

ZAGADNIENIA MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGŁYCH
DLA OBSZARÓW NIEKANONICZNYCH

PRZEGLĄD PRAC RADZIECKICH

G. N. SAWIN, A. N. GUŻ, A. S. KOSMODAMIANSKIJ
(KIJÓW, DONIECK)

Ostatnio w pracach autorów niniejszego przeglądu, ich współpracowników i kontynuatorów rozpatrywane były poszczególne klasy zagadnień mechaniki ośrodka ciągłego dla niekanonicznych (tj. nie dających możliwości otrzymania rozwiązania metodą bezpośredniego rozdzielenia zmiennych) obszarów jednoczłonowych i wieloczłonowych. Są to zagadnienia koncentracji naprężeń w pobliżu otworów w powłokach, płaskie zagadnienia momentowej teorii sprężystości, płaskie zagadnienia dynamicznej teorii sprężystości, dwuwymiarowe zagadnienia fizycznie nieliniowej teorii, zagadnienia aerohydrodynamicznej teorii sprężystości dla cieczy ściśliwej i nieściśliwej, problemy zginania płyt z punktu widzenia różnych uściślonych teorii, zagadnienia zginania płyt na podłożu sprężystym, zagadnienia opływu przez strumień cieczy, płaskie zagadnienia dla ośrodków wieloczłonowych i inne.

Przy rozwiązywaniu tych zagadnień stosuje się pewne jednolite podejście oparte na zastosowaniu metod teorii perturbacji i konstruowaniu nieskończonych quasi-regularnych układów algebraicznych, do rozwiązania których sprowadzają się wymienione zagadnienia. Zastosowanie tych metod w innych, zbliżonych dziedzinach również daje możliwość rozpatrzenia obszernych klas zagadnień.

Niniejsza praca poświęcona jest krótkiemu przeglądowi wspomnianego kręgu zagadnień.

1. Obszary jednoczłonne

Gdy rozwiązania problemów dają się przedstawić w postaci funkcji harmonicznych, rozwiązanie zagadnień brzegowych dla obszarów jednoczłonowych upraszcza się znacznie, w tym sensie, że zmienne w równaniu Laplace'a dają się rozdzielić praktycznie dla wszystkich stosowanych układów współrzędnych. Dla wielu zagadnień rozwiązania ogólne wyrażone są przez rozwiązania równań Helmholtza, co znacznie zawęża krąg zagadnień, które można rozwiązać za pomocą rozdzielenia zmiennych.

Zastosowanie metody perturbacji kształtu granicy, związanej z parametrem charakteryzującym odchylenie od obszaru kanonicznego, pozwala w każdym z przybliżeń na sprowadzenie zagadnienia brzegowego do zagadnienia brzegowego dla obszaru kanonicznego.

Trudność znalezienia rozwiązań szczególnych dla krzywoliniowych układów współrzędnych komplikuje zastosowanie metody perturbacji kształtu granicy do praktycznego rozwiązywania zagadnień brzegowych.

W celu pokonania wskazanych trudności zaproponowano pewien wariant metody perturbacji kształtu granicy, sprowadzający problem w każdym przybliżeniu do rozwiązania jednorodnych równań różniczkowych. W celu spełnienia warunków granicznych wyznaczono operatory różniczkowe, konieczne przy rozwiązywaniu zagadnień w zerowym, pierwszym i drugim przybliżeniu. Postać tych operatorów określona jest głównie nie przez samą postać warunków granicznych, a przez kształt obszaru. Wspomniane uproszczenia zostały osiągnięte dzięki temu, że rozwiązania równań podstawowych rozważane były w współrzędnych związanych z kształtem, w określonym sensie bliskiego obszaru kanonicznego, a przejście do współrzędnych związanych z kształtem obszaru niekanonicznego dokonywane było przy spełnieniu warunków brzegowych. Pierwszą pracą, w której podano taki wariant metody perturbacji kształtu granicy dla niektórych obszarów w zastosowaniu do zagadnień koncentracji naprężeń w pobliżu otworów w powłokach, w sformułowaniu G. N. SAWINA, była praca A. N. GUZIA [27]. W pracy G. N. SAWINA i A. N. GUZIA [131] zaproponowano zastosowanie tego wariantu metody perturbacji kształtu granicy do badania zagadnień koncentracji naprężeń w powłokach w pobliżu dowolnych krzywoliniowych otworów o gładkim profilu, przy czym, w charakterze obszaru kanonicznego przyjęto obszar nieskończony z otworem kołowym. Do chwili obecnej brak ścisłego dowodu zbieżności metody perturbacji kształtu granicy w postaci [27] i [131], jednak przy rozwiązywaniu konkretnych zagadnień wykazano jej praktyczną zbieżność. Przy pomocy tej metody zostały rozwiązane rozpatrzone poniżej klasy zagadnień.

Za pomocą tej metody rozwiązano liczne zagadnienia koncentracji naprężeń w pobliżu krzywoliniowych otworów w powłokach. Tak więc w pracy G. N. SAWINA i A. N. GUZIA [133] metodę tę zastosowano w zagadnieniach koncentracji naprężeń w pobliżu otworów w powłokach, których brzegi wzmocnione były za pomocą cienkich żeber sprężystych; zbadano także rozkład naprężeń w pobliżu eliptycznego wzmocnionego otworu w powłoce sferycznej. Przypadek swobodnego otworu eliptycznego w powłoce sferycznej rozpatrzony jest w pracy G. N. SAWINA i A. N. GUZIA [130], zaś przypadek kwadratowego i równobocznego trójkątnego otworu z zaokrąglonymi narożami w pracach A. N. GUZIA [32] i [37]. Stan naprężenia w pobliżu otworów analogicznego kształtu w powłoce sferycznej, zakrytych idealnie sztywnymi pokrywami, zbadany był w pracy K. I. SZNERIENKO [152]. Przypadek złącza powłoki sferycznej z pochyłym krótkim cylindrem rozpatrywany był przez B. A. KUDRIAWCEWA [116].

Rozkład naprężeń w pobliżu małych otworów: eliptycznego oraz w kształcie kwadratu i trójkąta równobocznego z zaokrąglonymi narożami w obrotowej powłoce walcowej, przy różnych obciążeniach, zbadany został w pracach G. N. SAWINA i A. N. GUZIA [131], A. N. GUZIA [29, 30, 34, 36, 47], A. N. GUZIA i S. A. GOŁOBORODKO [49] i S. A. GOŁOBORODKO [18].

Metoda przedstawiona w pracach [27] i [131] została zastosowana w pracach W. D. KUBIENKO [111—115] do zbadania płaskich zagadnień dyfrakcji fal sprężystych na walcach krzywoliniowych. Zbadano dynamiczne zagadnienia koncentracji naprężeń w pobliżu otworu eliptycznego i kwadratowego z zaokrąglonymi narożami pod działaniem fal po-

przecznym i podłużnym, jak również pod działaniem oscylującego ciśnienia. Zauważono, że przy określonych długościach fal maksymalny współczynnik koncentracji osiągniany jest w pewnej odległości od brzegu.

W monografii G. N. SAWINA [137] rozpatrzono płaskie zagadnienia momentowej teorii sprężystości dla dwu wariantów sformułowania zagadnień, przytoczono podstawowe relacje metody perturbacji kształtu granicy w postaci [27] i [131], niezbędne przy rozwiązywaniu zagadnień dla otworów krzywoliniowych, zbadano również rozkład naprężeń na brzegu otworu eliptycznego. W pracach J. N. NIEMISZA [126—128] za pomocą powyższej metody zbadano rozkład naprężeń dla otworów eliptycznych, kwadratowych z zaokrąglonymi narożnikami, a także otworów innych kształtów przy różnego rodzaju obciążeniach; rozpatrzono wpływ sztywności pierścieni wzmacniających i określono rolę naprężeń momentowych. W pracach tych wyjaśniono zagadnienie maksymalnego wpływu naprężeń momentowych na wielkość koncentracji naprężeń przy różnego rodzaju obciążeniach i różnych promieniach zaokrąglenia naroży.

