MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
3, 8 (1970)

# OGRANICZENIA NA FUNKCJĘ ENERGII SPRĘŻYSTEJ WYNIKAJĄCE Z WARUNKU SILNEJ ELIPTYCZNOŚCI

BERNARD DUSZCZYK (WARSZAWA)

## 1. Wstęp

W liniowej teorii sprężystości przyjmuje się, że funkcja materiałowa (energia sprężysta) jest dodatnio określoną formą kwadratową; dla materiałów izotropowych odpowiada to warunkom: $\mu > 0$ i $3\lambda + 2\mu > 0$. Ograniczenie to zapewnia, że klasyczne infinitezymalne teorie prowadzą do fizycznie dopuszczalnych wyników w przypadku małych odkształceń.

W roku 1956 (por. [4] § 51) TRUESDELL sformułował podobny problem w teorii nieliniowej: czy można ustalić taki zbiór warunków ograniczających, który zapewni fizycznie dopuszczalne rozwiązanie w każdym dopuszczalnym stanie odkształcenia i dla każdego materiału? Ponieważ teoria liniowa jest szczególnym przypadkiem nieliniowej teorii sprężystości oczywiste jest, że te *nieznane* warunki winny implikować wspomniane wyżej klasyczne ograniczenia.

W międzyczasie opublikowano wiele prac zajmujących się tym problemem[1)] i zaproponowano szereg warunków stanowiących częściową odpowiedź na postawione pytania. Jednym z nich jest warunek silnej eliptyczności (*S–E*), wykorzystywany m.in. w teorii propagacji fal, przy badaniu jednoznaczności i stateczności rozwiązań nieliniowej teorii sprężystości i in.

W pracy niniejszej zajmujemy się warunkiem *S–E*, jego statycznymi implikacjami oraz wynikającymi zeń oszacowaniami na funkcję energii sprężystej, a także jego związkiem z jednoznacznością rozwiązań przemieszczeniowego zagadnienia brzegowego zbudowanego dla małych dodatkowych deformacji nałożonych na wstępną skończoną deformację.

## 2. Podstawowe równania teorii małych dodatkowych deformacji nałożonych na duże

Wprowadźmy trzy różne konfiguracje ciała $B$ w trójwymiarowej przestrzeni Euklidesa:
1) konfiguracja $\overset{\circ}{C}$ odpowiadająca stanowi naturalnemu ciała $B$,
2) konfiguracja $C$ odpowiadająca wstępnej skończonej deformacji ciała $B$ oraz
3) konfiguracja $\overset{*}{C}$ odpowiadająca dodatkowej nieskończenie małej deformacji ciała $B$.

[1)] Szczegółowy przegląd wyników tych prac podano w [4], § 51

Zakładać ponadto będziemy, że rozważane ciało $B$ zbudowane jest z materiału hipersprężystego i że proces deformacji ciała jest procesem izotermicznym. Oznacza to, że istnieje funkcja energii sprężystej $W$ (na jednostkę objętości w konfiguracji $\overset{\circ}{C}$), zależna od tensora odkształcenia $\gamma_{ij}$ i punktu materialnego $P$.

Przy opisie stanu deformacji posługiwać się będziemy konwekcyjnym układem współrzędnych $\{\vartheta^i\}$. Oznaczając przez $\overset{\circ}{g}_{ij}$ i $g_{ij}$ współrzędne tensora metrycznego odpowiednio w konfiguracji $\overset{\circ}{C}$ i $C$ oraz przez $\mathbf{g}_i$ wektory bazy w $C$, mamy dla wstępnej deformacji

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{2}(g_{ij}-\overset{\circ}{g}_{ij}), \tag{2.1}$$

$$\tau^{ij} = \frac{\varrho}{\varrho^\circ}\frac{\partial W}{\partial \gamma_{ij}}, \tag{2.2}$$

$$\nabla_i \tau^{ij} + \varrho f^j = 0, \tag{2.3}$$

$$\tau^{ij} n_i = p^j \quad \text{na powierzchni } S, \tag{2.4}$$

gdzie $\gamma_{ij}$ oznacza tensor odkształcenia, $\tau^{ij}$ — tensor naprężenia, $\mathbf{f} = f^i\mathbf{g}_i$ — siły masowe, $\mathbf{p} = p^i\mathbf{g}_i$ — siły powierzchniowe na jednostkę powierzchni $S$ w konfiguracji $C$. Równości (2.3) i (2.4) przedstawiają odpowiednio równania równowagi i warunki brzegowe.

Jeśli przyjąć, że ciało jest izotropowe i jednorodne, tensor napężenia $\tau^{ij}$ można przedstawić w innej postaci. Mamy bowiem

$$W = W(I_1, I_2, I_3), \tag{2.5}$$

gdzie $I_k$ są niezmiennikami stanu odkształcenia

$$I_1 = \overset{\circ}{g}{}^{rs} g_{rs}, \; I_2 = \overset{\circ}{g}_{rs} g^{rs} I_3, \; I_3 = \det(g_{ij})/\det(\overset{\circ}{g}_{ij}). \tag{2.6}$$

Wówczas

$$\tau^{ij} = \Phi_1 \overset{\circ}{g}{}^{ij} + \Phi_2 b^{ij} + \Phi_3 I_3 g^{ij}, \tag{2.7}$$

przy czym oznaczono

$$b^{ij} = g_{rs}(\overset{\circ}{g}{}^{ij}\overset{\circ}{g}{}^{rs} - \overset{\circ}{g}{}^{ir}\overset{\circ}{g}{}^{js}), \tag{2.8}$$

$$\Phi_i = \frac{2}{\sqrt{I_3}}\frac{\partial W}{\partial I_i}. \tag{2.9}$$

Korzystając z ogólnej teorii małych dodatkowych deformacji nałożonych na duże, opracowanej przez GREENA, RIVLINA i SHIELDA [1], uzupełnionej następnie interpretacją na gruncie rachunku wariacyjnego przez GUO ZHONG-HENGA i URBANOWSKIEGO [9], podamy związki opisujące stan ciała $B$ w konfiguracji $\overset{*}{C}$.

