

UOGÓLNIONE WARUNKI STATECZNOŚCI W PRÓBIE ROZCIĄGANIA

JANUSZ KLEPACZKO (WARSZAWA)

1. Wstęp

Zagadnienie sformułowania warunku utraty stateczności w próbie rozciągania, uwzględniającego wpływ prędkości odkształcenia i temperatury na własności plastyczne badanej próbki, jest coraz częściej przedmiotem zainteresowania. Można tu wymienić na przykład prace [1, 2, 3, 5].

Należy podkreślić, że przyjęte w danym przypadku kryterium utraty stateczności określa otrzymany warunek stateczności. Dlatego też wyprowadzone warunki stateczności mogą różnić się w zależności od przyjmowanych kryteriów utraty stateczności.

Na przykład, w pracy [3] przyjęto klasyczne kryterium utraty stateczności

$$(1.1) \quad \frac{dP}{d\varphi} = 0, \quad \varphi = \ln \frac{F_0}{F},$$

to jest przyjęto za punkt utraty stateczności moment, gdy siła na wykresie $P = P(\varphi)$ osiąga maksymalną wartość; przez φ oznaczono odkształcenie naturalne, F_0 oraz F oznaczają odpowiednio pole początkowego przekroju próbki i pole aktualne. Równoczesne założenie równania konstytutywnego z pominięciem efektów historii prędkości odkształcenia i temperatury, w formie

$$(1.2) \quad \sigma = \sigma(\varphi, \dot{\varphi}, T), \quad \dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt}$$

prowadzi do wartości siły w danym momencie procesu rozciągania próbki

$$(1.3) \quad P = F\sigma(\varphi, \dot{\varphi}, T),$$

gdzie przez σ oznaczono rzeczywiste naprężenie, natomiast przez $\dot{\varphi}$ oznaczono prędkość odkształcenia w mierze logarytmicznej, T oznacza temperaturę w skali absolutnej. Po zróżniczkowaniu (1.3) względem φ otrzymuje się

$$(1.4) \quad \frac{dP}{d\varphi} = F \frac{d}{d\varphi} [\sigma(\varphi, \dot{\varphi}, T)] + \sigma(\varphi, \dot{\varphi}, T) \frac{dF}{d\varphi},$$

po dalszym zróżniczkowaniu

$$(1.5) \quad \frac{d}{d\varphi} [\sigma(\varphi, \dot{\varphi}, T)] = \frac{\partial \sigma}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma}{\partial \dot{\varphi}} \frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi} + \frac{\partial \sigma}{\partial T} \frac{dT}{d\varphi}.$$

Ponieważ

$$(1.6) \quad F = F_0 e^{-\varphi},$$

to

$$(1.7) \quad \frac{dF}{d\varphi} = -F_0 e^{-\varphi}, \quad \frac{dF}{d\varphi} = -F.$$

Biorąc pod uwagę kryterium (1.1) oraz (1.4), (1.5) i (1.7) otrzymuje się uogólniony warunek stateczności (1.8) zamieszczony pierwotnie w pracy [3]

$$(1.8) \quad \frac{\partial \sigma}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma}{\partial \dot{\varphi}} \frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi} + \frac{\partial \sigma}{\partial T} \frac{dT}{d\varphi} = \sigma(\varphi, \dot{\varphi}, T).$$

Można tu wyróżnić dwa przypadki szczególne, mianowicie:

a) izotermiczny proces deformacji próbki; wówczas $\frac{dT}{d\varphi} = 0$,

stąd

$$(1.9) \quad \frac{\partial \sigma}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma}{\partial \dot{\varphi}} \frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi} = \sigma(\varphi, \dot{\varphi}, T), \quad T = \text{const.}$$

Warunek stateczności w postaci (1.9) został ostatnio przedyskutowany w pracy [2]. Za procesy izotermiczne można uznać w zasadzie wszystkie procesy odkształcania próbek przy małej prędkości deformacji, rzędu $\dot{\varphi} = 10^{-3} \text{ sek}^{-1}$ lub mniejszych. Przy większych prędkościach deformacji proces nie jest ściśle izotermiczny i stopniowo zmienia się na adiabatyczny, zależnie od intensywności wymiany ciepła z otoczeniem próbki. Można uznać, że przy prędkości deformacji rzędu $\dot{\varphi} = 10^2 \text{ sek}^{-1}$, czasy deformacji są tak krótkie, zwykle kilka milisekund, że proces deformacji jest wyłącznie procesem adiabatycznym.

W przypadku procesu ściśle izotermicznego zwiększenie prędkości deformacji może powodować zwiększenie lub zmniejszenie wydłużeń równomiernych zależnie od wybranego metalu. Z reguły dla polikrystalicznych metali o sieci regularnej płaskocentrowanej zachodzi zwiększenie wydłużeń równomiernych wraz ze wzrostem prędkości odkształcania;

b) proces przy stałej prędkości odkształcania, $\frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi} = 0$,

stąd warunek (1.8) przyjmuje postać

$$(1.10) \quad \frac{\partial \sigma}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma}{\partial T} \frac{dT}{d\varphi} = \sigma(\varphi, \dot{\varphi}, T), \quad \dot{\varphi} = \text{const.}$$

Klasycznym przykładem procesu deformacji o zmieniającej się temperaturze jest wspomniany uprzednio proces adiabatyczny. Dokładną analizę procesu adiabatycznego przeprowadzono w pracy [3]. Jak wynika z analizy przeprowadzonej w tej pracy, teoretyczne wydłużenia równomierne próbek są zawsze mniejsze dla procesu adiabatycznego w porównaniu z izotermicznym. Efekt ten nie jest procentowo duży, rzędu kilku procent w zakresie temperatur średnich i podwyższonych, $0,2 \leq T/T_m \leq 0,5$, (T_m oznacza temperaturę topnienia). Natomiast w zakresie temperatur niskich i skrajnie niskich, $T/T_m \leq 0,2$, różnice w teoretycznym wydłużeniu równomiernym dla tych dwóch procesów mogą dochodzić do kilkuset procent i więcej.

