MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
4, 8 (1970)

PROBLEMY OPTYMIZACYJNE W SYNTEZIE UKŁADÓW MECHANICZNYCH

ROBERT STANISZEWSKI (WARSZAWA)

1. Założenia ogólne

Do rozważań przyjmuje się układ mechaniczny w sensie ogólnym. Cechy ogólności dotyczą przede wszystkim struktury układu, obciążeń statycznych i dynamicznych oraz wymiarów i przeznaczenia układu. Zakładamy, że rozpatrywany układ mechaniczny jest opisany zbiorem wielkości $W_j = W_1, W_2, \ldots, W_n$. Spośród zbioru W_j wyodrębnia się grupę wielkości stałych — tak zwanych parametrów (podzbiór A) oraz grupę wielkości zmiennych zależnych od charakteru obciążenia, warunków otoczenia i sposobu eksploatacji układu (podzbiór B). Podzbiór parametrów mieści się w zakresie $1 \leqslant j \leqslant k$, a więc obejmuje wielkości $W_j = W_1, W_2, \ldots, W_k$. Na etapie syntezy i projektowania układu wielkości W_j mogą występować jako zmienne, lub też mogą być funkcjami $W_j\,(X_i)$ innych wielkości $X_i = X_1, X_2, \ldots, X_\mu$. W czasie eksploatacji układu wielkości W_j i funkcje $W_j\,(X_i)$ mają wartości stałe i przyjmują nazwę parametrów. Mogą co najwyżej ulegać niewielkim zmianom ze względu na starzenie się układu.

Do drugiej grupy zaliczamy podzbiór wielkości, których numery mieszczą się w zakresie $k+1 \leqslant j < n$. W czasie eksploatacji układu ulegają one zmianie w sposób regulowany według określonego programu, lub w sposób przypadkowy uwarunkowany warunkami użytkowania. Wielkości należące do podzbioru B mogą występować jako zmienne niezależne lub jako funkcje czasu $W_j(\tau) = W_{k+1}(\tau), W_{k+2}(\tau), \ldots, W_n(\tau)$. Wielkości te i ich funkcje odpowiednio ze sobą powiązane występują jako charakterystyki układu $H_1, H_2, \ldots, H_m$. W zależności od postaci matematycznej W_j, mogą występować jako funkcje lub funkcjonały. Można je rozpisać następująco:

Dla podzbioru A:

$$
\begin{aligned}
H_1 &= H_1(W_1, W_2, \ldots, W_k) = H_1(W_{j\leqslant k}) \\
H_2 &= H_2(W_1, W_2, \ldots, W_k) = H_2(W_{j\leqslant k}) \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
H_l &= H_l(W_1, W_2, \ldots, W_k) = H_l(W_{j\leqslant k})
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

lub

$$
\begin{aligned}
H_1 &= H_1[W_1(X_i), W_2(X_i), \ldots, W_k(X_i)] = H_1[W_{j\leqslant k}(X_i)] \\
H_2 &= H_2[W_1(X_i), W_2(X_i), \ldots, W_k(X_i)] = H_2[W_{j\leqslant k}(X_i)] \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
H_l &= H_l[W_1(X_i), W_2(X_i), \ldots, W_k(X_i)] = H_l[W_{j\leqslant k}]
\end{aligned}
\tag{1.2}
$$

Dla podzbioru B:

$$
(1.3)\qquad \begin{aligned}
H_{l+1} &= H_{l+1}(W_{k+1}, W_{k+2}, \dots, W_n) = H_{l+1}(W_{j>k})\\
H_{l+2} &= H_{l+2}(W_{k+1}, W_{k+2}, \dots, W_n) = H_{l+2}(W_{j>k})\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
H_m &= H_m(W_{k+1}, W_{k+2}, \dots, W_n) = H_m(W_{j>k})
\end{aligned}
$$

lub

$$
(1.4)\qquad \begin{aligned}
H_{l+1} &= H_{l+1}[W_{k+1}(\tau), W_{k+2}(\tau), \dots, W_n(\tau)] = H_{l+1}[W_{j>k}(\tau)]\\
H_{l+2} &= H_{l+2}[W_{k+1}(\tau), W_{k+2}(\tau), \dots, W_n(\tau)] = H_{l+2}[W_{j>k}(\tau)]\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
H_m &= H_m[W_{k+1}(\tau), W_{k+2}(\tau), \dots, W_n(\tau)] = H_m[W_{j>k}(\tau)]
\end{aligned},
$$

gdzie wskaźnik i występujący przy wielkościach X_i przyjmuje wartości $1, 2, \dots, \mu$, a więc mieści się w zakresie $1 \leqslant i \leqslant \mu$.

Charakterystyki dla podzbioru A, a więc dla zakresu $1 \leqslant i \leqslant l$, będące na etapie syntezy funkcjami $H_i(W_{j\leqslant k})$ lub funkcjonałami $H_i[W_{j\leqslant k}(X_i)]$ w układzie eksploatowanym występują jako wskaźniki $\varrho_j = \varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_\nu$. Charakterystyki dla podzbioru B w zakresie $l+1 \leqslant i \leqslant m$, występujące jako funkcje $H_{l+1}(W_{j>k})$, lub funkcjonały i $H_{l+i}[W_{j>k}(\tau)]$ są użytkowymi charakterystykami układu mechanicznego.