Zagadnienie określenia oporu ciał o nieopływowych kształtach, przy zlinearyzowanym sformułowaniu, sprowadza się do rozwiązania równań Naviera—Stokesa zlinearyzowanych według Oseena. W pracach E. W. BRUNIACKIEGO [5] i [6] metoda perturbacji kształtu brzegu w postaci [27] i [131] została zastosowana do badania oporu walców o krzywoliniowym konturze przekroju poprzecznego. Rozpatrzono, przy różnych kątach natarcia, walce eliptyczne, jak również walce o przekroju w postaci kwadratu i trójkąta równobocznego z zaokrąglonymi narożnikami. Otrzymano rozwiązania uwzględniające zerowe, pierwsze i drugie przybliżenie i porównano je z danymi doświadczalnymi.

Obszerny program badań poświęcono dwuwymiarowym zagadnieniom fizycznie nieliniowego ciała, dla którego podstawowe zależności przyjęto w postaci Kauderera. Pierwszą pracą poświęconą krzywoliniowym otworom była praca G. N. SAWINA, A. N. GUZIA i I. A. CURPAŁA [132], w której zaproponowano metodę rozwiązywania płaskich, fizycznie nieliniowych zagadnień teorii sprężystości dla nieskończonej płaszczyzny osłabionej przez krzywoliniowy otwór. Została tu w sposób istotny wykorzystana metoda perturbacji kształtu granicy w postaci [27] i [131]. W tej samej pracy zbadano rozkład naprężeń w pobliżu otworu eliptycznego przy wszechstronnym rozciąganiu. Wypadek kwadratowego otworu z zaokrąglonymi narożnikami rozpatrzony jest w pracy I. A. CURPAŁA [139]. Szereg zagadnień dotyczących krzywoliniowych otworów, tak swobodnych jak i wzmocnionych, przy różnego rodzaju obciążeniach zbadano w pracach I. A. CURPAŁA [140, 144, 145, 147]. Analogiczne zagadnienia dotyczące koncentracji naprężeń termicznych w fizycznie nieliniowej płycie rozpatrzone były w pracy I. A. CURPAŁA [141], a w pracy I. A. CURPAŁA i N. A. SZULGI [138] metoda ta została rozszerzona na przypadek wyznaczania koncentracji naprężeń w pobliżu otworów krzywoliniowych w powłokach, przy fizycznie nieliniowym prawie sprężystości.

W pracach N. A. SZULGI [154—156] rozpatrzono było wyznaczanie stanu naprężenia w pobliżu otworu eliptycznego oraz kwadratowego i trójkątnego z zaokrąglonymi narożnikami, przy zginaniu cienkiej, fizycznie nieliniowej płyty sprężystej.

We wszystkich tych pracach otrzymano liczne wyniki liczbowe ilustrujące wpływ fizycznej nieliniowości materiału na wartość współczynnika koncentracji naprężeń. Przegląd tych wyników zawarty jest w pracy G. N. SAWINA, A. N. GUZIA i I. A. CURPAŁA [136].

Dla przypadku podstawowych zależności innych niż sformułowane przez Kauderera, koncentracja naprężeń w pobliżu otworów krzywoliniowych w płycie rozpatrzona została w pracach I. A. CURPAŁA [142] i [146].

2. Obszary wielospójne

Przy badaniu wielu zagadnień dla obszarów wielospójnych o kołowych, krzywoliniowych brzegach, wskutek występowania w rozwiązaniu ogólnym funkcji spełniających równanie Helmholtza komplikuje się znacznie proces wyznaczania rozwiązania. W tym przypadku, już nawet we współrzędnych dwubiegunowych, zmienne nie dają się rozdzielić. Dla rozwiązywania takich zagadnień zaproponowano metodę będącą kombinacją metody perturbacji kształtu granicy w postaci [27, 131] i metody Schwarza. Rozwiązanie przyjmuje się w postaci sumy rozwiązań zupełnych dla odpowiednich wewnętrznych i zewnętrznych obszarów w biegunowym układzie współrzędnych. W charakterze małego parametru wybiera się największy z parametrów charakteryzujących odchylenie kształtu każdego z obszarów jednospójnych od kształtu kołowego. Stosuje się metodykę opracowaną w pracy [131] w wyniku czego, w każdym z przybliżeń, otrzymuje się zagadnienie brzegowe dla obszaru o odpowiednim stopniu spójności, jednakże ograniczonego już teraz okręgami. Takie podejście zostało urzeczywistnione w pracy G. N. SAWINA i A. N. GUZIA [134] oraz w pracy A. N. GUZIA [49], gdzie skonstruowane zostały operatory dla zerowego, pierwszego i drugiego przybliżenia przy dowolnych kształtach granicy bez załomów.

Przy rozwiązywaniu zagadnień dla obszarów wielospójnych ograniczonych okręgami stosuje się rozkłady funkcji harmonicznych od jednego bieguna do drugiego [134] i wykorzystuje się wnioski wynikające z twierdzenia o dodawaniu dla funkcji walcowych. Wnioski te, dla zagadnienia zewnętrznego i zagadnienia wewnętrznego, przytoczone były w pracy A. N. GUZIA [44]. Wykorzystuje się zamianę nieznanymi stałymi i przy określonej gładkości prawych stron warunków granicznych udaje się wykazać, że w przypadku obszaru o skończonej spójności otrzymane nieskończone układy mają wyznacznik typu normalnego, co uzasadnia możliwość zastosowania metod przybliżonych. Jeżeli odpowiednie zagadnienie brzegowe posiada jednoznaczne rozwiązanie, to okazuje się, że odpowiedni nieskończony układ równań algebraicznych ma jednoznaczne zbieżne rozwiązanie. Analogiczna metoda została niezależnie zaproponowana dla zagadnień dyfrakcji fal elektromagnetycznych na walcach w przestrzeni nieskończonej w pracach J. A. IWANOWA (tylko dla zagadnienia zewnętrznego)¹⁾.

W pracy W. T. GOŁOWCZANA [25] rozwinięta została, oparta na zastosowaniu związków Lommela, metoda badania układów nieskończonych dla zagadnień periodycznych.

Rozpatrzona powyżej metoda zastosowana była do szeregu zagadnień ośrodka mechanicznie ciągłego dla obszarów wielospójnych o brzegach kołowych. Zatrzymamy się na niektórych spośród nich.

W pracach A. N. GUZIA [35, 48] została zaproponowana metoda rozwiązywania zagadnień równowagi powłok walcowej i sferycznej osłabionych przez skończoną liczbę

¹⁾ J. A. Iwanow, *Dyfrakcja elektromagnitnych wołn na dwuch tielach*, Izd-wo „Nauka i Tiejchnika”, Minsk 1968.

otworów kołowych, a w pracach [38, 39, 48] wyniki te zostały uogólnione na przypadek zagadnień okresowych i podwójnie okresowych. Badanie układów nieskończonych dla powłoki sferycznej, tak w przypadku skończonej liczby otworów, jak i w przypadku zagadnienia okresowego, było przeprowadzone w pracach A. N. GUZIA [40], A. N. GUZIA i K. I. SZNIERIENKO [52], i W. T. GOŁOWCZANA i K. I. SZNIERIENKO [21], rozwiązaniom konkretnych zagadnień poświęcone są prace [41, 50, 153].

W pracy B. L. PIELECHA [129] metodę opisaną w pracach [134] i [48] zastosowano do rozwiązania zagadnień zginania płyt dla obszarów wielospójnych w teorii płyt typu Timoszenki. Okazało się, że można tu przenieść wszystkie wyniki otrzymane dla powłok i dla płaskiego zagadnienia momentowej teorii sprężystości.