O ile proces deformacji próbki zachodzi zarówno przy stałej prędkości odkształcenia, jak i w stałej temperaturze, to uogólniony warunek (1.9) redukuje się do postaci analogicznej do dotychczas powszechnie używanej w literaturze, mianowicie

$$(1.11) \quad \frac{\partial \sigma}{\partial \varphi} = \sigma(\varphi, \dot{\varphi}, T), \quad \begin{aligned} T &= \text{const} \\ \dot{\varphi} &= \text{const}. \end{aligned}$$

2. Próbka niejednorodna

Warunek (1.8) odnosi się wyłącznie do idealnej próbki, to jest próbki o idealnie jednorodnym materiale i o idealnie jednakowej powierzchni pola początkowego przekroju poprzecznego F_0 . Przypadek próbki idealnej został szeroko przedyskutowany w pracy [3]. Oczywiście próbka taka jest ze względów technicznych niewykonalna. Zwykle F_0 zmienia się nieco wzdłuż długości próbki liczonej jako x od jednego z jej końców. Tak więc $\frac{dF_0}{dx}$ ma zwykle pewną skończoną wartość, stąd równanie (1.7) przedstawi się w nieco innej formie

$$(2.1) \quad \frac{dF}{d\varphi} = -F \left(1 \pm \frac{1}{F_0} \frac{dF_0}{dx} \frac{dx}{d\varphi} \right).$$

Wartość $\frac{dF_0}{dx}$ może być przyjęta zarówno jako dodatnia lub ujemna, gdyż fakt ten nie wpływa na moment utraty stateczności. Z fizykalnego punktu widzenia należy przyjąć więc wartość bezwzględną $\left| \frac{dF_0}{dx} \right|$. Przez $\frac{d\varphi}{dx} = \lambda$ oznaczono pewien parametr nazwany gradientem odkształcenia. Uwzględniając jak poprzednio równania (1.1), (1.4), (1.5) i (2.1) otrzymuje się warunek stateczności (2.2) z uwzględnieniem zmian przekroju początkowego po długości próbki i gradientem λ jako parametrem

$$(2.2) \quad \frac{\partial \sigma}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma}{\partial \dot{\varphi}} \frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi} + \frac{\partial \sigma}{\partial T} \frac{dT}{d\varphi} = \sigma(\varphi, \dot{\varphi}, T) \left(1 + \frac{1}{\lambda F_0} \left| \frac{dF_0}{dx} \right| \right).$$

W obecnym przypadku gradient odkształcenia λ odgrywa rolę parametru. Przyjęta wartość λ determinuje wartość tak zwanego wydłużenia równomiernego, przy czym λ może zawierać się w bardzo szerokich granicach, $0 \leq \lambda \leq \infty$. Dla $\lambda = 0$ wartość wydłużenia równomiernego wynosi $\varphi_r = 0$, gdyż nie jest możliwe uzyskanie takiego procesu deformacji z równoczesnym założeniem zmian początkowego przekroju próbki po długości. W takim przypadku utrata stateczności następuje natychmiast. W przypadku dopuszczenia $\lambda = \infty$, tj. do absolutnej utraty stateczności, wydłużenie równomierne osiąga największą możliwą wartość teoretyczną. Ponieważ w rzeczywistości nawet w obszarze powstałego na próbce przewężenia wartości λ nie osiągają wartości nieskończenie wielkich, to w konkretnych przypadkach wartości wydłużeń równomiernych będą zawsze zależne od aktualnie dopuszczalnej wartości gradientu λ .

Celem ilustracji problemu zakłada się proces izotermiczny zachodzący przy stałej prędkości odkształcenia; wówczas $\frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi} = 0$; $\frac{dT}{d\varphi} = 0$. Stąd

$$(2.3) \quad \frac{\partial \sigma}{\partial \varphi} = \sigma(\varphi, \dot{\varphi}, T) \left(1 + \frac{1}{\lambda F_0} \left| \frac{dF_0}{dx} \right| \right).$$

Równocześnie przyjmuje się równanie konstytutywne, które zostało pierwotnie wykorzystane do podobnej analizy w pracy [3]

$$(2.4) \quad \sigma = B\varphi^m \dot{\varphi}^{n(\varphi)},$$

gdzie $n(\varphi) = n_0 + \alpha\varphi$, B , m oraz $n(\varphi)$ oznaczają odpowiednio moduł plastyczności, wykładnik umocnienia oraz czułość na prędkość odkształcenia jako rosnącą funkcję odkształcenia. Zwykle czułość na prędkość n przyjmuje się jako stałą [3], jednak jak wykazano w pracach [4] i [6], czułość na prędkość odkształcenia n nieco wzrasta ze wzrostem odkształcenia. Uwzględniając ten fakt można bardziej dokładnie opisać wartości modułu stycznego krzywej umocnienia w obszarze odkształceń, gdzie tworzy się szyjka. Na przykład, według danych z pracy [4]

$$\begin{aligned} \text{dla aluminium} \quad n(\varphi) &= 0,014 + 0,0503\varphi, \\ \text{dla miedzi} \quad n(\varphi) &= 0,0034 + 0,0060\varphi. \end{aligned}$$

Zmiany początkowego pola przekroju poprzecznego przyjęto w liniowej postaci

$$(2.5) \quad F_0 = F_0^* + ax,$$

to jest w formie stożka o zmieniającej się średnicy według (2.6)

$$(2.6) \quad d_0 = \sqrt{d_0^{*2} + \frac{4}{\pi} ax},$$

gdzie a oznacza stałą, natomiast d_0^* stanowi najmniejszą średnicę próbki.

Moduł styczny można wyznaczyć z równania (2.4)

$$(2.7) \quad \frac{\partial \sigma}{\partial \varphi} = \sigma \left(\frac{m}{\varphi} + \alpha \ln \dot{\varphi} \right).$$

Równocześnie

$$(2.8) \quad \left| \frac{dF_0}{dx} \right| = a.$$

Podstawiając zależności (2.4), (2.5) i (2.8) do warunku stateczności (2.3) otrzymuje się wartość odkształcenia w momencie utraty stateczności

$$(2.9) \quad \varphi_r = \frac{m}{1 + \frac{a}{\lambda F_0} - \alpha \ln \dot{\varphi}}.$$

Otrzymany rezultat wskazuje na stabilizujący wpływ prędkości odkształcenia na przebieg procesu rozciągania z jednej strony oraz na zmniejszanie się wydłużeń φ_r w zakresie odkształceń statecznych przy powiększaniu wartości a , to jest nierównomierności początkowego przekroju, z drugiej. Problem ten został przedyskutowany w nieco inny sposób,

jednak z podobnym wynikiem w pracy [5]. Z równania (2.9) wynika, że dla pewnej wartości prędkości odkształcenia $\dot{\varphi}_r$ oraz założonym λ można osiągnąć «teoretyczną» wartość wydłużenia $\varphi_r = m$; wówczas musi być spełniona zależność

$$\frac{a}{\lambda F_0} - \alpha \ln \dot{\varphi}_r = 0,$$

lub inaczej

$$\dot{\varphi}_r = \exp \frac{a}{\lambda \alpha F_0}.$$

Na przykład, zakładając dopuszczalny gradient w postaci zmiany odkształcenia na 1 mm długości próbki jako $\Delta\varphi = 1 \cdot 10^{-4}$; $\lambda = 1 \cdot 10^{-4}$ [1/mm], zakładając dalej wartość a jako powstałą z niedokładności wykonania próbki w postaci względnej zmiany pola przekroju

$$\frac{a}{F_0} = \frac{1}{x} \frac{F - F_0}{F_0}$$

i przyjmując względną zmianę pola przekroju $\frac{F - F_0}{F_0} = 1 \cdot 10^{-4}$ na długości 10 mm mamy $a/F_0 = 1 \cdot 10^{-5}$. Otrzymane wartości $\dot{\varphi}_r$ odpowiednio dla aluminium i miedzi wynoszą

$$\begin{array}{ll} \text{aluminium} & \dot{\varphi}_r = e^{1,9}, \\ \text{miedź} & \dot{\varphi}_r = e^{16,6}, \end{array} \quad \begin{array}{l} \dot{\varphi}_r = 6,68 \text{ sek}^{-1}, \\ \dot{\varphi}_r = 1,6 \cdot 10^7 \text{ sek}^{-1}. \end{array}$$

Można więc stwierdzić znaczny wpływ czułości na prędkość odkształcenia na osiągnięcia teoretycznego wydłużenia $\varphi_r = m$. W przypadku niskiej czułości na prędkość odkształcenia, co jest słuszne w przypadku miedzi, wartość $\dot{\varphi}_r$ jest zbyt duża, aby mogła być zrealizowana w próbach rozciągania.