2. Zagadnienie kryterium optymizacyjnego i wielkości optymizowanych

Proces optymizacyjny poprzedza się przyjęciem odpowiedniego kryterium E, zbadaniem wpływu wielkości W_j i wyborem wielkości optymizowanych U_i spośród W_j. W zależności od postaci matematycznej charakterystyk, kryterium optymizacyjne może być funkcją lub funkcjonałem, a więc:

Dla podzbioru A

$$
(2.1)\qquad E_A = E_A(U_i) = \underset{U_i \in W_j}{\text{ekstr}}\ H_i(W_{j\leqslant k})
$$

lub

$$
(2.2)\qquad E_A = E_A[U_i(X_i)] = \underset{U_i(X_i) \in W_j(X_i)}{\text{ekstr}}\ H_i[W_{j\leqslant k}(X_i)];
$$

Dla podzbioru B

$$
(2.3)\qquad E_B = E_B(U_i) = \underset{U_i \in W_j}{\text{ekstr}} H_i(W_{j>k})
$$

lub

$$
(2.4)\qquad E_B = E_B(U_i) = \underset{U_i(X_i) \in W_j(X_i)}{\text{ekstr}}\ H_i[W_{j>k}(\tau)].
$$

Występujące w związkach kryterialnych i przy wielkościach optymizowanych U ma inne znaczenie niż i występujące przy charakterystykach. Dla wielkości optymizowanych w podzbiorze A mieści się ono w granicach $1 \leqslant i \leqslant k$, natomiast w podzbiorze B w zakresie $k+1 \leqslant i \leqslant n$. Dla charakterystyk i przybiera wartości w zakresie $1 \leqslant i \leqslant m$.

3. Warunki ograniczające

Wartości wielkości optymizowanych wyznaczone matematycznie nie zawsze mogą być przyjęte ze względu na ograniczenia geometryczne, ciężarowe, ekonomiczne, fizyczne lub inne. W związku z tym, w zagadnieniach optymizacyjnych muszą być uwzględnione warunki ograniczające. Realizuje się przez nałożenie ograniczeń, zarówno na wielkości optymizowane jak i na kryteria optymizacyjne. Zakładamy przedziały zawarte pomiędzy wartościami górnymi g i dolnymi d.

Zgodnie z tym mamy:

$$(W_j)_d \leqslant W_j \leqslant (W_j)_g, \tag{3.1}$$

$$[W_j(X_i)]_d \leqslant W_j(X_i) \leqslant [W_j(X_i)]_g, \tag{3.2}$$

$$[W_j(\tau)]_d \leqslant W_j(\tau) \leqslant [W_j(\tau)]_g, \tag{3.3}$$

$$[E(U_i)]_d \leqslant E(U_i) \leqslant [E(U_i)]_g, \tag{3.4}$$

$$\{E[U_i(X_i)]\}_d \leqslant E[U_i(X_i)] \leqslant \{E[U_i(X_i)]\}_g, \tag{3.5}$$

$$\{E[U_i(\tau)]\}_d \leqslant E[U_i(X_i)] \leqslant \{E[U_i(\tau)]\}_g. \tag{3.6}$$

W zależności od konkretnych zadań optymizacyjnych, warunki ograniczające mogą być nałożone również na pochodne funkcji $[W_j(X_i)]$, $E(U_i)$ lub funkcjonały $E[U_i(X_i)]$ i $E_i[U(\tau)]$.

4. Budowa charakterystyk uogólnionych

Zamiast klasycznych charakterystyk układu mechanicznego $H_1, H_2, \ldots, H_m$, wprowadza się charakterystyki uogólnione. Są nimi: efekt techniczny F, funkcja wysiłku K oraz efekt ogólny λ będący ilorazem F oraz K. Efekt techniczny układu mechanicznego jest definiowany jako charakterystyka uogólniona określająca właściwości techniczne układu z punktu widzenia realizacji celu. W związku z tym jest ona funkcją zależną bezpośrednio od charakterystyk $H_1, H_2, \ldots, H_m$, a pośrednio od wielkości $W_1, W_2, \ldots, W_n$. Jeśli zbiór wielkości częściowo lub całkowicie występuje w postaci funkcji, wówczas efekt techniczny jest funkcjonałem. Możemy więc zapisać:

$$F = F(H_1, H_2, \ldots, H_m) = F(W_1, W_2, \ldots, W_n) = F(W_j) \tag{4.1}$$

lub

$$\begin{gathered} F = F[H_1(W_{j \leqslant k}), H_2(W_{j \leqslant k}), \ldots, H_m(W_{j \leqslant k}), \\ H_1(W_{j>k}), H_2(W_{j>k}), \ldots, H_m(W_{j>k})] = F[W_1(X_i), W_2(X_i), \ldots, W_{j=k}(X_i), \\ W_{k+1}(\tau), W_{k+2}(\tau), \ldots, W_n(\tau)] = F[W_j(X_i, \tau)]. \end{gathered} \tag{4.2}$$