Niech wektor $\varepsilon\mathbf{w}$ ($\mathbf{w} = w^i\mathbf{g}_i$, $\varepsilon$ — dostatecznie mały parametr) określa dodatkowe nieskończenie małe przemieszczenie ciała $B$. Na skutek dodatkowego przemieszczenia podane uprzednio wielkości doznają pewnych przyrostów, których liniowe części mają postać (por. [10]):

$$\mathbf{g}_i' = \nabla_i w^r \mathbf{g}_r, \tag{2.10}$$

$$g_{ij}' = \nabla_i w_j + \nabla_j w_i = 2\gamma_{ij}', \tag{2.11}$$

$$g' = \det(g_{ij}) = g g_{rs}' g^{rs}, \qquad \frac{\varrho'}{\varrho^\circ} = -\frac{\varrho}{\varrho^\circ}\nabla_i w^i, \tag{2.12}$$

(2.13) $$\tau'^{ij} = \frac{\varrho}{\varrho^{\circ}} \frac{\partial^2 W}{\partial \gamma_{ij} \partial \gamma_{rs}} \gamma'_{rs} + \frac{\varrho'}{\varrho^{\circ}} \frac{\partial W}{\partial \gamma_{ij}} = K^{ijrs} \nabla_r w_s - \tau^{ij} \nabla_r w^r,$$

(2.14) $$\nabla_i \tau'^{ij} + \Gamma'^{r}_{rs} \tau^{sj} + \Gamma'^{j}_{rs} \tau^{rs} + \varrho' f^i + \varrho f'^i = 0,$$

(2.15) $$\Gamma'^{k}_{ij} = \nabla_i \nabla_j w^k,$$

(2.16) $$n_i \tau'^{ij} + n'_i \tau^{ij} = p'^i \quad \text{na } S,$$

gdzie

(2.17) $$K^{ijrs} = \frac{\varrho}{\varrho^{\circ}} \frac{\partial^2 W}{\partial \gamma_{ij} \partial \gamma_{rs}}, \qquad K^{ijrs} = K^{rsij} = K^{ijsr} = K^{jisr},$$

lub dla materiałów izotropowych

(2.18) $$I'_1 = \mathring{g}^{ij} g'_{ij}, \qquad I'_2 = a^{ij} g'_{ij}, \qquad I'_3 = \frac{g'}{\mathring{g}},$$

(2.19) $$\tau'^{ij} = \Phi'_1 \mathring{g}^{ij} + \Phi'_2 b^{ij} + \Phi_2 b'^{ij} + \Phi'_3 I_3 g^{ij} + \Phi_3 I_3 g'^{ij} + \Phi_3 I'_3 g_{ij},$$

(2.20) $$b'^{ij} = (\mathring{g}^{ij} \mathring{g}^{rs} - \mathring{g}^{ir} \mathring{g}^{js}) g'_{rs},$$

(2.21.1) $$\Phi'_i = \sum_{j=1}^{3} A_{ij} I'_j - \frac{\Phi_i}{2I_3} I'_3 \Phi_i, \qquad i = 1, 2, 3,$$

(2.21.2) $$A_{ij} = A_{ji} = \frac{2}{\sqrt{I_3}} \frac{\partial^2 W}{\partial I_i \partial I_j}, \qquad a^{ij} = (g^{ij} g^{rs} - g^{ir} g^{js}) \mathring{g}_{rs} I_3.$$

Podstawiając (2.13) i (2.15) do równań równowagi (2.14) i uwzględniając (2.3) otrzymujemy

(2.22) $$C^{ijrs} \nabla_i \nabla_r w_s + \nabla_i C^{ijrs} \nabla_r w_s + \varrho f'^j = 0,$$

gdzie

(2.23) $$C^{ijrs} = K^{ijrs} + \tau^{ir} g^{js},$$

przy czym dla materiałów izotropowych

(2.24) $$K^{ijrs} = 2A_{11} \mathring{g}^{ij} \mathring{g}^{rs} + 2A_{12} (\mathring{g}^{ij} a^{rs} + \mathring{g}^{rs} b^{ij}) + 2A_{13} I_3 (\mathring{g}^{ij} g^{rs} + g^{ij} \mathring{g}^{rs}) + 2A_{22} a^{rs} b^{ij} +$$
$$+ 2A_{23} I_3 (g^{ij} a^{rs} + b^{ij} g^{rs}) + 2A_{33} I_3^2 g^{ij} g^{rs} - \Phi_2 (\mathring{g}^{is} \mathring{g}^{jr} + \mathring{g}^{ir} \mathring{g}^{js}) - \Phi_3 I_3 (g^{is} g^{jr} +$$
$$+ g^{ir} g^{js}) + 2\Phi_2 \mathring{g}^{ij} \mathring{g}^{rs} + 2\Phi_3 g^{ij} g^{rs}.$$

Ponieważ tensor $\gamma_{ij}$ jest symetryczny, można, nie zawężając ogólności, dobrać układ współrzędnych konwekcyjnych $\{\vartheta^i\}$ (związany z konfiguracją $C$) w ten sposób, by wektory bazy pokrywały się z osiami głównymi tensora $\gamma_{ij}$. Tensor odkształcenia oraz pomocnicze tensory $a^{ij}$, $b^{ij}$ mają wówczas postać diagonalną i pewne współczynniki w równaniach równowagi (2.22) znikają. Jedynie $C^{iiii}$, $C^{ijij}$, $C^{ijji}$, $C^{iijj}$ (nie sumować!) nie są równe tożsamościowo zeru.