Należy podkreślić, że jeżeli przeprowadzić analizę próbki nieidealnej, to wydłużenia równomierne φ_r mogą być, zależnie od prędkości odkształcenia, zarówno mniejsze, jak również większe od wartości teoretycznej $\varphi_r = m$. Przy czym dla takich metali jak aluminium i miedź wzrost prędkości odkształcenia pociąga za sobą zwiększenie się φ_r . Powyższy wniosek jest zgodny z uzyskanymi wynikami w pracach [3] oraz [5].

3. Próbka idealna, przykłady

Poniższy fragment pracy może stanowić ilustrację problemu i pewne uzupełnienie wyników uzyskanych w pracy [3]. Rozważania dotyczyć będą próbki idealnej, a więc przypadku szczególnego dla $\frac{dF_0}{dx} = 0$. Zakłada się dwa rodzaje równania konstytutywnego, mianowicie

$$(3.1) \quad \text{typ A} \quad \sigma = f(\varphi) + \psi(\dot{\varphi}),$$

przy czym $f(\varphi)$ oznacza statyczną krzywą umocnienia, a $\psi(\dot{\varphi})$ jest rosnącą funkcją prędkości odkształcenia równą zeru dla $\dot{\varphi} = 0$. Równanie konstytutywne typu A może być w szczególności użyte do opisu dynamicznych krzywych umocnienia żelaza i miękkich stali z pominięciem przystanku plastyczności;

$$(3.2) \quad \text{typ B} \quad \sigma = f(\varphi)\psi_1(\dot{\varphi}).$$

Równanie typu B — (3.2) jest zwykle używane do opisu krzywych umocnienia z grupy metali o sieci regularnej płaskocentrowanej; do tego typu należy także równanie (2.4).

Moduły styczne krzywych umocnienia można przedstawić w formie

$$(3.3) \quad \frac{\partial \sigma}{\partial \varphi} = f'(\varphi) + \frac{\partial \psi}{\partial \dot{\varphi}} \frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi}; \quad f'(\varphi) = \left(\frac{d\sigma}{d\varphi} \right)_{\text{stat.}},$$

$$(3.4) \quad \frac{\partial \sigma}{\partial \varphi} = f'(\varphi) \psi_1(\dot{\varphi}) + f(\varphi) \frac{\partial \psi_1}{\partial \dot{\varphi}} \frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi}.$$

Warunki stateczności (1.9) przyjmą formę

$$(3.5) \quad f(\varphi) - f'(\varphi) = \frac{\partial \psi}{\partial \dot{\varphi}} \frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi} - \psi(\dot{\varphi}),$$

$$(3.6) \quad f(\varphi) - f'(\varphi) = \frac{f(\varphi)}{\psi_1(\dot{\varphi})} \frac{\partial \psi_1}{\partial \dot{\varphi}} \frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi}.$$

Struktura otrzymanych równań wskazuje, że w przypadku stałej prędkości odkształcenia ($\frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi} = 0$), warunek stateczności (3.6) otrzymany na podstawie równania konstytutywnego typu B nie zależy od prędkości odkształcenia jako parametru, co udowodniono uprzednio w pracy [3]. Natomiast dla przypadku równania typu A otrzymany warunek stateczności (3.5) wskazuje na przesuwanie się momentu utraty stateczności do obszaru odkształceń mniejszych przy zwiększaniu prędkości odkształcenia. Wynika to ze znaku minus przed funkcją $\psi(\dot{\varphi})$ w równaniu (3.5).

Po przyjęciu w obydwu przypadkach statycznej krzywej umocnienia $f(\varphi)$ w postaci

$$f(\varphi) = B\varphi^m; \quad f'(\varphi) = \frac{m}{\varphi} f(\varphi),$$

otrzymuje się odpowiednio warunki stateczności

$$(3.7) \quad \text{A} \quad \frac{m}{\varphi_r} = 1 + \frac{1}{f(\varphi)} \left[\psi(\dot{\varphi}) - \frac{\partial \psi}{\partial \dot{\varphi}} \frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi} \right],$$

$$(3.8) \quad \text{B} \quad \frac{m}{\varphi_r} = 1 - \frac{1}{\psi_1(\dot{\varphi})} \frac{\partial \psi_1}{\partial \dot{\varphi}} \frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi}.$$

Na podstawie (3.7) i (3.8) można wyznaczyć wartości wydłużenia równomiernego w momencie utraty stateczności

$$(3.9) \quad \text{A} \quad \varphi_r = \frac{m}{1 + \frac{1}{f(\varphi)} \left[\psi(\dot{\varphi}) + \frac{\partial \psi}{\partial \dot{\varphi}} \frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi} \right]}.$$

$$(3.10) \quad \text{B} \quad \varphi_r = \frac{m}{1 - \frac{1}{\psi_1(\dot{\varphi})} \frac{\partial \psi_1}{\partial \dot{\varphi}} \frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi}},$$

Z równania (3.9) wynika, że dla pewnej określonej postaci historii prędkości odkształcenia można osiągnąć wartość wydłużenia równomiernego równą wykładnikowi umocnienia, $\varphi_r = m$. Zachodzi to dla przypadku, gdy

$$(3.11) \quad \frac{\partial \psi}{\partial \dot{\varphi}} \frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi} = \psi(\dot{\varphi}) \quad \text{lub} \quad \frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi} = \psi(\dot{\varphi}) \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial \psi}.$$

W przypadku stałej prędkości odkształcenia φ_r jest zawsze mniejsze od wartości wykładnika umocnienia m , tj. $\dot{\varphi} = \text{const}$, $\frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi} = 0$, $\varphi_r < m$.