Niech wielkości W_j występujące jako elementy zbioru A mają właściwości techniczne opisane przez $P(p_j)$ i właściwości ekonomiczne określone przez $K_w(W_j, a_i)$. Natomiast wielkości W_j występujące jako elementy zbioru B niech mają właściwości techniczne $Z(z_j)$ i ekonomiczne $K_e(W_j, a_i)$. Wtedy oba zbiory możemy rozpisać w postaci:

(4.3) $$A = \left\{ W_j(j = 1,2, \ldots, k): \begin{matrix} P(p_j) \\ K_w(W_j, a_i) \end{matrix} \right\},$$

(4.4) $$B = \left\{ W_j(j = k+1, k+2, \ldots, n): \begin{matrix} Z(z_j) \\ K_e(W_j, a_i) \end{matrix} \right\}.$$

Związki pomiędzy zbiorami A i B zapiszemy następująco:

(4.5) $$A \cup B = V = \{W_j(j = 1, 2, \ldots, n)\} = \\ = \{W_j(j = 1, 2, \ldots, k\} \cup \{W_j(j = k+1, k+2, \ldots, n\}.$$

(4.6) $$[W_j(j = 1, 2, \ldots, n) \in (A \cup B)] \equiv \\ \equiv [W_j(j = 1, 2, \ldots, k) \in A] \vee [W_j(j = k+1, k+2, \ldots, n) \in B].$$

(4.7) $$A \cap B = \{W_j(j = 1, 2, \ldots, k\} \cap \{W_j(j = k+1, k+2, \ldots, n\} = 0.$$

Należy przy tym zauważyć, że pewne typy układów mechanicznych posiadają kilka zakresowości pracy. Niech funkcja $R(r_j)$ przyjmująca wartości dyskretne:

$$R(r_j) = \begin{cases} 1 \text{ dla jednozakresowego układu} \\ C \text{ dla wielozakresowego układu} \end{cases}$$

opisuje stan zakresowości układu. Efekt techniczny układu $F(W_j)$ może być określony jako iloczyn funkcji opisujących właściwości techniczne w zbiorach A i B oraz funkcji zakresowości $R(r_j)$.

Ustalając, że:

1) $P(p_j)$ — określa właściwość elementów zbioru A, przy czym p_j są wybierane spośród W_j w zakresie $1 \leqslant j \leqslant k$,

2) $R(r_j)$ i $Z(z_j)$ — określają właściwości elementów zbioru B, przy czym r_j są wybierane spośród W_j w zakresie $k+1 \leqslant j \leqslant g$, natomiast z_j są wybierane spośród W_j w zakresie $g+1 \leqslant j \leqslant n$.

Związki na efekt techniczny (4.1), (4.2) będą miały postać:

(4.8) $$F(W_j) = P(p_1, p_2, \ldots, p_k) R(r_{k+1}, r_{k+2}, \ldots, r_g) Z(z_{g+1}, z_{h+2}, \ldots, z_n) = \\ = P(p_j) R(r_j) Z(z_j)$$

lub

(4.9) $$F[W_j(X_i, \tau)] = P[p_1(X_i), p_2(X_i), \ldots, p_k(X_i)] R[r_{k+1}(X_i), r_{k+2}(X_i), \ldots, r_g(X_i)] \times \\ \times Z[z_{g+1}(\tau), z_{g+2}(\tau). \ldots, z_n(\tau)] = P[p_j(X_i)] R[r_j(X_i)] Z[z_j(X_i)]$$

W ogólnym przypadku wyrażenie (4.9) może mieć jeszcze inne postacie, mianowicie:

$$F[W_j(X_i, \tau)] = P(p_j)R(r_j)Z(z_j), \tag{4.10}$$

$$F[W_j(X_i, \tau)] = P(p_i)R[r_j(X_i)]Z[z_j(\tau)], \tag{4.11}$$

$$F[W_j(X_i, \tau)] = P[p_j(X_i)]R[r_j(X_i)]Z(z_j), \tag{4.12}$$

$$F[W_j(X_i, \tau)] = P[p_j(X_i)]R(r_j)Z(z_j), \tag{4.13}$$

$$F[W_j(X_i, \tau)] = P(p_j)R[r_j(X_i)]Z(z_j), \tag{4.14}$$

$$F[W_j(X_i, \tau)] = P[p_j(X_i)]R(r_j)Z[z_j(\tau)]. \tag{4.15}$$

Funkcja wskaźników układu jest zależna od $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_v$. Można ją przedstawić jako iloczyn tych wskaźników podniesionych do odpowiednich wykładników wag $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_v$; z tym, że wprowadzenie ω_i ma regulować różny stopień wpływu ϱ_i na efekt techniczny. W związku z tym, mamy:

$$P(p_j) = P(p_1, p_2, \ldots, p_k) = (\varrho_1)^{\omega_1}(\varrho_2)^{\omega_2}, \ldots, (\varrho_v)^{\omega_v} = \prod_{}^{i=v} (\varrho_i)^{\omega_i} \tag{4.16}$$

lub

$$P[p_j(X_i)] = \prod_{}^{l=v} [\varrho_i(X_i)]^{\omega_i}. \tag{4.17}$$

Funkcja zakresowości $R(r_j)$ przyjmuje określone wartości dyskretne zależne od rodzaju i przeznaczenia układu.