Praca A. N. GUZIA i S. F. SZYSZKANOWEJ [53] poświęcona jest badaniu zagadnień zginania płyt na podłożu sprężystym, dla przypadku obszarów wielospójnych ograniczonych za pomocą okręgów. W przypadku określonej gładkości prawych członów warunków brzegowych, udało się udowodnić quasi-regularność nieskończonych układów i jednoznaczność rozwiązań.

G. N. SAWIN i A. N. GUZ [134, 135] zaproponowali metodę rozwiązywania płaskich zagadnień momentowej teorii sprężystości dla obszarów wielospójnych, ograniczonych przez gładkie brzegi bez załomów. W pracach tych podano operatory dla zerowego, pierwszego i drugiego przybliżenia dla dowolnych otworów, jak również podstawowe nierówności służące do badania nieskończonych układów dla obszaru o dowolnej spójności. W charakterze przykładu rozpatrzono rozwiązanie zagadnienia dla nieskończonej płaszczyzny osłabionej przez dwa jednakowe kołowe otwory. Materiał zawarty w pracach [134, 135] stanowi podstawę rozwiązań obszernej klasy zagadnień odnoszących się do wyjaśnienia wpływu asymetrii tensora naprężenia na koncentrację naprężeń w obszarach wielospójnych.

W pracach A. N. GUZIA i I. A. CURPAŁA [55, 56] rozpatrywaną metodę uogólniono na rozwiązania płaskich, fizycznie nieliniowych problemów teorii sprężystości dla obszarów wielospójnych, ograniczonych za pomocą okręgów (korzystając z podstawowych związków w postaci Kauderera.) Dla znalezienia rozwiązań szczególnych, prawe strony rozkładano w szeregi zbieżne w kole, którego promień równy był odległości od środka najbliższego otworu. Rozpatrzono przykład liczbowy dla nieskończonej płyty osłabionej przez dwa otwory kołowe i określono wpływ nieliniowości materiału.

W szeregu prac metoda rozwinięta w pracach [134, 48] stosowana była do badania zjawisk dynamicznych w układzie składającym się z pewnej liczby niekoncentrycznych powłok walcowych z przepływającą pomiędzy nimi cieczą ściśliwą i nieściśliwą. Skonstatowano szereg zjawisk powstających na skutek wzajemnego oddziaływania pomiędzy powłokami. Do tego cyklu należy zaliczyć prace W. N. BUJWOŁA i W. T. NOWACKIEGO [8], W. N. BUJWOŁA i A. N. GUZIA [10—13].

W pracach W. T. GOŁOWCZANA [22—26], W. T. GOŁOWCZANA i A. N. GUZIA [20, 54] i A. N. GUZIA [42, 44] zbadano płaskie dynamiczne zagadnienia teorii sprężystości dla skończonego i nieskończonego obszaru o skończonej spójności, oraz zagadnienia okresowe i podwójnie okresowe, przy czym te ostatnie rozpatrywano również i dla ciała lepkosprężystego. W pracach tych przeanalizowano układy nieskończone, oceniono rząd niewiadomych

i rozpatrzono konkretne zadania. Skonstatowano szereg ciekawych zjawisk charakterystycznych dla dynamiki i zbudowano krzywe rezonansowe.

3. Wykorzystanie teorii funkcji zmiennej zespolonej dla izotropowych ciał wielospójnych

W pierwszych dwu rozdziałach rozpatrywano metody pozwalające na skuteczne pokonywanie trudności powstających przy badaniu stanu naprężeń ośrodków w tych przypadkach, gdy zmienne nie dają się rozdzielić w sposób naturalny. Przy rozwiązywaniu wspomnianych zagadnień stosowano zmienne rzeczywiste.

Przy korzystaniu w szeregu zagadnień ze zmiennych zespolonych dają się zaobserwować analogiczne zjawiska. Podczas gdy dla jednospójnych płaskich ciał izotropowych, ograniczonych gładkimi brzegami, w warunkach brzegowych zawsze możliwe jest rozdzielenie zmiennych w sposób naturalny, to dla ciał wielospójnych takie rozdzielenie nie daje się przeprowadzić.

Należy zauważyć, że autorzy przeglądu podchodzą w sposób jednolity do rozwiązania zagadnień dla ciał wielospójnych przy zastosowaniu tak zmiennych zespolonych, jak i rzeczywistych. Ogólność tego podejścia polega na zbudowaniu metod przewidujących, przy rozpatrywaniu ciał wielospójnych, branie za podstawę kolejno jednego z brzegów obszaru, uwzględniając przy tym wpływ sąsiednich brzegów na stan naprężenia ośrodka. Wpływ ten uwzględnia się poprzez rozkład poszukiwanych funkcji w szeregi zbieżne na danym brzegu. Szeregi te buduje się w różny sposób w zależności od badanego zagadnienia. Podejście takie pozwala na sprowadzenie zagadnienia do rozwiązania nieskończonego układu algebraicznego, który, jak się okazuje, jest quasi-regularny przy dowolnym zbliżeniu brzegów ciała wielospójnego.

Ten ostatni fakt pozwala na otrzymanie metodą redukcji rozwiązania nieskończonego układu algebraicznego w dowolnym przybliżeniu.

Metoda ta przy wykorzystaniu zmiennych zespolonych dla izotropowych i anizotropowych ciał wielospójnych opracowana została w szeregu prac A. S. KOSMODAMIANSKIEGO.

Należy zauważyć, że częstokroć celowe jest otrzymanie od razu obciążonego, skończonego układu algebraicznego bez uprzedniego wyznaczenia układu nieskończonego. Pozwala to w sposób najprostsz i dostatecznie dokładny na przeprowadzenie odpowiedniej analizy stanu naprężeń badanego ciała.

Do najprostszych tego typu zagadnień należy zaliczyć skręcanie i zginanie siłą poprzeczną prętów wielospójnych. Zagadnienia takie zostały zbadane przez A. S. KOSMODAMIANSKIEGO w pracach [66—68, 100].

Zauważmy, że przy skręcaniu i zginaniu prętów anizotropowych nie powstają żadne nowe zasadnicze trudności, ponieważ wszystkie te zagadnienia sprowadzają się do całkowania przy różnych warunkach brzegowych równania harmonicznego z prawą stroną [69].

Badanie stanu naprężenia płaskich izotropowych ciał wielospójnych najprościej jest przeprowadzić w przypadku granic kołowych. Takie rozwiązania zamieszczone są w pracach [59, 70—80, 103, 104, 117].

Analogicznie konstruuje się rozwiązania zagadnień zginania wielospójnych izotropowych cienkich płyt [60, 81—84].

Dla wszystkich tych zagadnień efektywne wyniki otrzymuje się przez badanie rozkładu poszczególnych funkcji w szeregi według małego parametru związanego z odległościami pomiędzy brzegami otworów.

Przy rozważaniu ciał wielospójnych ograniczonych brzegami o kształcie eliptycznym, pojawiają się istotne trudności w tych przypadkach, gdy odległości pomiędzy konturami są małe. Tutaj rozkład w szereg według małego parametru staje się nieefektywny. W tych przypadkach celowo jest przeprowadzać wspomniany rozkład według wielomianów Fabera. Takie podejście opisane jest w pracach [4, 57, 58, 86].

Dla ciał izotropowych osłabionych przez krzywoliniowe otwory różne od eliptycznych (kołowych), otrzymanie nieskończonego układu algebraicznego nie przedstawia istotnych trudności [87]. Jednakże efektywność otrzymywania wyników liczbowych zmniejsza się w sposób istotny, co szczególnie daje się zauważyć dla otworów położonych blisko siebie. Powstałe trudności można zredukować przez zastosowanie metod przybliżonych opracowanych w pracach A. S. KOSMODAMIANSKIEGO, J. W. MYSOWSKIEGO i R. M. MYSOWSKIEJ [88—91, 109].