Natomiast postać równania (3.10) prowadzi do wniosku, że dla rosnących prędkości odkształcenia φ_r jest zawsze większe od wartości wykładnika umocnienia m , o ile $\psi_1(\dot{\varphi})$ jest rosnącą funkcją $\dot{\varphi}$. Gdy prędkość odkształcenia maleje podczas procesu deformacji próbki, to φ_r będzie mniejsze od m . Ogólnie można wyróżnić trzy przypadki:

$$\begin{aligned} \text{dla} \quad & \frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi} > 0, \quad \varphi_r > m, \\ \text{dla} \quad & \frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi} = 0, \quad \dot{\varphi} = \text{const}, \quad \varphi_r = m, \\ \text{dla} \quad & \frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi} < 0, \quad \varphi_r < m. \end{aligned}$$

Biorąc pod uwagę równanie konstytutywne (2.4) otrzymuje się

$$\psi_1(\dot{\varphi}) = \dot{\varphi}^n; \quad \frac{\partial \psi_1}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{n}{\dot{\varphi}} \dot{\varphi}^n; \quad \frac{\partial \psi_1}{\partial \varphi} = \frac{n}{\dot{\varphi}} \psi_1(\dot{\varphi});$$

stąd

$$(3.12) \quad \varphi_r = \frac{m}{1 - \frac{n}{\dot{\varphi}} \frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi}}.$$

Takie zachowanie się oraz równanie (3.12) przedyskutowano bardziej szczegółowo w pracy [3].

4. Gradient odkształcenia jako zmienna niezależna

Jeżeli bardziej dokładnie prześledzić proces deformacji próbki w postaci długiego pręta, to okazuje się, że proces deformacji przebiega niezupełnie jednorodnie. W danym momencie miejsca słabsze wzdłuż długości próbki odkształcają się bardziej intensywnie, zachodzi w nich szybsze umocnienie materiału, w następnym momencie bardziej intensywnie odkształcają się miejsca sąsiednie itd. Przy podejściu tego rodzaju akceptuje się pewną niejednorodność deformacji wzdłuż długości, która wynika z istoty opisanego mechanizmu odkształcania się próbki. Niewątpliwie najbardziej odpowiednią miarą stanu zaawansowania rozumianego w ten sposób procesu deformacji próbki jest gradient odkształcenia

po długości. Pierwotnie gradient jako miarę zdefiniowaną przy użyciu odkształcenia inżynierskiego

$$\lambda = \frac{1}{1+\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x}, \quad \varepsilon = \frac{l-l_0}{l_0}$$

wprowadzono w pracy [1].

Okazuje się jednak, że gradient λ lepiej przedstawić używając miary odkształcenia naturalnego φ , gdzie $\varphi = \ln(1+\varepsilon)$, stąd

$$(4.1) \quad \lambda = \frac{d\varphi}{dx}; \quad \frac{d\varphi}{dx} = \frac{d\varphi}{d\varepsilon} \frac{d\varepsilon}{dx} = \frac{1}{1+\varepsilon} \frac{d\varepsilon}{dx}.$$

Wprowadzenie gradientu zdefiniowanego w naturalnej mierze odkształcenia, jak to uczyniono w niniejszej pracy, znacznie upraszcza dalsze rozważania i odpowiednio skraca zapisy warunków stateczności.

Po zróżniczkowaniu równania (1.3) względem x otrzymuje się

$$(4.2) \quad \frac{dP}{dx} = \left(\frac{\partial \sigma}{\partial \varphi} \frac{d\varphi}{dx} + \frac{\partial \sigma}{\partial \dot{\varphi}} \frac{d\dot{\varphi}}{dx} + \frac{\partial \sigma}{\partial T} \frac{dT}{dx} \right) F + \sigma \frac{dF}{dx}.$$

Na podstawie równania (1.6)

$$(4.3) \quad \frac{dF}{dx} = e^{-\varphi} \left(\frac{dF_0}{dx} - F_0 \frac{d\varphi}{dx} \right).$$

Ponieważ musi być spełniony warunek równowagi $\frac{dP}{dx} = 0$, równanie (4.2) po uprzednim uwzględnieniu (4.3) oraz (4.1), a także $\frac{dT}{dx} = \frac{dT}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dx}$; $\frac{dT}{dx} = \lambda \frac{dT}{d\varphi}$, przyjmuje następującą postać

$$(4.4) \quad \frac{\partial \sigma}{\partial \dot{\varphi}} \frac{d\dot{\varphi}}{dx} + \left(\frac{\partial \sigma}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma}{\partial T} \frac{dT}{d\varphi} - \sigma \right) \lambda + \frac{\sigma}{F_0} \frac{dF_0}{dx} = 0.$$

Równocześnie $\frac{d\dot{\varphi}}{dx} = \frac{d\lambda}{dt}$, stąd ostatecznie otrzymuje się

$$(4.5) \quad \frac{d\lambda}{dt} + \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial \sigma} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma}{\partial T} \frac{dT}{d\varphi} - \sigma \right) \lambda + \frac{\sigma}{F_0} \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial \sigma} \frac{dF_0}{dx} = 0.$$

Jest to więc równanie różniczkowe względem λ , którego rozwiązanie ogólne stanowi następująca zależność

$$(4.6) \quad \lambda = \exp \int \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial \sigma} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma}{\partial T} \frac{dT}{d\varphi} - \sigma \right) dt \times \\ \times \left\{ - \int \frac{\sigma}{F_0} \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial \sigma} \frac{dF_0}{dx} \left[\exp - \int \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial \sigma} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma}{\partial T} \frac{dT}{d\varphi} - \sigma \right) dt \right] dt + C \right\}.$$

Równanie (4.6) określa zmiany gradientu $\lambda(t)$ podczas procesu deformacji nieidealnej próbki dla dowolnego procesu o zmiennej prędkości odkształcenia i zmiennej temperaturze.

O ile założyć próbkę idealną, $\frac{dF_0}{dx} = 0$, to rozwiązanie (4.6) redukuje się do postaci

$$(4.7) \quad \frac{\lambda}{\lambda_0} = \exp \int \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial \sigma} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma}{\partial T} \frac{dT}{d\varphi} - \sigma \right) dt,$$

wyznaczającej bieżącą wartość gradientu z dokładnością do stałej. W przypadku stałej prędkości odkształcenia, $\dot{\varphi}$ odgrywa rolę parametru i wówczas $\varphi = \dot{\varphi}t$; $t = \frac{\varphi}{\dot{\varphi}}$; $dt = \frac{d\varphi}{\dot{\varphi}}$.

Jako definicję utraty stateczności przyjmuje się w tym przypadku obszar na płaszczyźnie (λ, φ) lub (σ, φ) , w którym gradient dąży do nieskończoności, tj. $\frac{d\lambda}{dt} \rightarrow \infty$. Odpowiednikiem nieskończonego wzrostu gradientu λ jest utworzenie się zlokalizowanej szyjki. Należy również pamiętać, że dopuszcza się zarówno wartości $+\lambda$ jak i $-\lambda$, stąd rozwiązanie równania (4.5) może mieć kilka gałęzi. Zwiększenie się gradientu λ w pewnym obszarze nie stanowi jeszcze o utracie stateczności. Tak więc istnieją zawsze dwa obszary, w pierwszym gradient λ rośnie, lecz nie dąży do nieskończoności, jest to obszar deformacji statecznej. W drugim natomiast λ dąży do nieskończoności, jest to obszar utraty stateczności.