Funkcja stanu procesu $Z(z_j)$ opisuje dynamikę układu i jest równoważna całce z charakterystyki głównej $\overline{H}(\tau)$ w okresie czasu pracy układu $\tau_i - \tau_{i-1}$. Dla jednego włączenia układu, funkcja $Z(z_j)$ ma postać:

$$Z(z_{g+1}, z_{g+2}, \ldots, z_n) = \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \overline{H}(\tau)\, d\tau \tag{4.18}$$

lub

$$Z[z_j(\tau)] = \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \overline{H}[z_j(\tau)]\, d\tau. \tag{4.19}$$

Dla d włączeń:

$$Z_d(z_j) = \sum_{l=1}^{l=d} \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \overline{H}_i(\tau)\, d\tau \tag{4.20}$$

lub

$$Z_d[z_j(\tau)] = \sum_{l=1}^{l=d} \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \overline{H}_i[z_j(\tau)]\, d\tau. \tag{4.21}$$

Po uwzględnieniu związków na $P(p_j)$, $P[p_j(X_i)]$, $Z(z_j)$ i $Z[z_j(\tau)]$ we wzorach (4.8) i (4.9), otrzymamy wyrażenia na efekt techniczny, kolejno dla jednego włączenia oraz dla d włączeń:

$$F_1(W_j) = P(p_j)R(r_j)Z(z_j) = \prod_{}^{i-v} (\varrho_i)^{\omega_i} R(r_j) \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \overline{H}(\tau)\, d\tau, \tag{4.22}$$

$$F_d(W_j) = R(r_j) \prod_{i=1}^{i=\nu} (\varrho_i)^{\omega_i} \sum_{i=1}^{i=d} \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \bar{H}_i(\tau)d\tau \tag{4.23}$$

lub

$$F_1[W_j(X_i)] = \prod^{i=\nu} [\varrho_i(X_i)]^{\omega_i} R[r_j(X_i)] \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \bar{H}(\tau)d\tau, \tag{4.24}$$

$$F_d[W_j(X_i)] = \prod^{i=\nu} [\varrho_i(X_i)]^{\omega_i} R[r_j(X_i)] \sum_{i=1}^{i=d} \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \bar{H}[Z_j(\tau)]d\tau. \tag{4.25}$$

Właściwości techniczno-ekonomiczne wielkości W_j jako elementów zbiorów A i B, są opisane przez funkcje wysiłku budowy $K_w(W_j, a_i)$ i eksploatacji układu $K_e(W_j, a_i)$. Cały wysiłek związany z wykonaniem i użytkowaniem układu mechanicznego można wyrazić przy pomocy ogólnej funkcji, a więc:

$$K(W_j, a_i) = \tag{4.26}$$

$$= K_w(W_j, a_i)+K_e(W_j, a_i) = K_s(W_j, a_i)+K_d(W_j, a_i)+K_p(W_j, a_i)+ \sum_{i=1}^{i=d} \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \bar{K}_{ei}(\tau)d\tau,$$

przy czym:

$$K_w(W_j, a_i) = K_s(W_j, a_i)+K_d(W_j, a_i)+K_p(W_j, a_i),$$

$K_s(W_j, a_i)$ — funkcja wysiłku związana z syntezą i projektowaniem układu mechanicznego;

$K_d(W_j, a_i)$ — funkcja wysiłku związana z wdrażaniem projektu układu do produkcji;

$K_p(W_j, a_i)$ — funkcja wysiłku związana z produkcją układu mechanicznego;

$\bar{K}_e(W_j, a_i)$ — jednostkowa funkcja wysiłku eksploatacyjnego układu mechanicznego.

Iloraz efektu technicznego i funkcji wysiłku będziemy nazywać efektem ogólnym układu mechanicznego λ. W zależności od postaci matematycznej efektu technicznego, efekt ogólny przyjmuje formę funkcji $\lambda(W_j, a_i)$ lub funkcjonału $\lambda[W_j(X_i), a_i]$. Wykorzystując związki na F i K, otrzymamy podstawowe wzory ogólne na efekt ogólny. Kolejno mamy:

$$\lambda_1(W_j, a_i) = \lambda(W_1, W_2, \ldots, W_n, a_1, a_2, \ldots, a_m) =$$

$$= \frac{F(W_1, W_2, \ldots, W_n)}{K_s(W_j, a_i)+K_d(W_j, a_i)+K_p(W_j, a_i)+K_e(W_j, a_i)} =$$

$$= \frac{\prod^{i=\nu} (\varrho_i)^{\omega_i} R(r_i) \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \bar{H}(\tau)d\tau}{K_w(W_j, a_i)+K_e(W_j, a_i)} = \tag{4.27}$$

$$= \frac{\prod^{i=\nu} (\varrho_i)^{\omega_i} R(r_j) \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \bar{H}(\tau)d\tau}{K_s(W_j, a_i)+K_d(W_j, a_i)+K_p(W_j, a_i)+ \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \bar{K}_e(\tau)d\tau} = \frac{F(W_j)}{K(W_j, a_i)},$$

$$\lambda_d(W_j, a_i) = \frac{\prod\limits^{i=\nu} (\varrho_i)^{\omega_i} R(r_j) \sum\limits_{i=1}^{i=d} \int\limits_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \bar{H}_i(\tau) d\tau}{K_w(W_j, a_i) + K_{ed}(W_j, a_i)} =$$