Należy zauważyć, że płaskie zagadnienia dla płyt z otworem o wolnych brzegach i z otworami o brzegach wzmacnianych za pomocą doskonale sztywnych pierścieni dobrze jest rozwiązywać jednocześnie, ponieważ w toku rozwiązania daje się zauważyć różnica jedynie w pewnych stałych.

Fizycznie nieliniowe zagadnienia teorii sprężystości dla ciał wielospójnych z zastosowaniem zmiennych zespolonych rozpatrzone były przez A. S. KOSMODAMIANSKIEGO i I. A. CURPAŁA w pracach [92, 110].

4. Zastosowanie teorii funkcji zmiennych zespolonych dla ośrodków anizotropowych

Dla anizotropowych ciał płaskich zmienne rozdzielają się jedynie w tym przypadku, gdy w obszarze jednospójnym brzeg da się przedstawić za pomocą równania drugiego stopnia (brzeg eliptyczny lub paraboliczny).

Dla przypadku, gdy ciało osłabione jest przez otwór krzywoliniowy różny od eliptycznego (kołowego), A. S. KOSMODAMIANSKIJ opracował przybliżoną metodę pozwalającą na wyrażenie jednych zmiennych przez drugie [93]. Mamy tu do czynienia z jednym z wariantów metody perturbacji kształtu granicy. Metoda ta ma tę cechę wspólną z metodą opisaną w rozdziale 1, że obie one spełniają warunki brzegowe z pewnym błędem, który można kontrolować w toku rozwiązania utrzymując go w granicach dowolnego przybliżenia.

Dla wielospójnych ciał anizotropowych nie udaje się rozdzielić zmiennych dla żadnego przypadku. Jednakże, jeżeli ciało anizotropowe ograniczone jest przez brzegi eliptyczne, można zawsze zastosować te metody, które zostały opracowane dla ciał izotropowych.

Badanie stanu naprężenia płyty anizotropowej osłabionej różną ilością otworów eliptycznych przeprowadzone było w pracach A. S. KOSMODAMIANSKIEGO i W. W. MIEGLINSKIEGO [94—98, 108].

Bardziej skomplikowane przypadki otworów wzmocnionych za pomocą sprężystych pierścieni bądź wkładek rozpatrzył W. A. SZWIECOW [148—151].

Zginanie skończonych płyt anizotropowych osłabionych otworami eliptycznymi zbadali W. W. MIENGLINSKI i G. M. IWANOW [61, 122—125].

Zagadnienia stanu naprężenia półpłaszczyzny anizotropowej osłabionej eliptycznym otworem zostały rozwiązane w pracach S. A. KAŁOJEROWA i A. S. KOSMODAMIANSKIEGO [65, 99]. Przy rozwiązaniu tych zagadnień warunki brzegowe na prostoliniowym brzegu są spełnione ściśle, a spełnienie warunków brzegowych na brzegu otworu prowadzi do nieskończonego układu algebraicznego, który pozostaje quasi-regularny przy dowolnym zbliżeniu otworu do brzegu prostoliniowego.

Przypadek, gdy do otworu wklejona jest wkładka sprężysta, a także gdy półpłaszczyzna osłabiona jest wieloma otworami eliptycznymi, zbadany został przez S. A. KAŁOJEROWA [62—64].

Jeżeli anizotropia ośrodka jest silna, to, jak pokazał A. S. KOSMODAMIANSKI [101], zagadnienie jego stanu naprężenia sprowadza się do szeregu zagadnień brzegowych dla równań harmonicznym z prawymi stronami. Podejście takie znacznie upraszcza rozwiązania, zwłaszcza przy wykorzystaniu elektronicznych maszyn cyfrowych. Dla wielospójnej płyty osłabionej przez szereg otworów nieeliptycznych (niekołowych) celowe jest wykorzystanie jednocześnie obydwu metod: metody perturbacji kształtu granicy i metody konstruowania nieskończonych układów algebraicznych przez wykorzystanie rozkładu poszukiwanych funkcji w szeregi wielomianów Fabera kolejno na każdym brzegu [102]. Analogiczne połączenie obu metod przy wykorzystaniu zmiennych rzeczywistych opisane było w rozdziale 2 przy rozpatrywaniu ciał izotropowych z krzywoliniowymi otworami.

5. Zagadnienia stanu naprężenia płyt izotropowych z otworami w ujęciu przestrzennym

Badanie przestrzennego stanu naprężenia płyt z otworami prowadzi często do rozwiązania tych samych zagadnień, które rozpatrzone zostały w pierwszych czterech rozdziałach.

Jak ustalił A. I. ŁURIE [121], zagadnienie przestrzennego stanu naprężenia płyty izotropowej może być sprowadzone do wyznaczenia funkcji biharmonicznej i przeliczalnej ilości funkcji metaharmonicznych. Przy tym w równaniach metaharmonicznych występuje mały parametr przy najwyższej pochodnej. Metoda całkowania takich równań w naturalnym układzie współrzędnych została zaproponowana w pracy M. I. WISZYKA i Ł. A. LUSTERNIKA [15].

Przy rozwiązywaniu wspomnianych zagadnień powstaje problem rozdzielenia warunków brzegowych, danych w naprężeniach lub przemieszczeniach dla każdego biharmonicznego i metaharmonicznego równania. Jedną z metod prowadzących do podobnego rozdzielenia warunków brzegowych zrealizowana została w pracach I. I. WOROWICZA, O. K. AKSENTIANA i O. S. MAŁKINY [1—3, 16, 17]. Wykorzystano w tym celu zasady wariacyjne i rozkład wszystkich funkcji w szeregi według małego parametru, który zależał od grubości płyty. Autorzy przeprowadzili przy tym szczegółowe badania stanu naprężenia płyty osłabionej przez otwór kołowy.

Inne podejście prowadzące do rozdzielenia warunków brzegowych zaproponowane zostało przez A. S. KOSMODAMIANSKIEGO, W. N. ŁOŻKINA i J. W. MYSOWSKIEGO w pracach

[105—107]. Rozdzielenie realizowano przy wykorzystaniu podstawowych idei metody Bubnowa—Galerkina.

Taka droga pozwala na sprowadzenie zagadnienia przestrzennego do rozwiązania szeregu równań biharmonicznych przy coraz bardziej komplikujących się warunkach brzegowych, jak również do rozwiązania pewnego układu nieskończonego, którego macierz nie zależy od geometrii płyty, ani też od jej stałych sprężystych. Dzięki temu można macierz tę odwrócić i następnie w sposób elementarny otrzymywać rozwiązania zależne od prawych stron układu nieskończonego.

Przy całkowaniu równań biharmonicznych A. S. KOSMODAMIANSKIJ, W. N. ŁOŻKIN, i J. W. MYSOWSKIJ ustalili związek pomiędzy naturalnymi i zespolonymi zmiennymi. Pozwoliło to na wykorzystanie silnego aparatu teorii funkcji zmiennej zespolonej przy rozpatrywaniu p tytu osłabionej przez otwory krzywoliniowe.

Efektywne badanie wielospójnych płyt w ujęciu przestrzennym stało się możliwe po ustaleniu przez autorów faktu, że wzajemny wpływ otworów na stan naprężenia płyty w pobliżu każdego z nich realizuje się wyłącznie za pośrednictwem biharmonicznej części rozwiązania, jeżeli tylko odległość pomiędzy otworami przewyższa grubość płyty.

Obecnie A. S. KOSMODAMIANSKIJ i W. A. SZALDYRWAN są w trakcie opracowywania metody przewidującej jednoczesne wykorzystanie zarówno zmiennych zespolonych jak i rzeczywistych. Oczekuje się, że metoda ta pozwoli na uwolnienie się od ograniczeń odnośnie odległości pomiędzy otworami w tych przypadkach, gdy otwory osłabiające płytę są kołowe, lub mało się różnią od kołowych.