5. Przykłady w przypadku gradientu λ jako zmiennej niezależnej

Zakłada się równanie konstytutywne w postaci analogicznej do (2.4), jednak dla uproszczenia ze stałą czułością na prędkość odkształcenia n i z odkształceniem wstępnym φ_0 jako parametrem

$$(5.1) \quad \sigma = B(\varphi_0 + \varphi)^m \dot{\varphi}^n.$$

Zakładając proces izotermiczny otrzymuje się

$$(5.2) \quad \frac{\partial \sigma}{\partial \varphi} = \frac{m}{\varphi_0 + \varphi} \sigma; \quad \frac{\partial \sigma}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{n}{\dot{\varphi}} \sigma.$$

Po podstawieniu (5.2) do (4.7) i założeniu stałej prędkości odkształcenia, $\varphi = \dot{\varphi}t$ mamy

$$(5.3) \quad \frac{\lambda}{\lambda_0} = \exp \left[\frac{\dot{\varphi}}{n} \int \left(\frac{m}{\varphi_0 + \dot{\varphi}t} - 1 \right) dt \right],$$

a po scałkowaniu otrzymuje się szukane rozwiązanie dla obszaru rosnącego λ

$$(5.4) \quad \frac{\lambda}{\lambda_0} = \left(\frac{\varphi_0 + \varphi}{\dot{\varphi}} \right)^{m/n} \cdot e^{-\varphi/n}, \quad \varphi \leq \varphi_r$$

lub

$$(5.5) \quad \log \frac{\lambda}{\lambda_0} = \frac{1}{n} \left(m \log \frac{\varphi_0 + \varphi}{\dot{\varphi}} - \varphi M \right), \quad M = \log e.$$

Otrzymane rozwiązanie (5.5) dla próbki aluminiowej i dla $\varphi_0 = 0$ przy kilku wartościach prędkości odkształcenia oraz przy kilku wartościach czułości na prędkość odkształcenia n przedstawiono na rys. 1. Na rysunku widać stabilizujący wpływ wzrostu prędkości odkształcenia oraz udowodnioną uprzednio dla tego równania konstytutywnego niewrażliwość punktu utraty stateczności, tj. punktu, gdzie $\frac{d\lambda}{d\varphi} = 0$, na prędkość odkształcenia.

Rozgraniczający obszary stateczności i niestateczności punkt, gdzie $\frac{d\lambda}{d\varphi} = 0$, przypada zawsze dla rozważanego równania konstytutywnego, przy założeniu $\varphi_0 = 0$, dla wartości odkształcenia $\varphi_r = m$.

W celu dyskusji wpływu poszczególnych czynników, takich jak $\dot{\varphi}$, φ_0 , m , n na wartości gradientu λ należy obliczyć następujące różniczki

$$(5.6) \quad \frac{\partial \lambda}{\partial \dot{\varphi}} = - \frac{m}{n} \left(\frac{\varphi_0 + \varphi}{\dot{\varphi}} \right) \frac{\lambda}{\lambda_0},$$

$$(5.7) \quad \frac{\partial \lambda}{\partial \varphi_0} = \frac{m}{n} \left(\frac{\dot{\varphi}}{\varphi_0 + \varphi} \right) \frac{\lambda}{\lambda_0},$$

$$(5.8) \quad \frac{\partial \log \lambda}{\partial m} = \frac{1}{n} \log \left(\frac{\varphi_0 + \varphi}{\dot{\varphi}} \right),$$

$$(5.9) \quad \frac{\partial \log \lambda}{\partial n} = - \frac{1}{n^2} \left[m \log \left(\frac{\varphi_0 + \varphi}{\dot{\varphi}} \right) - \varphi M \right].$$

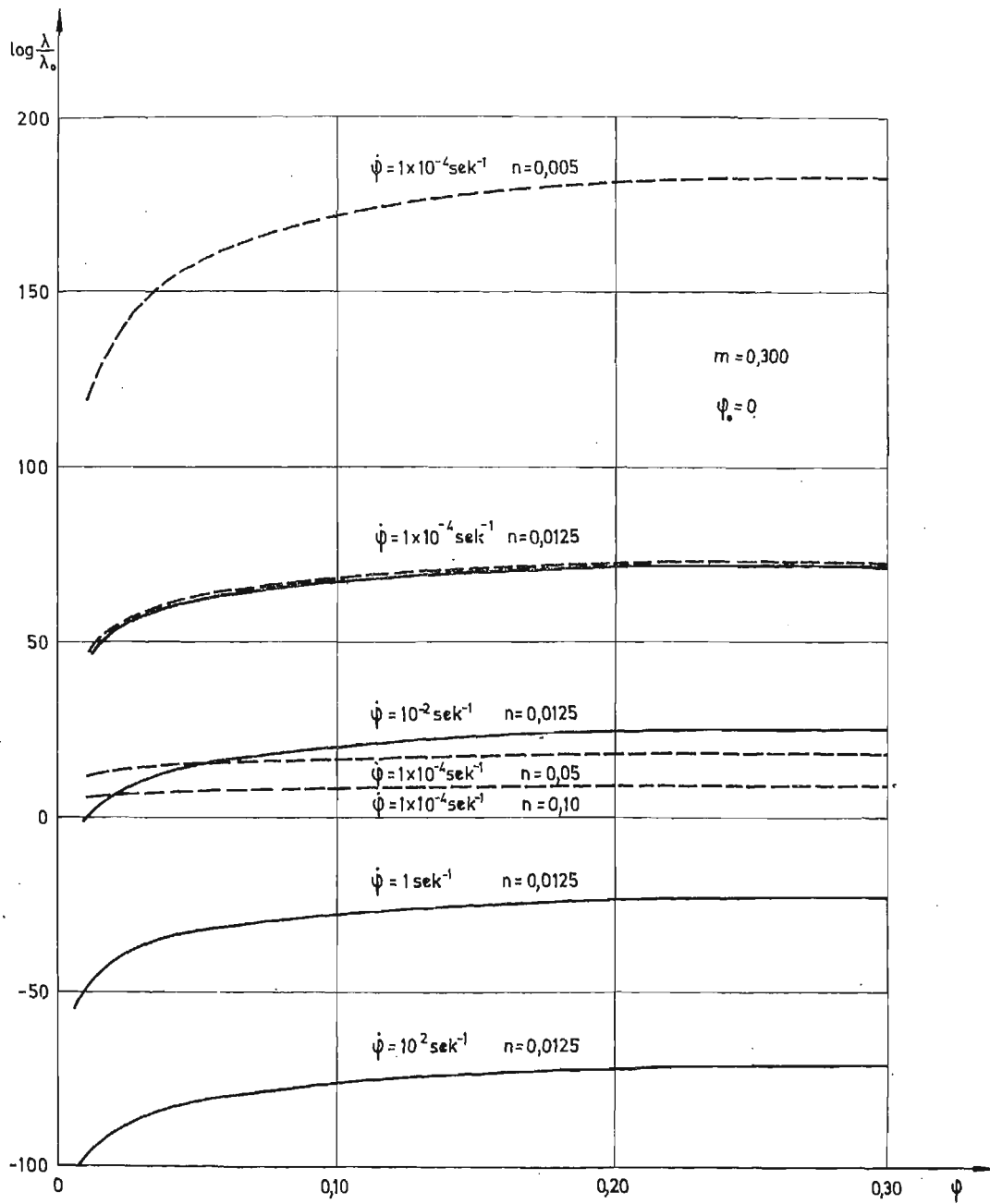
Zarówno przedstawione wykresy na rys. 1, jak również równania od (5.6) do (5.9) wskazują, że zwiększenie prędkości odkształcenia oraz wzrost czułości na prędkość odkształcenia wpływają ustateczniająco na proces deformacji próbki, tj. następuje zmniejszenie gradientów. Natomiast zwiększenie odkształcenia wstępnego φ_0 oraz wykładnika umocnienia m prowadzi do wzrostu gradientu λ . Podobne wnioski otrzymano także w pracy [5].