(4.28)

$$= \frac{\prod\limits^{i=\nu} (\varrho_i)^{\omega_i} R(r_j) \sum\limits_{i=1}^{i=d} \int\limits_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \bar{H}(\tau) d\tau}{K_s(W_j, a_i) + K_d(W_j, a_i) + K_p(W_j, a_i) + \sum\limits_{i=1}^{i=d} \int\limits_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \bar{K}_{ei}(\tau) d\tau},$$

$$\lambda_1[W_j(X_i), a_i] = \frac{F[W_1(X_i), W_2(X_i), \ldots, W_n(X_i)]}{K_w(W_j, a_i) + K_e(W_j, a_i)} =$$

(4.29)

$$= \frac{\prod\limits^{i=\nu} [\varrho_i(X_i)]^{\omega_i} R[r_j(X_i)] \int\limits_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \bar{H}[z_j(\tau) d\tau}{K_s(W_j, a_i) + K_d(W_j, a_i) + K_p(W_j, a_i) + K_e(W_j, a_i)},$$

$$\lambda_d[W_j(X_i), a_i] = \frac{F[W_j(X_i)]}{K_w(W_j, a_i) + K_{ed}(W_j, a_i)} =$$

(4.30)

$$= \frac{\prod\limits^{i=\nu} [\varrho_i(X_i)^{\omega_i} R[r_j(X_i)] \sum\limits_{i=1}^{i=d} \int\limits_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \bar{H}_i[z_j(\tau)] d\tau}{K_s(W_j, a_i) + K_d(W_j, a_i) + K_p(W_j, a_i) + \sum\limits_{i=1}^{i=d} \int\limits_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \bar{K}_{ei}(\tau) d\tau}.$$

We wzorach (4.28)–(4.30) podano jedynie dwa podstawowe przypadki. Pierwszy zawiera efekt techniczny w formie funkcji, a drugi w formie funkcjonału. Odwrotność efektu ogólnego stanowi tak zwany efekt wysiłu S.

5. Modele optymizacyjne

Zgodnie z założeniami, przyjmuje się charakterystyki uogólnione jako kryteria optymizacyjne. W myśl postulatów wynikających z problemu celu, efekt ogólny winien przyjmować największą wartość, natomiast efekt wysiłku najmniejszą wartość. W związku z tym, podstawowy model optymizacyjny możemy rozpisać kolejno dla funkcji i funkcjonału, uwzględniając związki dla λ i S:

$$E_{\lambda 1}(U_i) = E_{\lambda 1}^{mx} \lambda(W_j, a_i) = \max_{U_i \in W_j} \lambda_1(W_j, a_i) = \max_{U_i \in W_j} \frac{F(W_j)}{K_w(W_j, a_i) + K_e(W_j, a_i)} =$$

(5.1)

$$= \max_{U_i \in W_j} \frac{\prod\limits^{i=\nu} (\varrho_i)^{\omega_i} R(r_j) \int\limits_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \bar{H}(\tau) d\tau}{K_s(W_j, a_i) + K_d(W_j, a_i) + K_p(W_j, a_i) + K_e(W_j, a_i)}.$$

(5.2) $$E_{\lambda d}(U_i) = E_{\lambda d}^{mx}\,\lambda(W_j, a_i) = \max_{U_i \in W_j} \lambda_d(W_j, a_i) = \max_{U_i \in W_j} \frac{F_d(W_j)}{K_w(W_j, a_i) + K_{ei}(W_j, a_i)} =$$

$$= \max_{U_i \in W_j} \frac{\prod\limits_{i=1}^{i=\nu} (\varrho_i)^{\omega_i} R(r_j) \sum\limits_{i=1}^{i=d} \int\limits_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \bar{H}_i(\tau)\,d\tau}{K_s(W_j, a_i) + K_d(W_j, a_i) + K_p(W_j, a_i) + \sum\limits_{i=1}^{i=d} \int\limits_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \bar{K}_{ei}(\tau)\,d\tau},$$

(5.3) $$E_{S1}(U_i) = E_S(U_i) = E_{S1}^{mn} S(W_j, a_i) = \min_{U_i \in W_j} S_1(W_j, a_i),$$

(5.4) $$E_{Sd}(U_i) = E_S(U_i) = E_{Sd}^{mn}(W_j, a_i) = \min_{U_i \in W_j} S_d(W_j, a_i),$$

(5.5) $$E_{\lambda 1}[U_i(X_i)] = E_{\lambda 1}^{mx}\,\lambda[W_j(X_i), a_i] = \max_{U_i \in W_j} \lambda_1[W_j(X_i), a_i] =$$

$$= \max_{U_i \in W_j} \frac{F_1[W_j(X_i)]}{K_w(W_j, a_i) + K_e(W_j, a_i)} = \max_{U_i \in W_j} \frac{\prod\limits^{i=\nu} [\varrho_i(X_i)]^{\omega_i} R[r_j(X_i)] \int\limits_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \bar{H}[Z(z_j)]\,d\tau}{K_w(W_j, a_i) + K_e(W_j, a_i),},$$

