartości parametru  $\lambda$ , dla których należy sprawdzić czy prawdziwe jest (3.14). W dalszym ciągu rozpatrujemy tylko ogólniejszy przypadek, gdy  $b^2 \neq c$ .

**II Przypadek.** «Mieszane» warunki brzegowe. W przypadku «mieszanych» warunków brzegowych (2.13) spełnionych na czołach walca, po podstawieniu (3.1) do (2.13), otrzymujemy zależności

$$(3.15) \quad \begin{aligned} f_2(\pm h) &= 0, \\ f_1'(\pm h) - \alpha f_2(\pm h) &= 0, \end{aligned}$$

które przy pomocy (3.3) sprowadzają się do postaci

$$(3.16) \quad f_1'(\pm h) = 0, \quad f_1''(\pm h) = 0.$$

Jeśli  $b^2 \neq c$ , warunek stateczności przy symetrycznej (rys. 2a) i antysymetrycznej postaci równowagi obojętnej (rys. 2b) jest następujący:

$$(3.17) \quad \Delta_1 \cdot \Delta_2 = [\operatorname{ch} \lambda r_1 \kappa \omega \cdot \operatorname{ch} \lambda r_2 \kappa \omega] \cdot [\operatorname{sh} \lambda r_1 \kappa \omega \cdot \operatorname{sh} \lambda r_2 \kappa \omega] = 0.$$

Widać, że dla rzeczywistych  $r_1$  i  $r_2$  warunek (3.17) nie może być spełniony. A zatem dla materiałów hipersprężystych, dla których mają miejsce zależności:  $b^2 - c > 0$ ,  $b > 0$ ,  $c > 0$ , dla dowolnego  $\lambda$ , nie istnieje osiowosymetryczna postać utraty wewnętrznej stateczności przy rozważonych warunkach na powierzchniach czołowych walca.

Otrzymane równania przestępne (3.13) i (3.17), z których należy wyznaczyć krytyczny parametr  $\lambda_{kr}$  lub odpowiednio krytyczne obciążenie  $P_{kr}$ , można sprowadzić do bardziej wygodnej postaci w zależności od tego, czy pierwiastki  $r_1$  i  $r_2$  są rzeczywiste, urojone lub zespolone. Oprócz tego z (3.13) i (3.17) można uzyskać przypadki graniczne: bardzo długiego walca (gdy  $\kappa \rightarrow \infty$ ) i bardzo krótkiego walca (gdy  $\kappa \rightarrow 0$ ). Wówczas warunki stateczności znacznie się upraszczają.

#### 4. Samosprężoność zagadnienia brzegowego

Zgodnie z najogólniejszym kryterium kinematycznym, ciało znajduje się w stanie równowagi trwałej, jeśli amplitudy dodatkowych dopuszczalnych przemieszczeń, wywołane oddziaływaniem zewnętrznym, pozostają małe, gdy same oddziaływania są wystarczająco małe. Definicja ta jest równoważna wykorzystanemu w p. 3 statycznemu kryterium stateczności, jeśli odpowiednie zagadnienie brzegowe jest samosprężone. Jak pokazano w [7], samosprężoność zagadnienia brzegowego wymaga spełnienia następującego warunku:

$$(4.1) \quad \int_S n_r [w_s^2 (\tau^{rs} + \tau^{rs} \nabla_p w_p^1 + \tau^{rp} \nabla_p w_s^1) - w_s^1 (\tau^{rs} + \tau^{rs} \nabla_p w_p^2 + \tau^{rp} \nabla_p w_s^2)] dS = 0,$$

gdzie  $S$  oznacza powierzchnię ograniczającą ciało;  $n_r$  — kowariantne składowe jednostkowego wektora normalnego do  $S$ ;  $w_s^1, w_s^2$  oraz  $w^1, w^2$  — odpowiednio kowariantne oraz kontrawariantne składowe dwóch pól wektorowych, które spełniają warunki brzegowe.  $\tau^{ij}, \tau^{ij}$  są kontrawariantnymi składowymi tensorów naprężeń — odpowiadających przemieszczeniom  $w^1, w^2$ .



Ażeby sprawdzić spełnienie warunku (4.1), rozważmy kolejno całą powierzchnię po powierzchni tworzącej  $S_1$  oraz po powierzchni czołowej  $S_2$ .

Na powierzchni  $S_1 (r = R)$  z jednostkowym wektorem normalnym  $\mathbf{n}(1, 0, 0)$  spełnione są warunki

$$(4.2) \quad w_1 = u = 0, \quad w_2 = 0, \quad \tau^{12} = \tau^{13} = 0, \quad \tau^{11} = \text{const}, \quad \tau'^{12} = \tau'^{23} = 0.$$

Warunek (4.1) dla powierzchni  $S_1$  sprowadza się do

$$(4.3) \quad \int_{S_1} (w^2 w_{,r} - w^1 w_{,r}) dS_1 = 0.$$

Ponieważ  $u_{,z} + w_{,r} = 0$  i  $u = 0$  na  $S_1$ , mamy także  $w_{,r} = 0$  na  $S_1$ , a zatem warunek (4.3) spełniony jest tożsamościowo.