Przykładem szczególnym równania konstytutywnego (5.1) jest związek, gdy nie zachodzi umocnienie, tj. dla $m = 0$

$$(5.10) \quad \sigma = \sigma_0 \dot{\varphi}^n.$$

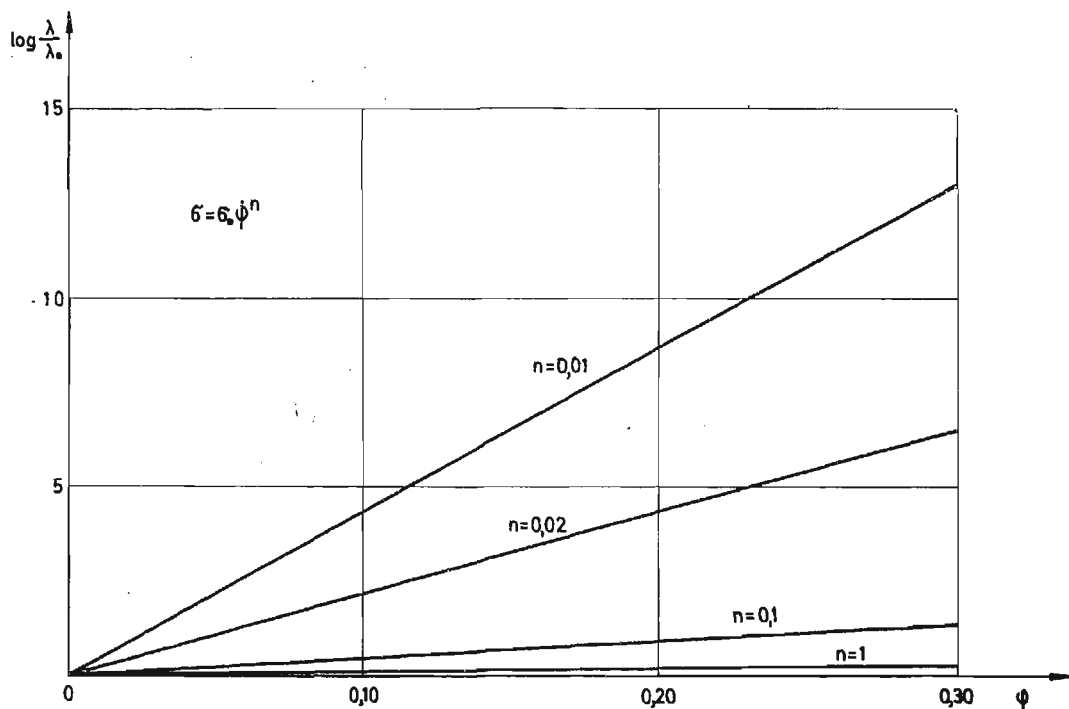
Równanie (5.10) może stanowić w pewnych przypadkach dobry opis zjawiska superplastyczności metali, wówczas czułość na prędkość odkształcenia może osiągać stosunkowo duże wartości, w przybliżeniu $n = 0,1$. Dla $n = 1$ otrzymuje się równanie dla cieczy Newtona. Dla przypadku równania (5.10) rozwiązanie (5.4) upraszcza się do postaci (5.11) po przyjęciu odpowiedniej gałęzi rozwiązania

$$(5.11) \quad \frac{\lambda}{\lambda_0} = \exp \frac{\varphi}{n}, \quad \varphi_r = 0, \quad \varphi \geq \varphi_r.$$



Rys.1

Otrzymany wynik przedstawiono na rys. 2 dla różnych wartości czułości na prędkość n . W obecnym przypadku obszar, w którym λ zwiększa się nie zmierzając do nieskończoności, redukuje się do zera i utrata stateczności następuje natychmiast, a więc dla całego obszaru zachodzi $\lambda(\varphi) \rightarrow \infty$. Jednak obserwuje się wydatne zmniejszenie gradientów odkształcenia dla materiałów typu cieczy o bardzo dużej lepkości, co zachodzi dla metali superplastycznych.