(5.6) $$E_{\lambda d}[U_i(X_i)] = E_{\lambda d}^{mx}\,\lambda[W_j(X_i), a_i] = \max_{U_i \in W_j} \lambda_d[W_j(X_i), a_i] =$$

$$= \max_{U_i \in W_j} \frac{F_d[W_j(X_i)]}{K_w(W_j, a_i) + K_e(W_j, a_i)} = \max_{U_i \in W_j} \frac{\prod\limits^{i=\nu} [\varrho_i(X_i)]^{\omega_i} R[r_j(X_i)] \sum\limits_{i=1}^{i=d} \int\limits_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \bar{H}[z_j(\tau)]\,d\tau}{K_w(W_j, a_i) + \sum\limits_{i=1}^{i=d} \int\limits_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \bar{K}_{ei}(\tau)\,d\tau}.$$

(5.7) $$E_{S1}[U_i(X_i)] = E_{S1}[U_i(X_i)] = E_{S1}^{mn} S[W_j(X_i), a_i] = \min_{U_i \in W_j} S_1[W_j(X_i), a_i],$$

(5.8) $$E_{Sd}[U_i(X_i)] = E_{Sd}[U_i(X_i)] = E_{Sd}^{mn} S[W_j(X_i), a_i] = \min_{U_i \in W_j} S_d[W_j(X_i), a_i],$$

przy czym:

(5.9) $$E_\lambda^{mx}\,\lambda(W_j, a_i) = \max_{U_i \in W_j} \frac{F(W_j)}{K(W_j, a_i)},$$

(5.10) $$E_S^{mn} S(W_j, a_i) = \min_{U_i \in W_j} \frac{K(W_j, a_i)}{F(W_j)},$$

(5.11) $$E_\lambda^{mx}\,\lambda[W_j(X_i), a_i] = \max_{U_i \in W_j} \frac{F[W_j(X_i)]}{K(W_j, a_i)},$$

(5.12) $$E_S^{mn} S[W_j(X_i), a_i] = \min_{U_i \in W_j} \frac{K(W_j, a_i)}{F[W_j(X_i)]}.$$

Spośród wielu przypadków zadań optymizacyjnych można wyróżnić trzy charakterystyczne. Pierwszy z nich obejmuje maksymalizacje efektu ogólnego lub minimalizacje efektu wysiłku ze względu na maksymalizacje efektu technicznego. Drugi przypadek optymizacyjny zawiera maksymalizacje λ lub minimalizacje S ze względu na minimalizacje funkcji wysiłku. Wreszcie trzeci przypadek obejmuje maksymalizowanie efektu ogólnego lub minimalizowanie efektu wysiłku drogą maksymalizowania F i minimalizowania K. Kolejno podano opis matematyczny trzech charakterystycznych przypadków, dla których podstawowe związki mają postać:

P r z y p a d e k 1.

$$E_{\lambda d}^{mx}\lambda(W_j, a_i) = \max_{U_i \in W_j} \lambda_d(W_j, a_i), \tag{5.12}$$

$$E_{Sd}^{mn}S(W_j, a_i) = \min_{U_i \in W_j} S(W_j, a_i), \tag{5.13}$$

przy

$$F(W_j) = P(p_j)R(r_j)Z(z_j) = \prod_{i=1}^{i=\nu} (\varrho_i)^{\omega_i} R(r_j) \sum_{i=1}^{i=d} \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \bar{H}_i(\tau)d\tau = \max F, \tag{5.14}$$

$$K(W_j, a_i) = \operatorname{const} K \tag{5.15}$$

lub

$$E_{\lambda d}^{mx}\lambda[W_j(X_i), a_i] = \max_{U_i \in W_j} \lambda_d[W_j(X_i), a_i], \tag{5.16}$$

$$E_{Sd}^{mn}S[W_j(X_i), a_i] = \min_{U_i \in W_j} S_d[W_j(X_i), a_i], \tag{5.17}$$

przy

$$\begin{aligned} F[W_j(X_i)] &= P[p_j(X_i)]R[r_j(X_i)]Z[z_j(X_i)] = \\ &= \prod_{i=1}^{i=\nu} [\varrho_i(X_i)]^{\omega_i} R(r_j) \sum_{i=1}^{i=d} \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \bar{H}_i(\tau)d\tau = \max F, \end{aligned} \tag{5.18}$$

$$K(W_j, a_i) = K_w(W_j, a_i) + \sum_{i=1}^{i=d} \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \bar{K}_{ei}(\tau)d\tau = \operatorname{const} K. \tag{5.19}$$

P r z y p a d e k 2.