Przy konstruowaniu rozwiązań zagadnień przestrzennych dla płyt wygodnie jest, jak pokazał to A. I. ŁURIE [121], rozpatrywać oddzielnie zginanie płyty i symetryczne obciążanie płyty w stosunku do jej płaszczyzny środkowej.

Szczegółowe badania stanu naprężenia płyty z eliptycznymi i innymi krzywoliniowymi otworami przy jej zginaniu przeprowadził W. N. ŁOŻKIN [118—120]. Siły zginające przedstawione były w postaci rozkładu potęgowego po grubości płyty. Wyjaśniono, że wyniki technicznej teorii zginania płyt opartej na wykorzystaniu hipotez Kirchhoffa prowadzą do istotnych błędów przy zwiększaniu grubości płyty, jak również zwiększaniu krzywizny brzegu otworu w płycie na jego krawędziach.

Jeżeli siły, przyłożone do brzegu otworu, zmieniają się po grubości płyty w sposób silnie różniący się od liniowego, błąd teorii technicznej staje się istotny nawet dla bardzo cienkich płyt.

Analogiczne prawidłowości wykryte były przez J. W. MYSOWSKIEGO dla zagadnień symetrycznego obciążania płyty osłabionej otworem krzywoliniowym.

Obliczenia numeryczne dla płyt osłabionych przez dwa i nieskończony rząd otworów kołowych przeprowadzone były w pracach [105—107].

Stwierdzono, że w miarę zbliżania się otworów poprawki do wyników teorii technicznej stają się coraz istotniejsze.

Podsumowując przegląd autorzy uważają za swój obowiązek zwrócić uwagę czytelników na fakt, że niekiedy można za pomocą stosunkowo prostych metod (w porównaniu choćby z metodą równań całkowych) otrzymać rozwiązania skomplikowanych problemów dla obszarów niekanonicznych.

Literatura cytowana w tekście

1. Аксентян, О. К., *О концентрации напряжений в толстых плитах*, Прикл. Мат. Мех., **30**, в. 5, 1966.
2. Аксентян, О. К., Ворович, И. И., *Напряженное состояние плиты малой толщины*, Прикл. Мат. Мех., **27**, в. 6, 1963.
3. Аксентян, О. К., Ворович, И. И., *Об определении концентрации напряжений на основе прикладной теории*, Прикл. Мат. Мех., **28**, в. 3, 1964.
4. Ботова, Л. В., Кириوخина, Н. М., Меглинский, В. В., *Действие сосредоточенных сил в изотропной пластинке, ослабленной двумя эллиптическими отверстиями*, Сб. тр. Саратовского унив. по проблеме концентрации напряжений, в. 4, 1968.
5. Бруцкий, Е. В., *Приближенный метод решения краевой задачи. Озена для цилиндра произвольной формы*, Прикл. Мех., в. 106, 1966.
6. Бруцкий, Е. В., *Исследование сопротивления плохо обтекаемых тел при малых числах Рейнольдса*, Автореферат канд. дисс., Киев 1967.
7. Буйвол, В. Н., *Колебания и устойчивость двух неравных цилиндрических оболочек в потоке сжимаемой жидкости*, Прикл. Мех., в. 6, 1967.
8. Буйвол, В. Н., Новацкий, В. Т., *Устойчивость циклически—симметричной системы цилиндрических оболочек в потоке вязкой жидкости*, Прикл. Мех., в. 8, 1969.
9. Буйвол, В. Н., *Излучение двух параллельно расположенных цилиндров в вязкой среде*, Прикл. Мех., в. 10, 1969.
10. Буйвол, В. Н., Гузь, А. Н., *Колебания и устойчивость системы цилиндрических оболочек в потоке вязкой сжимаемой жидкости*, Теория оболочек и пластин, Баку 1966.
11. Буйвол, В. М., Гузь, О. М., *Про колебания двух цилиндрических эксцентрично расположенных оболочек в потоке вязкой жидкости*, Допов. АН УРСР, № 11, 1966.
12. Буйвол, В. Н., Гузь, А. Н., *Обтекание сверхзвуковым потоком сжимаемого газа двух цилиндрических оболочек*, Сб. «Гидромеханика больших скоростей», в. 3, 1966.
13. Буйвол, В. М., Гузь, О. М., *Два цилиндрических отверстия в потоке вязкой сжимаемой жидкости*, Допов. АН УРСР, № 4, 1966.
14. Буйвол, В. Н., Гузь, А. Н., Палько, Л. С., *О динамических процессах в системе упругих оболочек в жидкости*, III Всесоюзный съезд по теорет. и прикл. мех., Аннот. докл., М., 1968.
15. Вишик, М. И., Люстерник, Л. А., *Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром*, Усп. Мат. Наук, **12**, в. 5 (77), 1957.
16. Ворович, И. И., Малкина, О. С., *Напряженное состояние толстой плиты*, Прикл. Мат. Мех., **31**, в. 2, 1967.
17. Ворович, И. И., Малкина, О. С., *О точности асимптотических разложений решения задачи теории упругости для толстой плиты*, Инж. журнал «Механика твердого тела», **15**, 1967.
18. Головородько, С. А., *Исследование концентрации усилий около квадратного отверстия с закругленными углами в цилиндрической оболочке*, Прикл. Мех., № 10, 1965.
19. Головородько, С. О., Гузь, О. М., *Про напряжений стан цилиндричної оболонки, послабленої декількома круговими отворами*, Допов. АН УРСР, сер. А, № 9, 1968.
20. Головчан, В. Т., Гузь, А. Н., *О решении двумерных периодических и двоякопериодических задач теории установившихся колебаний упругих и упруго-вязких тел*, IV Всесоюзный симпозиум по распространению упругих и упруго-пластических волн, Кишинев 1968, Тез. докл., Кишинев 1968.
21. Головчан, В. Т., Шнеренко, К. И., *Об исследовании бесконечных систем алгебраических уравнений периодических задач для сферической оболочки*, Прикл. Мех., № 6, 1969.
22. Головчан В. Т., *О решении граничных задач установившихся колебаний для конечной многосвязной области*, Прикл. Мех., в. 3, 1967.
23. Головчан, В. Т., *О концентрации динамических напряжений в пластинке с двумя круговыми отверстиями*, Прикл. Мех., в. 11, 1967.