Rozważmy przypadek, gdy jednorodne izotropowe ciało $B$ poddane zostało jednorodnej wstępnej deformacji. Zgodnie z poprzednią uwagą można przyjąć, że $\{\vartheta^i\}$ pokrywa się w konfiguracji $C$ z ortogonalnym kartezjańskim układem współrzędnych $\{x, y, z\}$. Współczynniki (2.23) są wówczas stałe, ponieważ mamy:

$$\mathring{g}_{ij} = \lambda_i^{-2} g_{ij}, \quad g_{ij} = \delta_{ij}, \quad \mathring{g}^{ii} = \frac{1}{\mathring{g}_{ii}}, \quad \gamma_{ij} = \frac{1}{2}(1-\lambda_i^{-2})g_{ij}, \tag{2.25}$$

$$I_1 = \lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2, \quad I_3 = \lambda_1^2\lambda_2^2+\lambda_1^2\lambda_3^2+\lambda_2^2\lambda_3^2, \quad I_3 = \lambda_1^2\lambda_2^2\lambda_3^2, \tag{2.26}$$

$$\tau^{ii} = \lambda_i^2[\Phi_1+(I_1-\lambda_i^2)\Phi_2]+\Phi_3 I_3, \quad \tau^{ij} = 0 \text{ dla } i \neq j, \tag{2.27}$$

$$\tau'^{ij} = (K^{ijrs}-\tau^{ij}g^{rs})\nabla_r w_s, \quad \nabla_r w_s = \partial_r w_s = w_{s,r}, \tag{2.28}$$

$$\left\{\begin{aligned} K^{1111} &= 2A_{11}\lambda_1^4+4A_{12}\lambda_1^4(\lambda_2^2+\lambda_3^2)+4A_{13}I_3\lambda_1^2+2A_{22}\lambda_1^4(\lambda_2^2+\lambda_3^2)^2+\\ &\qquad +4A_{23}I_3\lambda_1^2(\lambda_2^2+\lambda_3^2)+2A_{33}I_3^2,\\ K^{1122} &= 2A_{11}\lambda_1^2\lambda_2^2+2A_{12}\lambda_1^2\lambda_2^2(\lambda_1^2+\lambda_2^2+2\lambda_3^2)+2A_{13}I_3(\lambda_1^2+\lambda_2^2)+\\ &\quad +2A_{22}\lambda_1^2\lambda_2^2(\lambda_2^2+\lambda_3^2)(\lambda_3^2+\lambda_1^2)+2A_{23}I_3(\lambda_2^2\lambda_3^2+\lambda_3^2\lambda_1^2+2\lambda_1^2\lambda_2^2)+\\ &\qquad +2A_{33}I_3^2+2\Phi_2\lambda_1^2\lambda_2^2+2\Phi_3 I_3,\\ K^{1221} &= -\Phi_2\lambda_1^2\lambda_2^2-\Phi_3 I_3; \end{aligned}\right. \tag{2.29}$$

pozostałe współczynniki otrzymujemy przez cykliczną zamianę wskaźników.

Ostatecznie, jeśli pominąć siły masowe, równania równowagi (2.22) przyjmują następującą postać:

$$\left\{\begin{aligned} &C^{1111}w_{1,11}+C^{2121}w_{1,22}+C^{3131}w_{1,33}+(C^{1122}+C^{2112})w_{2,12}+\\ &\qquad +(C^{1133}+C^{3113})w_{3,13} = 0,\\ &(C^{2211}+C^{1221})w_{1,12}+C^{1212}w_{2,11}+C^{2222}w_{2,22}+C^{3232}w_{2,33}+\\ &\qquad +(C^{2233}+C^{3223})w_{3,23} = 0,\\ &(C^{3311}+C^{1331})w_{1,13}+(C^{3322}+C^{2332})w_{2,23}+C^{1313}w_{3,11}+\\ &\qquad +C^{2323}w_{3,22}+C^{3333}w_{3,33} = 0, \end{aligned}\right. \tag{2.30}$$

przy czym $C^{iijj}+C^{jiij} = C^{jjii}+C^{ijji}$ (nie sumować!).

Zauważmy na koniec, że jeśli rozciągnięcia $\lambda_i$ są równe (tzn. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$), wszystkie współczynniki układu (2.30) można wyrazić przez dwie wielkości $M$ i $N$, jednoznacznie określone przez funkcję energii $W$, zależne jedynie od parametru deformacji (rozciągnięcia) $\lambda$, mianowicie

$$\begin{aligned} &C^{iiii} = M(\lambda), \quad C^{ijij} = N(\lambda), \quad \text{(nie sumować!)}\\ &C^{iijj}+C^{ijji} = C^{iijj}+C^{jiij} = M(\lambda)-N(\lambda). \end{aligned} \tag{2.31}$$

### 3. Warunek $S$–$E$

Rozważmy następujący liniowy układ równań różniczkowych o pochodnych cząstkowych:

$$A^{ijrs}(\mathbf{x})\partial_i\partial_r w_s+\Omega^j(\mathbf{w}) = F^j(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} = \{x_1, x_2, x_3\}, \tag{3.1}$$

gdzie $\Omega^j$ jest dowolnym liniowym operatorem różniczkowym rzędu $< 2$.

Utwórzmy macierz

(3.2) $$\mathbf{a} = \|a^{js}\| = \|A^{ijrs}\xi_i\xi_r\|, \quad |\boldsymbol{\xi}| \neq 0,$$

i przedstawmy ją w postaci sumy jej części symetrycznej i antysymetrycznej

$$\mathbf{a} = \mathbf{c}+\mathbf{k}$$

$$\mathbf{c} = \|c^{js}\| = \|C^{ijrs}\xi_i\xi_r\| = \frac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{a}^T),$$

$$\mathbf{k} = \|k^{js}\| = \|K^{ijrs}\xi_i\xi_r\| = \frac{1}{2}(\mathbf{a}-\mathbf{a}^T).$$

Będziemy mówili (por.[2] ), że układ (3.1) jest silnie eliptyczny w obszarze $B \subset E^3$, jeśli macierz $\mathbf{c}$ jest dodatnio[2)] określona w każdym punkcie $\mathbf{x}$ tego obszaru, dla dowolnego wektora $\boldsymbol{\xi}$, $|\boldsymbol{\xi}| \neq 0$, to znaczy jeśli zachodzi nierówność

(3.3) $$C^{ijrs}(\mathbf{x})\xi_i\xi_r\eta_j\eta_s > 0$$

dla dowolnych wektorów $\boldsymbol{\xi}$ i $\boldsymbol{\eta}$, $|\boldsymbol{\xi}| \neq 0$, $|\boldsymbol{\eta}| \neq 0$ i każdego $\mathbf{X} \in \mathbf{B}$. Układ ten jest eliptyczny w obszarze $B$, jeśli macierz $\mathbf{a}$ jest nieosobliwa w każdym punkcie obszaru $B$, tzn.