$$E_{\lambda d}^{mx}\lambda(W_j, a_i) = \max_{U_i \in W_j} \lambda_d(W_j, a_i), \tag{5.20}$$

$$E_{Sd}^{mn}S(W_j, a_i) = \min_{U_i \in W_j} S(W_j, a_i), \tag{5.21}$$

przy

$$F(W_j) = P(p_j)R(r_j)Z(z_j) = \prod_{i=1}^{i=\nu} (\varrho_i)^{\omega_i} R(r_j) \sum_{i=1}^{i=d} \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \bar{H}_i(\tau)d\tau = \operatorname{const} F, \tag{5.22}$$

$$K(W_j, a_i) = K_w(W_j, a_i) + \sum_{i=1}^{i=d} \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \bar{K}_{ei}(\tau)d\tau = \min K \tag{5.23}$$

lub

$$E_{\lambda d}^{mx}\lambda[W_j(X_i), a_i] = \max_{U_i \in W_j} \lambda_d[W_j(X_i), a_i], \tag{5.24}$$

$$E_{Sd}^{mn}S[W_j(X_i), a_i] = \min_{U_i \in W_j} S_d[W_j(X_i), a_i], \tag{5.25}$$

przy

$$F[W_j(X_i)] = P[p_j(X_i)]R[r_j(X_i)]Z[z_j(\tau_i)] = \tag{5.26}$$

$$= \prod_{i=1}^{i=\nu} [\varrho_i(X_i)]^{\omega_i} R[r_j(X_i)] \sum_{i=1}^{i=d} \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \bar{H}_i(\tau)d\tau = \mathrm{const}F,$$

$$K(W_j, a_i) = K_w(W_j, a_i) + \sum_{i=1}^{i=d} \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \bar{K}_{ei}(\tau)d\tau = \min K. \tag{5.27}$$

P r z y p a d e k 3.

$$E_{\lambda d}^{mx} \lambda(W_j, a_i) = \max_{U_i \in W_j} \lambda_d(W_j, a_i), \tag{5.28}$$

$$E_{Sd}^{mn} S(W_j, a_i) = \min_{U_i \in W_j} S(W_j, a_i), \tag{5.29}$$

przy

$$F(W_j) = P(p_j)R(r_j)Z(z_j) = \prod_{i=1}^{i=\nu} (\varrho_i)^{\omega_i} R(r_j) \sum_{i=1}^{i=d} \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \bar{H}_i(\tau)d\tau = \max F, \tag{5.30}$$

$$K(W_j, a_i) = K_w(W_j, a_i) + \sum_{i=1}^{i=d} \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \bar{K}_{ei}(\tau)d\tau = \min K \tag{5.31}$$

lub

$$E_{\lambda d}^{mx} \lambda[W_j(X_i), a_i] = \max_{U_i \in W_j} \lambda_d[W_j(X_i)], \tag{5.32}$$

$$E_{Sd}^{mn} S[W_j(X_i), a_i] = \min_{U_i \in W_j} S_d[W_j(X_i), a_i], \tag{5.33}$$

przy

$$F[W_j(X_i)] = P[p_j(X_i)]R[r_j(X_i)]Z[z_j(X_i)] = \tag{5.34}$$

$$= \prod_{i=1}^{i=\nu} [\varrho_i(X_i)]^{\omega_i} R[r_j(X_i)] \sum_{i=1}^{i=d} \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \bar{H}_i(\tau)d\tau = \max F,$$

$$K(W_j, a_i) = K_w(W_j, a_i) + \sum_{i=1}^{i=d} \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \bar{K}_{ei}(\tau)d\tau = \mathrm{const}K. \tag{5.35}$$

6. Przedział celowości zmian wielkości W_j

W pracy [2] rozważono zagadnienie przedziału zmian wielkości W_j układu mechanicznego z punktu widzenia ich celowości i opłacalności. Ustalono zakres, w którym zmiany W_j prowadzą do zwiększenia efektu ogólnego; ograniczeniem przedziału jest związek wynikający z równania ekstremalizacyjnego funkcji $\lambda(W_j, a_i)$ względem W_j. Rozpatrzono cztery charakterystyczne przypadki zmian parametrów silnika spalinowego. Podstawowe założenia dla nich, przy n wytwarzanych silnikach, są następujące:

1) Założone są stałe wydatki na budowę i eksploatację n silników. Zadanie polega na wprowadzeniu pewnych zmian parametrów prowadzących do wzrostu efektu technicznego od $F_1(W_j)$ do $F_2(W_j)$, drogą zwiększenia złożoności konstrukcji

$$K_1(W_j, a_i) = K_2(W_j, a_i) = \text{const},$$
$$F_1(W_j) < F_2(W_j).$$

2) Założone są stałe wydatki na budowę i eksploatacje n silników. Zadanie polega na wprowadzeniu pewnych zmian parametrów prowadzących do wzrostu efektu technicznego od $F_a(W_j)$ do $F_b(W_j)$, drogą uproszczenia konstrukcji

$$K_a(W_j, a_i) = K_b(W_j, a_i) = \text{const},$$
$$F_a(W_j) < F_b(W_j).$$

3) Założony jest stały efekt techniczny wytwarzanych silników. Zadanie sprowadza się do obniżenia ogólnych kosztów wytwarzania i eksploatacji od $K_1(W_j, a_i)$ do $K_2(W_j, a_i)$, drogą zmian konstrukcji

$$F_1(W_j) = F_2(W_j),$$
$$K_1(W_j, a_i) > K_2(W_j, a_i).$$

4) Założony jest stały efekt techniczny wytwarzanych silników. Zadanie sprowadza się do obniżenia ogólnych kosztów wytwarzania i eksploatacji od $K_a(W_j, a_i)$ do $K_b(W_j, a_i)$, drogą uproszczenia konstrukcji