24. Головчан, В. Т., *О распределении динамических напряжений между отверстиями в бесконечной пластинке*, Прикл. Мех., в. 4, 1968.
25. Головчан, В. Т., *Плоские динамические задачи теории упругости и вязко-упругости для многосвязных областей*, Автореферат канд. дисс., Киев 1968.
26. Головчан, В. Т., *Плоские колебания эксцентричного цилиндра*, Прикл. Мех., в. 3, 1969.
27. Гузь, О. М., *Про наближений метод визначення концентрації напружень навколо криволінійних отворів в оболонках*, Прикл. Мех., в. 6, 1962.
28. Гузь, О. М., *Про наближені розв'язки задач теорії пластин і пологих оболонок для деяких двозв'язних областей*, Прикл. Мех., в. 1, 1962.
29. Гузь, О. М., *Концентрація напружень біля еліптичного отвору з малим ексцентриситетом в циліндричній оболонці*, Допов. АН УРСР, № 10, 1963.
30. Гузь, О. М., *Кручення циліндричної оболонки, ослабленої квадратним отвором з закругленими кутами*, Допов. АН УРСР, № 4, 1964.
31. Гузь, А. Н., *Приближенные решения некоторых задач о концентрации напряжений около отверстий в изотропных и ортотропных оболочках*, Теория пластин и оболочек, Ереван 1964.
32. Гузь, О. М., *Концентрація напружень навколо квадратного отвору в сферичній оболонці*, Допов. АН УРСР, № 9, 1964.
33. Гузь, О. М., *Плоска задача теорії пружності циліндрично-ортотропного тіла для некругових областей*, Прикл. Мех., в. 3, 1964.
34. Гузь, А. Н., *Концентрація напружень около криволинейных отверстий на боковой поверхности кругового цилиндра*, Инж. журнал, в. 2, 1964.
35. Гузь, А. Н., *О решении задач для пологой сферической оболочки в случае многосвязных областей*, ДАН СССР, 158, в. 6, 1964.
36. Гузь, О. М., *Кручення циліндричної оболонки, ослабленої рівностороннім трикутним отвором з закругленими кутами*, Допов. АН УРСР, № 1, 1965.
37. Гузь, А. Н., *Равновесие сферической оболочки, ослабленной равносторонним треугольным отверстием*, Прикл. Мех., в. 3, 1965.
38. Гузь, А. Н., *Периодические задачи для тонких упругих оболочек, ослабленных отверстиями*, НТО Судпром, Ленинград, в. 66, 1965.
39. Гузь, О. М., *Про напружений стан оболонок, ослаблених рядом отворів*, Допов. АН УРСР, № 4, 1965.
40. Гузь, А. Н., *О квазирегулярности бесконечных систем для сферической оболочки, ослабленной несколькими отверстиями*, Прикл. Мех., в. 3, 1966.
41. Гузь, А. Н., *Исследование напряженного состояния сферических оболочек в случае многосвязных областей*, Сб. «Концентрация напряжений», в. 1, Киев 1965.
42. Гузь, А. Н., *О решении второй плоской динамической задачи теории упругости для многосвязных областей*, Прикл. Мех., в. 8, 1966.
43. Гузь, А. Н., *О решении динамических задач о нескольких параллельных цилиндрических полостях*, Проблемы механики горных пород, Алма—Ата 1966.
44. Гузь, О. М., *Про застосування теореми додавання циліндричних функцій до розв'язування лінійних задач механіки для скінченої багатозв'язної області*, Допов. АН УРСР, № 8, 1966.
45. Гузь, О. М., *Задача Діріхле для рівняння Гельмгольца для ексцентричного кільця*, Допов. АН УРСР, № 10, 1966.
46. Гузь, А. Н., *О циклически-симметричных задачах для сферической оболочки, ослабленной отверстиями*, Прикл. Мех., в. 1, 1968.
47. Гузь, А. Н., *Исследование напряженного состояния около отверстий в тонких упругих оболочках*, НТО Судпром, в. 75, Ленинград 1966.
48. Гузь, А. Н., *Тонкие упругие оболочки, ослабленные отверстиями*, Доктор. дисс., Киев 1965.
49. Гузь, О. М., Головородько, С. О., *Про напружений стан біля квадратного отвору з закругленими углами в циліндричній оболонці*, Прикл. Мех., в. 6, 1964.

50. Гузь, А. Н., Рындюк, М. А., Черней, Л. А., *О влиянии жесткости подкрепляющих колец на напряженное состояние сферической оболочки, ослабленной двумя равными круговыми отверстиями*, Прикл. Мех., в. 10, 1965.
51. Гузь, А. Н., Шнеренко, К. И., *Равновесие сферической оболочки в виде эксцентричного кольца*, Прикл. Мех., в. 6, 1966.
52. Гузь, А. Н., Шнеренко, К. И., *Исследование бесконечных систем для конечных многосвязных областей в оболочках*, Теория оболочек и пластин, Баку 1966.
53. Гузь, О. М., Шишканова, С. Ф., *Про розв'язування задач згину пластин на пружинній основі в випадку багатозв'язних областей*, Допов. АН УРСР, № 2, 1967.
54. Гузь, А. Н., Головчан, В. Т., *О решении основных граничных задач теории установившихся колебаний для бесконечной плоскости с несколько круговыми отверстиями*, Изв. АН СССР, Мех. тверд. тела, в. 2, 1968.
55. Гузь, О. М., Цурпал, І. А., *Концентрація напружень біля двох рівних кругових отворів в фізично-нелінійній пружинній пластині*, Допов. АН УРСР, сер. А, № 6, 1967.
56. Гузь, А. Н., Цурпал, І. А., *О решении плоских физических нелинейных задач теории упругости для многосвязных областей*, Прикл. Мех., № 11, 1968.
57. Гурьянов, В. М., Космодамианский, А. С., *Растяжение изотропной пластинки с двумя эллиптическими отверстиями*, Сб. Саратовского унив. по проблеме концентрации напряжений, в. 2, 1965.
58. Гурьянов, В. М., Космодамианский, А. С., *К вопросу о растяжении изотропной пластинки с двумя эллиптическими отверстиями*, Сб. трудов Саратовского унив. по проблеме концентрации напряжений, в. 3, 1967.
59. Житняк, В. Г., Космодамианский, А. С., *Действие сосредоточенной силы, приложенной к контуру кругового отверстия, ослабляющего полуплоскость*, Сб. «Концентрация напряжений», Киев, в. 2, 1968.
60. Иванов, Г. М., *Изгиб круглой кольцевой изотропной плиты сосредоточенными силами и сосредоточенными моментами*, Сб. трудов Саратовского унив. по проблеме концентрации напряжений, в. 4, 1968.
61. Иванов, Г. М., Меглинский, В. В., *Чистый изгиб анизотропной эллиптической плиты с отверстием*, Сб. трудов Саратовского унив. по проблеме концентрации напряжений, в. 4, 1968.
62. Калоеров, С. А., *Напряженное состояние анизотропной полуплоскости с конечным числом эллиптических отверстий*, Прикл. Мех., в. 10, 1966.
63. Калоеров, С. А., *Распределение напряжений в анизотропной полуплоскости с эллиптическим упругим ядром*, Изв. АН Армянской ССР, Механика, № 3, 1967.
64. Калоеров, С. А., *Концентрация напряжений в анизотропной полуплоскости с двумя эллиптическими отверстиями*, Прикл. Мех., в. 7, 1968.
65. Калоеров, С. А., Космодамианский А. С., *Напряженное состояние анизотропной полуплоскости с эллиптическим отверстием близко расположенным от границы*, Сб. трудов Саратовского унив. по проблеме концентрации напряжений, в. 3, 1967.
66. Космодамианский, А. С., *Изгиб эллиптической балки с двумя круговыми полостями*, Изв. АН СССР, ОТН, Мех. и Машин., № 3, 1960.
67. Космодамианский, А. С., *Кручение эллиптического стержня с двумя круговыми полостями*, Инж. Сбор., 1, 1961.
68. Космодамианский, А. С., *Кручение и изгиб круглого стержня с круговыми полостями*, Изв. высших учеб. зав., Строительство и Архитектура, Новосибирск 1961.
69. Космодамианский, А. С., *Кручение и изгиб поперечной силой ортотропных стержней с полостями*, Изв. Арм. ССР, 15, в. 3, 1962.
70. Космодамианский, А. С., *Приближенный метод определения напряженного состояния изотропной пластинки с конечным числом круговых отверстий*, Изв. АН СССР, ОТН, Мех. и маш., № 2, 1960.