(3.4) $$\det(A^{ijrs}\xi_i\xi_r) \neq 0 \quad \text{dla każdego } \mathbf{x} \in B.$$

Można stąd wnioskować, że układy spełniające warunek (3.3) (warunek ten nazywać będziemy dalej warunkiem *S–E*) należą do klasy układów eliptycznych — lecz nie na odwrót.

Jak zostało pokazane np. w pracach [2, 3,] warunek (3.3) jest wystarczający, by przy odpowiednio regularnych współczynnikach i wystarczająco małym obszarze $B$ istniało rozwiązanie pierwszego zagadnienia brzegowego dla układu (3.1), i było ono jedyne. W dalszych rozważaniach zastosujemy warunek (3.3) do równań równowagi (2.22) i wyznaczymy stąd pewne ograniczenia dla wstępnej deformacji oraz dla funkcji energii sprężystej $W$.

Powróćmy zatem do równań równowagi (2.22). Z (2.17) i (2.23) widać, że $C^{ijrs} = C^{rsij}$, a więc macierz (3.2)

$$\|A^{ijrs}\xi_i\xi_r\| = \|C^{ijrs}\xi_i\xi_r\|, \quad |\boldsymbol{\xi}| \neq 0$$

jest symetryczna. Warunek *S–E* dla tej macierzy jest równoważny (3.3). Na to, by $\mathbf{c}$ była dodatnio określona potrzeba i wystarcza, aby spełnione były następujące nierówności

(3.5) $$\begin{aligned} &c^{11} > 0, \\ &c^{11}c^{22}-c^{12}c^{21} > 0, \\ &\det(c^{ij}) > 0. \end{aligned}$$

Bezpośrednie wnioski z (3.5) wskazują, że także musi zachodzić

(3.6) $$c^{22} > 0 \quad \text{i} \quad c^{33} > 0,$$

a stąd wynika natychmiast, że

(3.7) $$C^{ijij} > 0 \quad \text{(nie sumować!)}.$$

Oczywiście, warunki (3.7) są tylko konieczne dla spełnienia (3.5), ale nie wystarczają.

[2)] lub ujemnie określona; w tym przypadku wystarczy pomnożyć wszystkie równania układu (3.1) przez (−1), by otrzymać dodatnią określoność.

Ze względu na skomplikowaną postać ostatnich dwu nierówności układu (3.5), dalszą ich analizę prowadzić będziemy przy zastosowaniu do szczególnych przypadków równań równowagi. Przy jednorodnej i *jednakowej* wstępnej deformacji współczynniki układu równań równowagi (2.30) spełniają dodatkowe związki (2.31): w tym przypadku mamy tylko dwie niezależne wielkości (*funkcje materiałowe*, zależne tylko od współczynnika deformacji $\lambda$) $M$ i $N$, przez które wyrażają się wszystkie współczynniki układu (2.30). Tutaj warunki (3.5) wyrażają się stosunkowo prosto, mamy bowiem

$$\begin{cases} c^{11} = M\xi_1^2+N(\xi_2^2+\xi_3^2) > 0, \\ c^{11}c^{22}-c^{12}c^{21} = N[M(\xi_1^2+\xi_2^2)+N\xi_3^2] > 0, \\ \det(c^{ij}) = MN^2|\boldsymbol{\xi}|^3 > 0, \end{cases}$$

co z kolei równoważne jest następującym nierównościom

$$M > 0 \quad \text{i} \quad N > 0, \tag{3.8}$$

stanowiącym warunek $S$–$E$ dla układu (2.30), którego współczynniki spełniają dodatkowo związki (2.31).

Rozważmy teraz przypadek, gdy przy wstępnej jednorodnej deformacji (2.25) dodatkowa deformacja jest płaska

$$w_1 = w_1(\vartheta^1, \vartheta^2), \qquad w_2 = w_2(\vartheta^1, \vartheta^2), \qquad w_3 \equiv 0.$$

Układ (2.30) redukuje się wówczas do dwu równań i warunki (3.5) przyjmują postać

$$\begin{aligned} &C^{1111}\xi_1^2+C^{2121}\xi_2^2 > 0, \\ &C^{1111}C^{1212}\xi_1^4+[C^{1111}C^{2222}+C^{1212}C^{2121}-(C^{1122}+C^{2112})^2]\xi_1^2\xi_2^2+ \\ &\qquad +C^{2222}C^{2121}\xi_2^4 > 0. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Lewa strona drugiej nierówności jest trójmianem kwadratowym; warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, by trójmian ten był dodatni dla każdego $\boldsymbol{\xi}$ jest

$$(\sqrt{C^{1111}C^{2222}}+\sqrt{C^{2121}C^{1212}})^2 > (C^{1122}+C^{2112})^2, \qquad C^{ijij} > 0, \tag{3.10}$$

albo

$$(\sqrt{C^{1111}C^{2121}}+\sqrt{C^{2222}C^{1212}})^2+H > 0, \qquad C^{ijij} > 0, \tag{3.11}$$

jeśli zauważyć, że $(3.9)_2$ przedstawić można w następujących równoważnych postaciach

$$C^{1111}C^{1212}\xi_1^4+(C^{1111}C^{2121}+C^{2222}C^{1212}+H)\xi_1^2\xi_2^2+C^{2222}C^{2121}\xi_2^4 > 0, \tag{3.12.1}$$

lub

$$(C^{1111}\xi_1^2+C^{2222}\xi_2^2)(C^{1212}\xi_1^2+C^{2121}\xi_2^2)+H\xi_1^2\xi_2^2 > 0, \tag{3.12.2}$$

gdzie

$$H = 4\lambda_1^4\lambda_2^4(\lambda_1^2-\lambda_2^2)^2[(A_{11}A_{22}-A_{12}^2)-K^{1212}(A_{11}+2\lambda_3^2A_{12}+\lambda_3^4A_{22})].$$

Sprawdzić można natychmiast, że nierówności (3.8) są szczególnym przypadkiem (3.12.2) jeśli przyjąć $\lambda_1 = \lambda_2$.