Rys. 2

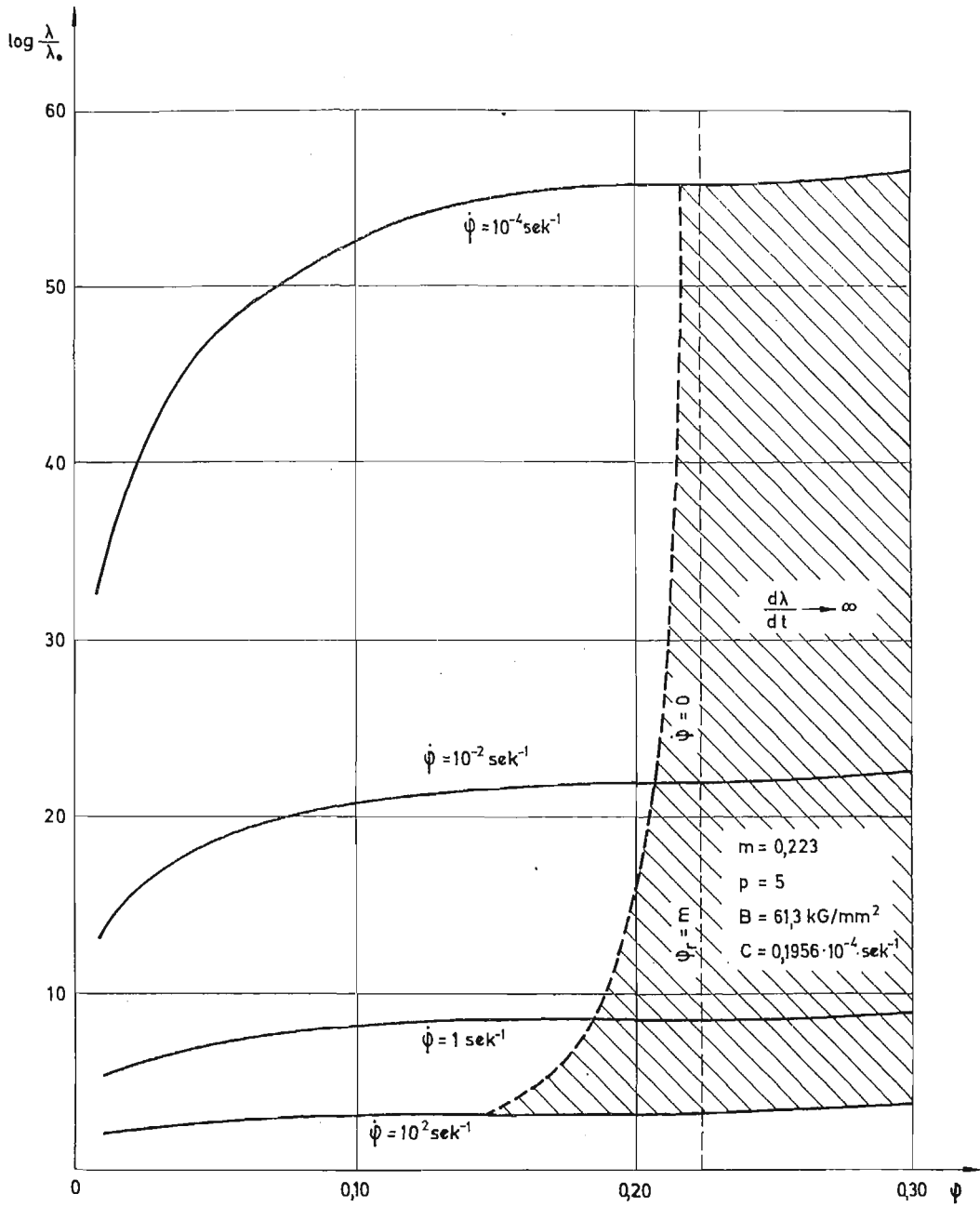
Jako drugi przykład założono równanie konstytutywne o strukturze równania (3.1) w postaci

$$(5.12) \quad \sigma = B\varphi^m + \left(\frac{\dot{\varphi}}{C}\right)^{1/p} \quad \text{lub} \quad \dot{\varphi} = C[\sigma - B\varphi^m]^p.$$

Równanie (5.12) nadaje się do opisu krzywych umocnienia żelaza i miękkich stali z pomięciem przystanku plastycznego [1]. Na podstawie (5.12).

$$(5.13) \quad \frac{\partial \sigma}{\partial \varphi} = \frac{m}{\varphi} B\varphi^m = \frac{m}{\varphi} \left[\sigma - \left(\frac{\dot{\varphi}}{C}\right)^{1/p} \right]^p,$$

$$(5.14) \quad \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial \sigma} = p\dot{\varphi} \left(\frac{C}{\dot{\varphi}}\right)^{1/p}.$$



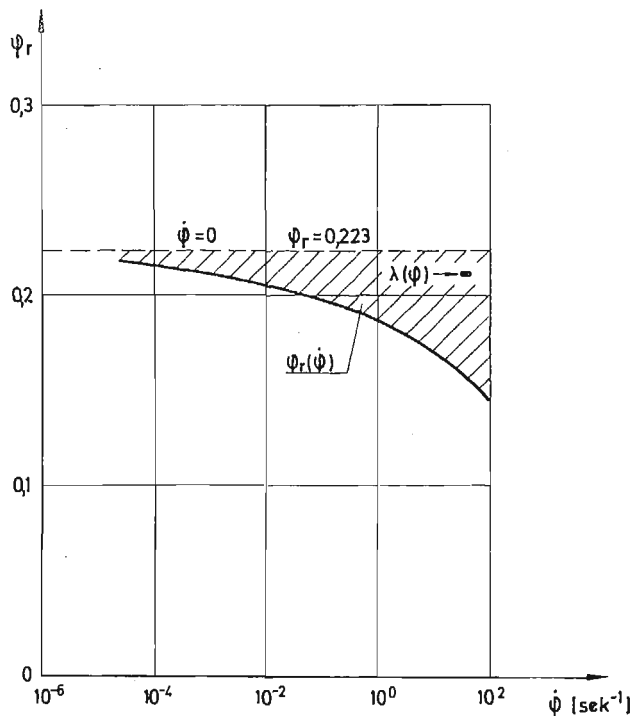
Rys. 3

Po podstawieniu związków (5.13) i (5.14) do równania (4.7) otrzymuje się

$$(5.15) \quad \frac{\lambda}{\lambda_0} = \exp \left\{ p \dot{\varphi} \left(\frac{C}{\dot{\varphi}} \right)^{1/p} \int \left[\frac{m}{\varphi} B \varphi^m - B \varphi^m - \left(\frac{\dot{\varphi}}{C} \right)^{1/p} \right] dt \right\},$$

a po scałkowaniu dla przypadku stałej prędkości odkształcenia, $\varphi = \dot{\varphi} t$,

$$(5.16) \quad \frac{\lambda}{\lambda_0} = \exp \left\{ p B \varphi \left(\frac{C}{\dot{\varphi}} \right)^{1/p} \left[\varphi^m \left(\frac{1}{\varphi} - \frac{1}{m+1} \right) - \frac{1}{B} \left(\frac{\dot{\varphi}}{C} \right)^{1/p} \right] \right\}, \quad \varphi \leq \varphi_r.$$



Rys. 4

Wartości wydłużenia równomiernego φ_r można wyznaczyć z warunku $\frac{d\lambda}{d\varphi} = 0$, stąd

$$(5.17) \quad \varphi_r^m \left(\frac{m}{\varphi_r} - 1 \right) - \frac{1}{B} \left(\frac{\dot{\varphi}}{C} \right)^{1/p} = 0.$$

Gdzie wartość odkształcenia $\varphi_r(\dot{\varphi})$ należy interpretować jako wartość rozdzielającą obszary stateczności i niestateczności, dla $\varphi > \varphi_r$, $\lambda(\varphi) \rightarrow \infty$. Równania (5.16) i (5.17) zostały przeanalizowane numerycznie dla przypadku miękkiej stali, $p = 5$; $m = 0,223$; $C = 0,1956 \cdot 10^{-4} \text{ sek}^{-1}$; $B = 61,3 \text{ kG/mm}^2$. Wartości stałych p , m , C , B przyjęto za pracę [1]. Wyniki obliczeń dla czterech wartości prędkości odkształcenia $\dot{\varphi}_1 = 10^{-4} \text{ sek}^{-1}$; $\dot{\varphi}_2 = 10^{-2} \text{ sek}^{-1}$; $\dot{\varphi}_3 = 10^0 \text{ sek}^{-1}$; $\dot{\varphi}_4 = 10^2 \text{ sek}^{-1}$ przedstawiono na rys. 3 i 4. W obecnie rozważanym

przypadku widać również stabilizujący wpływ wzrostu prędkości odkształcenia, jednak w miarę zwiększania wartości prędkości odkształcenia $\dot{\varphi}$ punkt utraty stateczności przemieszcza się w stronę mniejszych odkształceń. Największą wartość $\varphi_r = 0,223$, uzyskuje się dla $\dot{\varphi} = 0$. Zmiany φ_r w funkcji $\dot{\varphi}$ przedstawiono na rys. 4. Zmniejszanie się φ_r wraz ze wzrostem $\dot{\varphi}$ wydaje się być charakterystyczne dla zachowania się żelaza i miękkich stali w przeciwieństwie do, na przykład, miedzi lub aluminium.