71. Космодамианский, А. С., *О напряженном состоянии упругого изотропного массива, в котором пройдены выработки круглого сечения*, Сб. трудов по исследованию горного давления, **42**, Л., 1961.
72. Космодамианский, О. С., *Про напружений стан ізотропної пластинки, ослабленої скінченим числом нескінчених рядів кругових отворів*, ДАН УРСР, № 11, 1961.
73. Космодамианский, А. С., *Упруго-пластическая задача для изотропного массива, ослабленного бесконечным рядом одинаковых круговых выработок*, Изв. АН СССР, ОТН, Мех. и Маш., в. 4, 196 .
74. Космодамианский, А. С., *Приближенные методы определения напряженного состояния упругого горного массива, в котором пройдены выработки круглого сечения*, Труды по вопросам горного давления, **45**, Л., 1962.
75. Космодамианский, О. С., *Термопружна задача для цилиндра с порожнинами*, Прикл. Мех., **8**, в. 6, 1962.
76. Космодамианский, О. С., *Про регулярність нескінчених систем, одержуваних при розгляді напруженого стану пружистих середовищ з круговими отворами*, ДАН УРСР, № 9, 1964.
77. Космодамианский, А. С., *Упругое равновесие изотропной пластинки с бесконечным рядом одинаковых круговых отверстий, заполненных упругими ядрами или подкрепленных упругими кольцами*, Сб. Саратовского унив. по проблеме концентрации напряжений, в. 1, 1964.
78. Космодамианский, А. С., *Действие сосредоточенных сил в многосвязных областях*, Тр. Симпоз. по проблеме концентрации напряжений, в. 1, К., 1965.
79. Космодамианский, А. С., *К вопросу о регулярности бесконечных систем, получаемых при определении напряженного состояния упругих сред с круговыми отверстиями*, Изв. АН СССР, Мех., в. 5, 1965.
80. Космодамианський О. С., *Виділення головної частини в розв'язанні задачі про розтяг ізотропної пластинки з двома круговими отворами*, Допов. АН УРСР, № 9, 1966.
81. Космодамианский, А. С., *Изгиб упругой тонкой плиты, опертой на эластиче колонны*, Труды 2-ой Всесоюзной конференции по теории пластин и оболочек, Киев 1962.
82. Космодамианский, А. С., *Изгиб упругой тонкой плиты, подкрепленной эластичими колоннами*, Труды 4-ой Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин, Ереван 1964.
83. Космодамианский, А. С., *Изгиб упругой тонкой плиты, защемленной на эластичих колоннах*, Сб. тр. Саратовского унив. по проблеме концентрации напряжений, в. 1, 1964.
84. Космодамианский, А. С., *Изгиб круглой плиты с двумя круговыми отверстиями*, Сб. тр. Саратовского унив. по проблеме концентрации напряжений, в. 2, 1965.
85. Космодамианский, А. С., *К вопросу изгиба многосвязной плиты при действии сосредоточенных нагрузок*, Сб. тр. Саратовского унив. по проблеме концентрации напряжений, в. 4, 1968.
86. Космодамианский, А. С., *О напряженном состоянии изотропной пластинки, ослабленной бесконечным рядом эллиптических отверстий*, Изв. АН СССР, Мех., в. 4, 1965.
87. Космодамианский, А. С., *О квазирегулярности бесконечных систем в задаче о концентрации напряжений возле криволинейных отверстий*, Прикл. Мех., **1**, в. 1, 1965.
88. Космодамианський, О. С., *Пружна рівновага ізотропної пластинки, ослабленої скінченим числом криволінійних отворів*, Прикл. Мех., **7**, в. 6, 1961.
89. Космодамианский, А. С., *О напряженном состоянии горного массива, ослабленного большим количеством выработок квадратного сечения*, Труды по вопросам горного давления, **45**, Л., 1962.
90. Космодамианский, А. С., *Растяжение изотропной пластинки с двумя неодинаковыми криволинейными отверстиями*, Сб. Саратовского унив. по проблеме концентрации напряжений, в. 1, 1964.
91. Космодамианский, А. С., *К вопросу определения напряженного состояния упругой среды с криволинейными отверстиями*, Прикл. Мех., **2**, в. 8, 1966.
92. Космодамианский, А. С., *Некоторые физически нелинейные задачи теории упругости для многосвязных областей*, Сб. «Математическая физика», Киев, в. 5, 1968.

93. Космодамианский, А. С., *Новый приближенный метод определения напряжений в анизотропной пластинке с криволинейным отверстием*, Сб. трудов Саратовского унив. по проблеме концентрации напряжений, в. 2, 1965.
94. Космодамианский, А. С., *Приближенный метод определения напряженного состояния анизотропного массива с двумя одинаковыми эллиптическими выработками*, Сб. по исследованию горного давления, М., Госгортехиздат, 1960.
95. Космодамианский, А. С., *Упругое равновесие анизотропной пластинки с конечным числом эллиптических отверстий*, Изв. АН Арм. ССР, серия физ.-матем. наук, **13**, в. 6, 1960.
96. Космодамианский, А. С., *О напряженном состоянии анизотропной пластинки с двумя неодинаковыми отверстиями*, Изв. АН СССР, Мех. Маш., в. 1, 1961.
97. Космодамианский, А. С., *О напряженном состоянии анизотропной пластинки с двумя бесконечными рядами эллиптических отверстий*, Инж. журнал, **2**, в. 3, 1962.
98. Космодамианский, А. С., *Квазирегулярность бесконечных систем в задачах о напряженном состоянии анизотропной среды с эллиптическими отверстиями*, Прикл. Мех., **1**, в. 10, 1965.
99. Космодамианский, А. С., *Упругое равновесие анизотропной полуплоскости, ослабленной эллиптическим отверстием*, Тр. Грузинского политехн. инст., **8** (93) 1963.
100. Космодамианский, А. С., *Про регулярність нескінченних систем одержуваних в задачах кручення стержнів з позов'язаними порожнинами*, Допов. АН УРСР, № 7, 1964.
101. Космодамианский, А. С., *Определение напряженного состояния пластинки, обладающей сильной анизотропией, с двумя эллиптическими отверстиями*, Прикл. Мех., **2**, в. 1, 1966.
102. Космодамианский, А. С., *Приближенный метод определения напряженного состояния анизотропной пластинки с двумя одинаковыми криволинейными отверстиями*, Сб. тр. Саратовского унив. по проблеме концентрации напряжений, в. 3, 1967.
103. Космодамианский, А. С., Ложкин, В. Н., *Некоторые случаи упругого равновесия изотропной пластинки с двумя круговыми отверстиями*, Сб. Саратовского унив. по проблеме концентрации напряжений, в. 2, 1965.
104. Космодамианский, А. С., Ложкин, В. Н., *Определение напряженного состояния изотропной пластинки с тремя круговыми отверстиями*, Сб. тр. Саратовского унив. по проблеме концентрации напряжений, в. 3, 1967.
105. Космодамианский, А. С., Ложкин, В. Н., *Об уточнении прикладной теории в задаче концентрации напряжений при изгибе плиты с отверстиями*, Сб. «Математическая физика», в. 5, 1968.
106. Космодамианский, А. С., Ложкин, В. Н., *Применение асимптотического метода при изгибе плиты с двумя одинаковыми круговыми отверстиями*, Сб. тр. Саратовского унив. по проблеме концентрации напряжений, в. 4, 1968.
107. Космодамианский, А. С., Мысовский, Ю. В., *Концентрация напряжений в толстой пластинке, ослабленной рядом круговых отверстий*, Инж. журнал «Механика твердого тела», № 3, 1968.
108. Космодамианский, А. С., Меглинский, В. В., *Растяжение анизотропной пластинки с эллиптическими отверстиями, подкрепленными жесткими кольцами*, Сб. тр. Саратовского унив. по проблеме концентрации напряжений, в. 1, 1964.
109. Космодамианский, А. С., Мысовский, Ю. В., Мысовская, Р. М., *К вопросу о концентрации напряжений в изотропной среде, ослабленной криволинейными отверстиями*, Сб. «Концентрация напряжений», Киев, в. 2, 1968.
110. Космодамианский, А. С., Цурпал, И. А., *Фізично-нелінійні задачі для пластинки, послабленої двома круговими отворами*, Допов. АН УРСР, сер. А, № 5, 1967.
111. Кубенко, В. Д., *Напряжения около эллиптического отверстия, подверженного осциллирующему давлению*, Прикл. Мех., в. 5, 1965.
112. Кубенко, В. Д., *Динамическая концентрация напряжений около квадратного отверстия при установившихся волновых движениях*, Прикл. Мех., в. 12, 1966.
113. Кубенко, В. Д., *Динамічна концентрація напружень біля еліптичного отвору*, Допов. АН УРСР, сер. А, № 1, 1967.
114. Кубенко, В. Д., *О распространении плоской гармонической волны сдвига в пластине с квадратным отверстием*, Прикл. Мех., в. 2, 1968.