Ponieważ nierówności (3.10) [lub równoważne (3.11)] mają skomplikowaną, a przez to trudną do zinterpretowania postać, spróbujemy podać nieco silniejsze warunki (wystarczające), lecz w prostszej formie.

Zbudujemy formę kwadratową

$$A_{ij}\xi^i\xi^j, \tag{3.13}$$

w której, zgodnie z (2.21.2) oznaczono

$$A_{ij} = \frac{2}{\sqrt{I_3}}\frac{\partial^2 W}{\partial I_i \partial I_j},$$

zaś $\boldsymbol{\xi} = [\xi_1, \xi_2, \xi_3]$ — dowolny niezerowy wektor. Z (2.29) wnioskujemy, że występujące we współczynnikach układu (2.30) wielkości $K^{iiii}$ stanowią wartość formy (3.13) dla pewnego wektora $\mathring{\boldsymbol{\xi}}$, zatem ich znak zależy jedynie od określoności (dodatniej czy ujemnej) tej formy. Określoność formy (3.13) w istotny sposób wpływa również na znak współczynnika $H$ w nierówności (3.12). Przypomnijmy postać współczynników $C^{ijkl}$:

$$C^{ijkl} = K^{ijkl} + \tau^{ik}g^{jl};$$

tak więc

$$\left\{\begin{array}{l} C^{1111} = K^{1111} + \tau^{11}, \\ C^{2222} = K^{2222} + \tau^{22}, \\ C^{1212} = K^{1212} + \tau^{11}, \\ C^{2121} = K^{1212} + \tau^{22}. \end{array}\right. \tag{3.14}$$

Jeśli zatem $\tau^{ii} > 0$ (nie sumować!) oraz forma (3.13) jest dodatnio określona, wówczas $C^{iiii} > 0$ (wniosek słuszny także dla $i = 3$); jeśli forma (3.13) jest dodatnio określona oraz[3)]

$$-\mathring{\tau} < K^{1212} \leqslant \frac{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}{A_{22}^2\lambda_3^4 + 2A_{12}\lambda_3^2 + A_{11}}, \qquad \mathring{\tau} = \min_{<i>}(\tau^{ii}), \tag{3.15}$$

gdzie, jak wiadomo z (2.29),

$$K^{1212} = K^{2121} = -\lambda_1^2\lambda_2^2(\Phi_2 + \lambda_3^2\Phi_3),$$

współczynnik $H$ jest nieujemny dla każdego $\lambda_i$. Można więc powiedzieć, że dodatnia określoność formy (3.13) oraz warunek (3.15) wystarczają, przy dodatnich naprężeniach głównych $\tau^{ii}$, by spełniony był warunek $S$–$E$.

Trzeba zauważyć, że jeśli $\tau^{ii} > 0$, dodatniość formy (3.13) nie jest konieczna. Przypuśćmy bowiem, że $A_{ij}\xi^i\xi^j < 0$.

Wówczas, jeśli

$$K^{1212} \geqslant \frac{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}{A_{22}\lambda_3^4 + 2A_{12}\lambda_3^2 + A_{11}}, \tag{3.16}$$

---

[3)] W przypadku dwuwymiarowym można przyjąć $\lambda_3 = 1$.

(nawet jeśli $K^{1212} > 0$), wyrażenie $H$ jest nieujemne. Wiadomo, że $K^{iiii} < 0$; jeśli wielkości te są dostatecznie małe, wówczas

$$C^{iiii} = K^{iiii} + \tau^{ii} g^{ii} > 0, \quad \text{(nie sumować!)},$$

a także

$$C^{ijij} = K^{ijij} + \tau^{ii} g^{jj} > 0 \quad \text{dla} \quad i \neq j,$$

i warunek (3.12.2) jest spełniony.

Oczywiście w przypadku, gdy przynajmniej jedno z naprężeń głównych jest ujemne potrzeba, by forma (3.13) była dodatnio określona. Wynika to bezpośrednio z warunku $C^{ijij} > 0$. A oto warunki wystarczające na to, by przy takich naprężeniach warunek (3.12.2) był spełniony

$$K^{iiii} > \tau^{ii}, \quad A_{ij} \xi^i \xi^j > 0,$$

$$-\overset{\circ}{\tau} < K^{1212} \leqslant \frac{A_{11} A_{22} - A_{12}^2}{A_{22} \lambda_3^4 + 2A_{12} \lambda_3^2 + A_{11}}, \tag{3.17}$$

gdzie $\overset{\circ}{\tau} = \min\limits_{<i>}(\tau^{ii})$.

Nie wszystkie z uzyskanych w tym paragrafie nierówności mają w statyce równie jasną interpretację fizyczną jak np. w teorii propagacji fal[4]. Szczególnie nierównościom (3.16) czy $(3.17)_3$, a tym samym nierówności $(3.10)_1$, trudno nadać wyraźny sens fizyczny. Lepiej wygląda sprawa z warunkami $(3.10)_2$. Korzystając z określenia (2.23) współczynników $C^{ijkl}$ można bezpośrednim rachunkiem sprawdzić, że z warunku $C^{iiii} > 0$ wynika, że

$$\frac{\partial \tau^{ii}}{\partial \lambda_i} > 0. \tag{3.18}$$

Oznacza to, że jeśli prostopadłościan z materiału izotropowego wydłużymy w kierunku jednego z kierunków głównych (podczas gdy pozostałe ściany nie ulegną zmianie), naprężenie rozciągające (lub siła rozciągająca) rośnie. Wniosek ten wydaje się być zgodny z intuicją (por. [4], § 51).