6. Dyskusja i wnioski

Porównanie dwóch przedstawionych wyżej warunków utraty stateczności w próbie rozciągania, które opierają się w pierwszym przypadku na definicji gradientu odkształcenia λ jako parametru, w drugim natomiast jako zmiennej niezależnej, prowadzi do wniosku, że dla $\lambda = \infty$ te dwie koncepcje są zbieżne. Równoważność obydwu warunków, wzory (2.2) i (4.5), należy rozumieć w ten sposób, że dla jednakowego typu równania konstytutywnego i idealnej próbki $\left(\frac{dF_0}{dx} = 0\right)$, otrzymuje się jednakowe wartości φ_r z warunku (2.2) oraz z warunku $\frac{d\lambda}{d\varphi} = 0$ dla zależności (4.7).

Pośród ważniejszych wniosków należy wymienić:

(i) Opis procesu utraty stateczności przy użyciu definicji gradientu odkształcenia w mierze naturalnej $\lambda = \frac{d\varphi}{dx}$ bardziej dokładnie opisuje cały proces deformacji próbki w przeciwieństwie do warunku otrzymanego w oparciu o kryterium maksimum siły $\frac{dP}{dx} = 0$, gdzie opis dotyczy jedynie samego punktu utraty stateczności.

(ii) Zwiększenie prędkości odkształcenia wpływa ustateczniająco na proces rozciągania próbki powodując ogólne zmniejszenie się gradientów deformacji po długości próbki.

(iii) Ponieważ dla próbki rzeczywistej punkt utraty stateczności zależy zarówno od początkowej niejednorodności próbki, jak i od prędkości odkształcenia, przy czym jeżeli tendencje te są przeciwstawne, to wydłużenie równomierne φ_r może być zarówno mniejsze, jak i większe od wartości «teoretycznej» dla warunków statycznych. W przypadku materiałów takich jak stal wzrost prędkości odkształcenia może powodować zmniejszanie się wydłużeń równomiernych wraz ze wzrostem prędkości odkształcenia.

(iiii) W przypadku założenia jako kryterium utraty stateczności odpowiednio mniejszego gradientu odkształcenia λ niż $\lambda = \infty$, tj. $\lambda < \infty$, punkt utraty stateczności przesuwa się do obszaru odkształceń mniejszych, wówczas

$$(\varphi_r)_{\lambda < \infty} < (\varphi_r)_{\lambda = \infty}.$$

W tej sytuacji wydłużenie równomierne φ_r , rozumiane jako wielkość charakteryzująca własności plastyczne metalu, wymaga bardziej precyzyjnej definicji niż dotychczas.

Literatura cytowana w tckście

1. J. D. CAMPBELL, *Plastic instability in rate — dependent materials*, J. Mech. Phys. Solids, 4, 15 (1967), 359.
2. E. W. HART, *Theory of the tensile test*, Acta Met., 2, 15 (1967), 351.
3. J. KLEPACZKO, *Generalized conditions for stability in tension tests*, Int. J. Mech. Sciences, 5, 10 (1968), 225.
4. J. KLEPACZKO, *O potęgowej postaci mechanicznego równania stanu z uwzględnieniem temperatury*, Rozpr. Inż., 3, 13 (1965), 561.
5. Z. MARCINIAK, *Związek między czułością materiału na prędkość odkształcenia a przebiegiem rozciągania niejednorodnych próbek*, Arch. Hutn., 3, 8 (1968), 305.
6. J. WANTUCHOWSKI, *Wpływ prędkości odkształcenia na wielkość naprężeń przy próbie rozciągania*, Arch. Hutn., 1, 2 (1957), 47.

Р е з ю м е

ОБОБЩЕНИЕ УСЛОВИЯ УСТОЙЧИВОСТИ ПРИ ИСПЫТАНИЯХ НА РАСТЯЖЕНИЕ

В работе обсуждаются и сравниваются два условия устойчивости для испытуемых на растяжение металлических образцов. Первое из обобщенных условий для идеального образца, зависящее от способности материала образца к упрочнению, чувствительности к скорости деформации и температуры, приводилось прежде в работе [3]. Это условие, опирающееся на критерий максимальной силы, в настоящей работе обобщается на случай образца с неоднородным по длине исходным сечением, причем в качестве параметра вводится градиент натуральной деформации φ

по длине образца: $\lambda = \frac{d\varphi}{dx}$.

Второе из обобщенных условий определено на основе градиента деформации λ , рассматриваемого в качестве независимой переменной, что приводит к дифференциальному уравнению описывающему весь процесс деформации. Решение этого уравнения дает изменение градиента во времени $\lambda(t)$. Область, в которой градиент деформации λ стремится к бесконечности, является областью неустойчивости.

Для обоих случаев дается несколько примеров, иллюстрирующих поведение металлов так с гранцентрированной, как и объемноцентрированной кубической решеткой.

S u m m a r y

DISCUSSION OF THE GENERALIZED CONDITIONS FOR STABILITY
IN THE TENSION TEST

The aim of the present work is a comparison between two existing conditions for stability in the tension test of a metal specimen.

The first stability condition for an ideal specimen, which takes into consideration the strain hardening phenomenon the strain rate sensitivity and temperature dependence of a metal investigated, has been discussed previously in the paper [3]. This condition, which is based on the maximum of the tensile force criterion, has been generalized in the present paper for the case when the specimen cross-section is initially nonconstant. The new parameter is introduced, namely, the strain gradient λ , when the natural measure

of strain φ is used, $\lambda = \frac{d\varphi}{dx}$.

The second condition has been defined on the basis of the strain gradient λ as an independent variable. In this way, the differential equation was obtained which describes the all process of deformation. The solution appears as the changes of strain gradient in a function of time, $\lambda = \lambda(t)$. Over the range of (λ, t) plane when strain gradient tends to infinity the specimen behaviour is unstable.

For both cases some examples illustrating behaviour of specimens made of *fcc* as well *bcc* metals are given.

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 8 sierpnia 1969 r.