115. Кубенко, В. Д., *Некоторые динамические задачи концентрации напряжений около отверстий*, Автореферат канд. дисс., Киев 1965.
116. Кудрявцев, Б. А., *О напряженном состоянии сферической оболочки с наклонным патрубком*, Прикл. Мех., в. 5, 1966.
117. Ложкин, В. Н., *Растяжение изотропной пластинки с двумя круговыми отверстиями, подкрепленными жесткими кольцами*, Сб. трудов Саратовского унив. по проблеме концентрации напряжений, в. 4, 1964.
118. Ложкин, В. Н., *Концентрация напряжений при изгибе плиты средней толщины с эллиптическим отверстием*, Прикл. Мех., 4, в. 3, 1968.
119. Ложкин, В. Н., *Применение теории функций комплексного переменного в асимптотическом методе при изгибе плиты с криволинейным отверстием*, Сб. тр. Саратовского унив. по проблеме концентрации напряжений, в. 4, 1968.
120. Ложкин, В. Н., *Изгиб плиты с криволинейным отверстием*, Сб. «Концентрация напряжений», Киев, в. 2, 1968.
121. Лурье, А. И., *К теории толстых плит*, Прикл. Мат. Мех., 6, в. 2—3, 1942.
122. Меглинский, В. В., *Изгиб анизотропной эллиптической плиты с эллиптическим отверстием, подкрепленным жестким кольцом*, Сб. трудов Саратовского унив. по проблеме концентрации напряжений, в. 1, 1964.
123. Меглинский, В. В., *Некоторые задачи изгиба двусвязной ортотропной плиты*, Сб. трудов Саратовского унив. по проблеме концентрации напряжений, в. 2, 1965.
124. Меглинский, В. В., *Изгиб анизотропной эллиптической плиты, ослабленной эллиптическими отверстиями*, Прикл. мех., 1, в. 4, 1965.
125. Меглинский, В. В., *Некоторые задачи изгиба тонких многосвязных анизотропных плит*, Сб. трудов Саратовского унив. по проблеме концентрации напряжений, в. 3, 1967.
126. Немиш, Ю. Н., *Концентрация напряжений около криволинейных отверстий в несимметричной теории упругости*, Прикл. мех., в. 4, 1966.
127. Немиш, Ю. Н., *О напряженном состоянии среды Коссера, ослабленной криволинейным отверстием*, Прикл. Мех., в. 9, 1968.
128. Немиш, Ю. М., *Влияние несимметричности тензора напряжений на разбег напряжений біля підкріплених криволинійних отворів*, Допов. АН УРСР, сер. А, № 9, 1968.
129. Пелех, Б. Л., *О решении задач изгиба пластины для многосвязных областей*, Прикл. Мех., в. 9, 1969.
130. Савин Г. М., Гузь, О. М., *Концентрация напряжений біля еліптичного отвору в сферичній оболонці*, Допов. АН УРСР, № 1, 1964.
131. Савин, Г. Н., Гузь, А. Н., *О напряженном состоянии около криволинейных отверстий в оболочках*, Изв. АН СССР, Мех. Маш., № 6, 1964.
132. Савин, Г. Н., Гузь, А. Н., Цурпал, И. А., *Концентрация напряжений около криволинейных отверстий в физическо-нелинейной упругой пластинке*, Arch. Mech. Stos., 4, 16, 1964.
133. Савин, Г. Н., Гузь, А. Н., *О напряженном состоянии около криволинейных подкрепленных отверстий в оболочках*, Инж. журнал, в. 1, 1965.
134. Савин, Г. Н., Гузь, А. Н., *Об одном способе решения плоских задач моментной теории упругости для многосвязных областей*, Прикл. Мех., в. 1, 1966.
135. Савин, Г. Н., Гузь, А. Н., *Плоская задача моментной теории упругости для бесконечной плоскости, ослабленной конечным числом круговых отверстий*, Прикл. Мат. Мех., № 5, 1966.
136. Савин, Г. Н., Гузь, А. Н., Цурпал, И. А., *Физически нелинейные задачи пластин и оболочек, ослабленных отверстиями*, Труды школы по нелинейным задачам, Тарту 1966.
137. Савин, Г. Н., *Распределение напряжений около отверстий*, Изд. «Наукова думка», Киев 1968.
138. Цурпал, И. А., Шульга, *Исследование напряженного состояния около криволинейных отверстий в оболочках при нелинейном законе упругости*, Прикл. Мех., в. 8, 1966.
139. Цурпал, И. А., *Концентрация напряжений около квадратного отверстия в физически нелинейной упругой пластинке*, Изв. АН СССР, Мех., № 6, 1965.

140. Цурпал, И. А., *Напряженное состояние вблизи криволинейного отверстия в физически нелинейной упругой пластине*, Сб. «Прочность корпуса судна», в. 67, Л., 1965.
141. Цурпал, И. А., *Концентрация термонапряжений возле произвольных отверстий для нелинейно-упругих материалов*, Сб. «Тепловые напряжения в элементах конструкций», в. 8, К, 1968.
142. Цурпал, И. А., *Об одном варианте задач о концентрации напряжений в нелинейной постановке*, Прикл. Мех., в. 10, 1968.
143. Цурпал, И. А., *Некоторые задачи концентрации напряжений около отверстий с учетом физической нелинейности материала*, Автореферат доктор. дисс., Киев 1968.
144. Цурпал, И. А., *Концентрация напряжений около криволинейных отверстий в пластинках при нелинейном законе упругости*, Труды I Респ. мат. конф. молодых ученых, Киев 1965.
145. Цурпал, И. А., *Физически нелинейные упругие пластины, ослабленные произвольными отверстиями*, Сб. «Концентрация напряжений», в. 1, Киев 1965.
146. Цурпал, И. А., *Задачи концентрации напряжений для высокопластичных материалов*, Сб. «Строительная механика корабля», в. 3, Л., 1968.
147. Цурпал, И. А., *Некоторые задачи концентрации напряжений около отверстий и полостей с учетом физической нелинейности материала*, Сб. «Концентрация напряжений», в. 2, 1968.
148. Швецов, В. А., *Расстяжение анизотропной пластинки с эллиптическими отверстиями, заполненными упругими ядрами*, Сб. трудов Саратовского унив. по проблеме концентрации напряжений, в. 2, 1965.
149. Швецов, В. А., *Распределение напряжений в упругой анизотропной среде с эллиптическими отверстиями, подкрепленными упругими кольцами*, Прикл. Мех., 2, в. 8, 1966.
150. Швецов, В. А., *Упругое равновесие анизотропной пластинки с конечным числом эллиптических отверстий, подкрепленных упругими кольцами*, Прикл. Мех., 2, в. 2, 1966.
151. Швецов, В. А., *О напряженном состоянии анизотропной пластинки с конечным числом эллиптических отверстий, заполненных упругими ядрами*, Сб. трудов Саратовского унив. по проблеме концентрации напряжений, в. 3, 1967.
152. Шнеренко, К. И., *Распределение напряжений в сферической оболочке вокруг подкрепленных криволинейных отверстий*, Прикл. Мех., в. 2, 1966.
153. Шнеренко, К. И., *Влияние внешнего края на напряженное состояние сферической оболочки с отверстием*, Прикл. Мех., в. 2, 1966.
154. Шульга, Н. А., *Напряженное состояние возле отверстия в тонкой физически нелинейной плите*, Прикл. Мех., в. 12, 1967.
155. Шульга, Н. А., *Изгиб тонкой плиты, ослабленной криволинейным отверстием, при нелинейном законе упругости*, Прикл. Мех., в. 4, 1966.
156. Шульга, Н. А., *Изгиб тонкой плиты с треугольным отверстием при нелинейном законе упругости*, Труды 2-ой конф. молодых ученых Украины, Киев 1966.

Praca została złożona w Redakcji dnia 25 sierpnia 1969 r.