Nierówności $C^{ijij} > 0$, $i \neq j$ prowadzą do warunku[5]

$$\Phi_1 + \lambda_i^2 \Phi_2 > 0. \tag{3.19}$$

Warto zauważyć interesujące tożsamości, jakie spełniają współczynniki $C^{ijij}$, $i \neq j$:

$$\begin{gathered}
\frac{C^{1212}}{\lambda_1^2} - \frac{C^{2121}}{\lambda_2^2} = \frac{C^{1313}}{\lambda_1^2} - \frac{C^{3131}}{\lambda_3^2} = \frac{C^{2323}}{\lambda_2^2} - \frac{C^{3232}}{\lambda_3^2} = 0, \\
\left(\frac{C^{1212}}{\lambda_1^2} - \frac{C^{2323}}{\lambda_2^2}\right) \frac{1}{\lambda_1^2 - \lambda_3^2} = \left(\frac{C^{2323}}{\lambda_2^2} - \frac{C^{3131}}{\lambda_3^2}\right) \frac{1}{\lambda_2^2 - \lambda_1^2} = \\
= \left(\frac{C^{3131}}{\lambda_3^2} - \frac{C^{1212}}{\lambda_1^2}\right) \frac{1}{\lambda_3^2 - \lambda_2^2} = -\Phi_2.
\end{gathered} \tag{3.20}$$

[4] W teorii propagacji fal warunek $S$–$E$ jest konieczny i wystarczający, by w danym materiale mogły propagować się fale rzeczywiste. Warunek $C^{iiii} > 0$ zapewnia dodatniość kwadratu prędkości głównych fal podłużnych, zaś $C^{ijij} > 0$, $i \neq j$ dodatniość kwadratu prędkości głównych fal poprzecznych ([4], § 90).

[5] Truesdell zaproponował ten warunek przy dyskusji nieściśliwego materiału izotropowego, [8]. (Por. także [5, 6]).

Korzystając z określenia (2.27) i powyższych tożsamości otrzymujemy

$$\tau^{ii}-\tau^{jj} = C^{ijij}-C^{jiji} = \frac{1}{\lambda_i^2} C^{ijij}(\lambda_i^2-\lambda_j^2), \tag{3.21}$$

$$\frac{\tau^{ii}}{\lambda_i^2}-\frac{\tau^{jj}}{\lambda_j^2} = \frac{\lambda_i^2-\lambda_j^2}{\lambda_i^2\lambda_j^2} K^{ijij}. \tag{3.22}$$

Ponieważ $C^{ijij} > 0$, z (3.21) wnioskujemy, że w izotropowym materiale, w którym $S$–$E$ jest spełnione, większe naprężenia występują w kierunku większych odkształceń. W równości (3.22) o znaku różnicy po lewej stronie decyduje znak $K^{ijij}$. I tak np. przy ściskaniu [tzn. gdy zachodzi (3.17)] wielkości $K^{ijij}$ są dodatnie i dla $\lambda_i > \lambda_j$ powinno być $\lambda_i^{-2}\tau^{ii} > \lambda_j^{-2}\tau^{jj}$, (por. [4] § 51]).

Zauważmy jeszcze, że korzystając z (3.20) nierówność $(3.11)_1$ przedstawić można w prostszej postaci

$$\lambda_1^{-2}C^{1212}\left(\sqrt{\lambda_2^2 C^{1111}}+\sqrt{\lambda_1^2 C^{2222}}\right)^2+H > 0. \tag{3.23}$$

Nierówność ta wraz z $(3.11)_2$ tworzy warunek równoważny warunkowi $S$–$E$ w postaci (3.10).

### 4. Uwagi o jednoznaczności przemieszczeniowego zagadnienia brzegowego

Na początku tego paragrafu zaznaczono, że warunek $S$–$E$ wystarcza na to, by rozważane przemieszczeniowe zagadnienie brzegowe miało rozwiązanie i było ono jedyne. Niżej przytoczymy warunki konieczne, aby przemieszczeniowe zagadnienie brzegowe dla układu (2.30) miało rozwiązanie jednoznaczne.

Załóżmy zatem, że układ (2.30)

$$C^{ijkl}\partial_i\partial_k w_l = 0, \tag{4.1}$$

spełniony jest w pewnym ograniczonym obszarze $B$, przy warunku

$$\mathbf{w} = 0 \quad \text{na brzegu } S. \tag{4.2}$$

Ponieważ zawsze istnieje przynajmniej jedno rozwiązanie (zerowe) tego zagadnienia, zbudujemy warunki, przy których jest ono jedyne. Załóżmy, że rozwiązanie ma postać

$$\mathbf{w} = (h_{ij}\vartheta^i\vartheta^j-m)\cdot\mathbf{a}, \tag{4.3}$$

gdzie $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ jest dowolnym stałym wektorem, $\mathbf{h}$ — macierz o stałych elementach, $m$ — dowolna liczba dodatnia.

Jeśli macierz $\mathbf{h}$ jest dodatnio określona, wówczas $\mathbf{w}$ znika na powierzchni elipsoidy

$$h_{ij}\vartheta^i\vartheta^j \leqslant m. \tag{4.4}$$

Podstawiając (4.3) do (4.1) otrzymujemy

$$C^{ijkl}h_{ik}a_l = 0. \tag{4.5}$$

Na to, by powyższy układ równań algebraicznych był spełniony jedynie przez $\mathbf{a} = 0$, potrzeba i wystarcza, aby

$$\det(C^{ijkl}h_{ik}) \neq 0. \tag{4.6}$$

Wykazaliśmy więc, że dla zapewnienia jednoznaczności rozwiązań (4.1) przy warunkach (4.2) potrzeba, by dla dowolnej dodatnio określonej macierzy **h** spełniony był warunek (4.6). Korzystając z tego wyniku wykażemy dalej, że jeśli współczynniki równań (4.1) spełniają związki (2.31), warunek *S–E* (3.8) jest jednocześnie (dla przypadku płaskiego) konieczny dla zapewnienia jednoznaczności rozwiązań. Uwzględniając bowiem (2.31) w (4.6) mamy

$$MN(h_{11}+h_{22})^2+(M-N)^2(h_{11}h_{22}-h_{12}^2)\neq 0. \tag{4.7}$$

Ponieważ (4.7) zachodzi dla dowolnej dodatnio określonej macierzy **h**, zatem $MN>0$, a stąd[6] $M\geqslant 0$ i $N\geqslant 0$, przy czym $M$ i $N$ nie mogą znikać jednocześnie.

Przypuśćmy, że $M=0$ i $N>0$. Okazuje się, że istnieje wówczas nietrywialne rozwiązanie układu (4.1) przy warunkach (4.2) [nie należące do klasy rozwiązań (4.3)].