Rozważmy teraz, przy różnych warunkach brzegowych, warunek samosprężoności (4.1) na powierzchniach czołowych walca  $S_2^\pm (z = \pm h)$  z jednostkowymi wektorami normalnymi  $\mathbf{n}(0, 0, \pm 1)$ .

**Przypadek I.** Gdy warunki brzegowe dane są w przemieszczeniach [(por. (2.10)), wyrażenie podcałkowe w (4.1) znika i warunek samosprężoności spełniony jest tożsamościowo.

**Przypadek II.** Gdy warunki brzegowe są «mieszane» [por. (2.11)], po wykorzystaniu

$$(4.4) \quad \tau^{13} = \tau^{23} = 0, \quad \tau^{33} = \text{const} \quad \text{na} \quad S_2^\pm,$$

zależność (4.1) przybiera postać

$$(4.5) \quad \int_{S_2^+} (\dot{u}u_{,z} - \dot{u}u_{,z}) dS_2^+ - \int_{S_2^-} (\dot{u}u_{,z} - \dot{u}u_{,z}) dS_2^- = 0.$$

Z faktu, że  $u_{,z} + w_{,r} = 0$  i  $w = 0$  na  $S_2^\pm$  wynika, że również  $u_{,z} = 0$  na  $S_2^\pm$ , a zatem (4.5) spełnione jest tożsamościowo.

Pokazaliśmy, że sformułowane zagadnienia brzegowe na wartości własne są samosprężone oraz, że wyprowadzone przestępne równania stateczności są poprawne. Dalsze odkształcanie walca po osiągnięciu wyznaczonych krytycznych wartości parametru  $\lambda$ , chociaż nie prowadzi do zewnętrznej zmiany ciała, wywołuje zmiany charakteru stanu naprężenia i odkształcenia. Jednorodny stan naprężenia nie jest dalej stanem statecznym i przy nowym powstałym rozkładzie naprężeń materiał może utracić swoje jakościowe własności wcześniej niż tego oczekujemy bez uwzględnienia zjawiska wewnętrznej utraty stateczności.

#### Literatura cytowana w tekście

1. M. A. BIOT, *Internal buckling under initial stress in finite elasticity*, Proc. Roy. Soc., 1354, A 273 (1963).
2. M. A. BIOT, *Nonlinear theory of elasticity and the linearized case for a body under initial stress*, Phil. Mag., 27 (1939).
3. Z. WESOŁOWSKI, *Stability of a full elastic sphere uniformly loaded on the surface*, Arch. Mech. Stos., 5, 16 (1964).
4. B. DUSZCZYK, *Stateczność pełnego walca obciążonego ciśnieniem hydrostatycznym*, Mech. Teoret. Stos. 4, 5 (1967).
5. A. E. GREEN, W. ZERNA, *Theoretical Elasticity*, Oxford 1954.

6. A. E. GREEN, R. S. RIVLIN, R. T. SHIELD, *General theory of small elastic deformations superposed on finite elastic deformations*, Proc. Roy. Soc., A **211** (1952).
7. GUO ZHONG-HENG, W. URBANOWSKI, *Stability of non-conservative systems in the theory of elasticity of finite deformations*, Arch. Mech. Stos., **2**, **15** (1963).

## Р е з ю м е

ВНУТРЕННЯЯ УСТОЙЧИВОСТЬ УПРУГОГО КРУГОВОГО ЦИЛИНДРА  
ПРИ КОНЕЧНОЙ ДЕФОРМАЦИИ

Рассматривается устойчивость полного кругового цилиндра из гиперупругого однородного материала с наиболее общей физической характеристикой. На торцах цилиндра приложена нормальная нагрузка, вызывающая конечную деформацию. Стенки боковой поверхности не могут перемещаться в радиальном направлении. Условие потери устойчивости выводится из требования существования ненулевого решения для малой возможной деформации, наложенной на начальную конечную деформацию. Рассмотрены два случая граничных условий на основаниях цилиндра: условия в перемещениях и смешанные граничные условия. Показано, что в каждом из них граничные задачи на собственные значения самосопряженные и, следовательно, полученные уравнения устойчивости являются корректными с точки зрения самого общего кинематического критерия устойчивости.

## S u m m a r y

INTERNAL STABILITY OF AN ELASTIC CIRCULAR CYLINDER UNDER  
FINITE DEFORMATIONS

The problem of stability of a full circular cylinder made of a hyperelastic homogeneous material with the most general physical characteristics is discussed. The finite deformations are produced by normal loading on the frontal surfaces of the cylinder. The points of lateral surface of the cylinder cannot be freely displaced in the radial direction. The condition of stability loss results from the assumption of existence of non-zero solutions for small admissible deformations superposed on initial finite deformations. Two cases of the boundary conditions determined on the frontal surfaces of the cylinder are discussed: the boundary conditions given in displacements and those of the «mixed» type. It is shown that for the both cases the boundary eigenvalue problems are self-adjoint and thus the obtained stability conditions are correct when the most general kinematic criterion of stability is applied.

INSTYTUT MECHANIKI TECHNICZNEJ  
BUŁGARSKIEJ AKADEMII NAUK  
SOFIA

*Praca została złożona w Redakcji dnia 4 grudnia 1970 r.*