Wystarczy skonstruować taką funkcję $\varphi\neq$ const, że $w_i=\varphi,_i$, $\varphi,_i=0$ na $S$, np.

$$\varphi=\begin{cases}(r-r_0)^4 & \text{gdy } r\leqslant r_0,\\ 0 & \text{gdy } r>r_0,\end{cases} \tag{4.8}$$

gdzie $r_0$ jest promieniem kuli $K\subset B$, $r$ — odległością punktu $P\in B$ od środka kuli $K$. Ponieważ pole wektorowe **w** jest potencjalne, a równania (4.1) przyjmują przy $M=0$ postać

$$N(w_{i,k}-w_{k,i}),_k=0, \tag{4.9}$$

z łatwością stwierdzamy, że rozważane zagadnienie brzegowe ma rozwiązanie niezerowe.

Niech teraz $N=0$ i $M>0$. Natychmiast sprawdzamy, że np. pole wektorowe

$$\mathbf{w}=\begin{cases}(r-r_0)^4\cdot(\vartheta^2,-\vartheta^1,0) & \text{dla } r\leqslant r_0,\\ 0 & \text{dla } r>r_0,\end{cases} \tag{4.10}$$

jest wówczas nietrywialnym rozwiązaniem tego zagadnienia. W ten sposób [por. (3.8)] dowód został zakończony.

Analogicznie postępując wykazać można, że koniecznym warunkiem jednoznaczności jest $C^{ijij}\geqslant 0$. Jeśli bowiem przyjąć $h_{12}=h_{13}=h_{23}=0$, z (4.6) mamy

$$C^{1111}h_{11}+C^{2121}h_{22}+C^{3131}h_{33}\neq 0,$$

przy czym $h_{ii}>0$ (nie sumować!), a stąd $C^{ijij}\geqslant 0$.[6]

## 5. Przykład

Rozważmy nieskończenie długi jednorodny walec kołowy, o promieniu $\mathring{a}$ w konfiguracji $\mathring{C}$ i $a$ w konfiguracji $C$. Oznaczając przez $\lambda$ współczynnik jednorodnej, osiowo-symetrycznej deformacji i wprowadzając biegunowy układ współrzędnych mamy kolejno (por. [7]):

$$\begin{gathered} a=\lambda\mathring{a},\\ g_{ij}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&r^2&0\\0&0&1\end{bmatrix},\quad \mathring{g}_{ij}=\begin{bmatrix}\lambda^{-2}&0&0\\0&r^2/\lambda^2&0\\0&0&1\end{bmatrix},\quad \Gamma^1_{22}=-r,\quad \Gamma^2_{12}=\frac{1}{r},\\ \tau^{11}=r^2\tau^{22}=\lambda^2\Phi_1+(\lambda^4+\lambda^2)\Phi_2+I_3\Phi_3,\qquad \tau^{33}=\lambda^2\Phi_1+2\lambda^2\Phi_2+I_3\Phi_3,\\ \nabla_i\tau^{ij}\equiv 0,\qquad \tau^{11}=-p\quad \text{dla } r=a. \end{gathered} \tag{5.1}$$

[6] Por. notkę[2]; forma (3.3) jest ujemnie określona, jeśli $M<0$ i $N<0$.

Równania równowagi dla małych dodatkowych deformacji przyjmują postać[7]

$$
(5.2)\qquad
\begin{aligned}
&M\left(u_{rr}+\frac{1}{r}u_r-\frac{1}{r}u\right)+N\frac{1}{r^2}u_{\vartheta\vartheta}+(M-N)\frac{1}{r^2}v_{r\vartheta}-M\frac{2}{r^3}v_\vartheta=0,\\
&(M-N)u_{r\vartheta}+Nv_{rr}+M\frac{1}{r^2}v_{\vartheta\vartheta}+(M+N)\frac{1}{r}u_\vartheta-N\frac{1}{r}v_r=0.
\end{aligned}
$$

Rozwiązań tego układu poszukiwać będziemy w postaci

$$
(5.3)\qquad u=f(r)\cos n\vartheta,\qquad v=rg(r)\sin n\vartheta,\qquad n=0,1,2\ldots,
$$

gdzie $f$ i $g$ są odpowiednio regularnymi funkcjami zmiennej $r$. Otrzymujemy stąd

$$
(5.3.1)\qquad
\begin{aligned}
&M\left(f''+\frac{1}{r}f'-\frac{1}{r^2}f\right)-N\frac{n^2}{r^2}f+(M-N)\frac{n}{r}g'-(M+N)\frac{n}{r^2}g=0,\\
&N\left(g''+\frac{1}{r}g'-\frac{1}{r^2}g\right)-M\frac{n^2}{r^2}g-(M-N)\frac{n}{r}f'-(M+N)\frac{n}{r^2}f=0.
\end{aligned}
$$

Rozwiązaniem ogólnym tego układu jest

$$
(5.4)\qquad f_n(r)=\sum_{i=1}^{4}C_{ni}r^{x_i},\qquad g(r)=\sum_{i=1}^{4}C_{ni}\gamma_i r^{x_i},
$$

gdzie $\gamma_i=\dfrac{n[N(x_i-1)-M(x_i+1)]}{Mn^2-N(x_i^2-1)}$, $C_{ni}$ — stałe całkowania, natomiast $x_i$ są pierwiastkami wielomianu charakterystycznego

$$
(5.5)\qquad x^4-2(n^2+1)x^2+(n^2-1)^2=0,
$$

równymi odpowiednio

$$
(5.6)\qquad x_1=n+1,\qquad x_2=n-1,\qquad x_3=-n+1,\qquad x_4=-n-1,
$$

gdy $n>1$. Dla $n=0$ i $n=1$ pierwiastki są wielokrotne i rozwiązanie ma postać

$$
(5.7)\qquad f_0(r)=c_{01}r+c_{02}r^{-1}\quad \text{dla}^{8)}\ n=0,
$$

$$
(5.8)\qquad
\begin{aligned}
&f_1(r)=c_{11}r^2+c_{12}+c_{13}\ln r+c_{14}r^{-2},\\
&g_1(r)=c_{11}\gamma_1 r^2+c_{12}\gamma_2+c_{13}\gamma_3\left(\ln r+\frac{M-N}{M+N}\right)+c_{14}\gamma_4 r^{-2},\qquad \text{dla } n=1.
\end{aligned}
$$

Ponieważ dla $r=0$ przemieszczenia są ograniczone i ponieważ wykluczamy z rozważań ruch sztywny, należy przyjąć

$$
c_{02}=c_{12}=c_{n3}=c_{n4}=0
$$

[7] Przyjęto oznaczenia: $\vartheta^1=r$, $\vartheta^2=\vartheta$, $w_1=u$, $w_2=v$, $\dfrac{\partial u}{\partial r}=u_r\ldots$

[8] Ponieważ $v=0$ dla $n=0$, można przyjąć $g_0(r)=0$

i ostatecznie mamy

(5.9) $$f_0(r) = c_{01} r, \quad g_0(r) \equiv 0 \quad \text{dla } n = 0,$$

(5.10) $$f_1(r) = c_{11} r^2,$$
$$g_1(r) = c_{11} \frac{N-3M}{M-3N} r^2 \quad \text{dla } n = 1,$$

(5.11) $$f_r(r) = c_{n1} r^{n+1} + c_{n2} r^{n-1},$$
$$g_r(r) = c_{n1} \gamma r^{n+1} - c_{n2} r^{n-1} \quad \text{dla } n > 1,$$

(5.12) $$\gamma = \frac{Nn - M(n+2)}{Mn - N(n+2)}.$$

Poszukiwać będziemy teraz warunków, przy których dane zagadnienie brzegowe ma rozwiązanie niejednoznaczne.

Załóżmy, że na brzegu $S$ funkcje $u$ i $v$ znikają:

(5.13) $$u = v = 0, \quad \text{dla} \quad r = a,$$

lub, co jest równoważne

$$f_r(r) = g_r(r) = 0, \quad \text{gdy} \quad r = a.$$

Dla $n = 0$ i $n = 1$ jest tylko trywialne rozwiązanie. Dla $n > 1$ mamy, na mocy (5.11)

(5.14) $$\begin{cases} c_{n1} a^{n+1} + c_{n2} a^{n-1} = 0, \\ c_{n1} \gamma a^{n+1} - c_{n2} a^{n-1} = 0. \end{cases}$$

Warunkiem istnienia nietrywialnych rozwiązań jest tu

(5.15) $$M = -N.$$

Uzyskaliśmy spodziewany wynik. Już bowiem przy ustalaniu warunków koniecznych dla $S$–$E$ (s. 233) zauważyliśmy, że dla $MN < 0$ zawsze można znaleźć taki obszar $B$, dla którego przemieszczeniowy problem brzegowy jest niejednoznaczny.

Weźmy dla przykładu $\mathbf{w} = \mathbf{a}\ (h_{ij} x^i x^j - m)$, $\mathbf{a} = (1, 0, 0)$, $h_{11} = 1$, $h_{22} = h_{33} = -\frac{M}{N}$, $h_{ij} = 0$ dla $i \neq j$. Tak skonstruowana funkcja spełnia równania równowagi (2.30)—(2.31) w całej przestrzeni.

Z drugiej strony, macierz $\mathbf{h}$ jest dodatnio określona wtedy i tylko wtedy, gdy $MN < 0$. Obszarem $B$ jest wówczas elipsoida (elipsa). W naszym przykładzie, kiedy $M = -N$, jest to koło.

### Literatura cytowana w tekście


1. A. E. Green, R. S. Rivlin, R. T. Shield, *General theory of small elastic deformation superposed on finite elastic deformations*, Proc. Roy. Soc., A. **211** (1952).
2. C. B. Morrey, *Second order elliptic systems of differential equations*. Contrib. Theory Partial Diff. Equs., Annals Math. Studies, No 33 (1954).
3. M. T. Вишик, *О сильно-эллиптических системах дифференциальных уравнений*, Мат. Сборник, **29** (71), № 3 (1951).

4. Encyklopedia of Phisics, vol. III/3, Springer–Verlag, 1965.
5. M. Baker, J. L. Ericksen, *Inequalities restricting the form of the stress-deformation relations for isotropic elastic solids*, J. Washington Academy of Sciences, **44** (1954).
6. H. Zorski, *On the equations describing small deformations supperposed on finite deformation*, Proc. Int. Sympos. Secondorder Effects, Haifa 1962.
7. B. Duszczyk, *Stateczność pełnego walca obciążeniowego ciśnieniem zewnętrznym*, Mech. Teoret. i Stosow., 4, **5** (1967).
8. C. Truesdell, *The mechanical foundations of elasticity and field dynamics*, J. Rational Mech. and Analysis, **1**, 125–300 (1952).
9. Guo Zhong-heng, W. Urbanowski, *Stability of non-conservative systems in the theory of elasticity of finite deformations*, Arch. Mech. Stos., 2, **15** (1963).
10. A. E. Green, W. Zerna, *Theoretical Elasticity*, Oxford 1954.

Резюме

## ОГРАНИЧЕНИЯ НАКЛАДЫВАЕМЫЕ УСЛОВИЕМ СИЛЬНОЙ ЭЛЛИПТИЧНОСТИ НА ФУНКЦИЮ УПРУГОЙ ЭНЕРГИИ

Представлены, выраженные через перемещения, уравнения равновесия для малых добавочных деформаций наложеных на конечную деформацию. Применительно к этим уравнениям исследуется условие *S–E* и дается вытекающая из него оценка функции упругой энергии. Даются также некоторые необходимые условия однозначности краевой задачи на перемещения для малых добавочных деформаций наложенных на конечную деформацию.

Summary

## LIMITATIONS IMPLIED ON THE ELASTIC ENERGY FUNCTION BY THE STRONG-ELLIPTICITY CONDITION

Displacement equations of equilibrium governing small deformations superposed on a finite deformation of an elastic solid are discussed. In paricular the *S–E* (Strong Ellipticity) condition is studied and some estimates of the elastic energy are given. Necessary conditions are also derived for uniqueness of the solution to the displacement boundary-value problem.

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

*Praca została złożona w Redakcji dnia 17 grudnia 1969 r.*