$$F_a(W_j) = F_b(W_j),$$
$$K_a(W_j, a_i) > K_b(W_j, a_i).$$

Wyniki rozważań wszystkich przypadków dla przedziału $(W_j)_{\mathrm{I}} \leqslant W_j \leqslant (W_j)_{\mathrm{II}}$ prowadzą do nierówności

$$\frac{K(W_j, a_i)}{F(W_j)}\, dF(W_j) > dK(W_j, a_i). \tag{6.1}$$

Badania na innych układach prowadzą również do nierówności (6.1). Dalsza zmiana wielkości charakterystycznych, a więc dla przedziału $W_j > (W_j)_{\mathrm{II}}$, dla wszystkich omówionych przypadków daje już nierówność przeciwną. W związku z tym, mamy dla przedziału $(W)_{\mathrm{I}} \leqslant W_j \leqslant (W_j)_{\mathrm{II}}$

$$SdF[(W_j)_{\mathrm{I}} \leqslant W_j \leqslant (W_j)_{\mathrm{II}}] > dK[(W_j)_{\mathrm{I}} \leqslant W_j \leqslant (W_j)_{\mathrm{II}}, a_i] \tag{6.2}$$

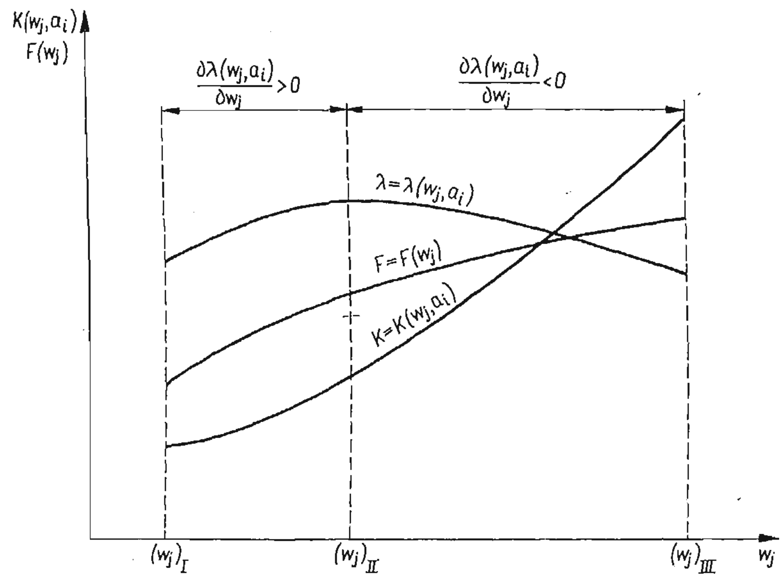
oraz dla przedziału $(W_j)_{\mathrm{II}} \leqslant W_j \leqslant (W_j)_{\mathrm{III}}$

$$SdF[(W_j)_{\mathrm{II}} < W_j \leqslant (W_j)_{\mathrm{III}}] < dK[(W_j)_{\mathrm{II}} < W_j \leqslant (W_j)_{\mathrm{III}}, a_i], \tag{6.3}$$

przy czym

$$S = S(W_j, a_i) = \frac{K(W_j, a_i)}{F(W_j)}.$$

W przedziale $(W_j)_{\mathrm{I}} \leqslant W_j \leqslant (W_j)_{\mathrm{II}}$, każdej zmianie wielkości W_j odpowiada większy przyrost efektu technicznego w porównaniu do przyrostu funkcji wysiłku, reprezentującej dodatkowe nakłady finansowe wynikłe z modyfikacji konstrukcji układu mechanicznego. W tym przypadku, zmiany są celowe i opłacalne. W przedziale $(W_j)_{\mathrm{II}} \leqslant W_j \leqslant (W_j)_{\mathrm{III}}$, każdej zmianie w sensie zwiększenia wielkości W_j (rys. 1) odpowiada mniejszy przyrost



Rys. 1

efektu technicznego w porównaniu do przyrostu funkcji wysiłku. A więc zmiany są nieopłacalne, chociaż mogą być celowe. Z tych rozważań wynika wniosek, że każde zamierzenie optymizacyjne związane ze zmianami konstrukcyjnymi powinno być poprzedzone zbadaniem wpływu zmian W_j na efekt ogólny układu mechanicznego.

Granica $W_j = (W_j)_{\mathrm{II}}$ stanowi ograniczenie od góry dla związku (6.2), ważnego dla pierwszego przedziału oraz jest ograniczeniem od dołu dla związku (6.3), ważnego dla drugiego przedziału $(W_j)_{\mathrm{II}} < W_j \leqslant (W_j)_{\mathrm{III}}$. Granica dla $W_j = (W_j)_{\mathrm{II}}$ jest kresem górnym przewagi wzrostu efektu technicznego nad przyrostem kosztów ogólnych. Można ją wyznaczyć z rozwiązania równania ekstremalizacyjnego efektu ogólnego jako ilorazu efektu technicznego i funkcji wysiłku.

Dla $F = F(W_j)$, $K = K(W_j, a_i)$ i $\lambda = \lambda(W_j, a_i)$ mamy

$$(6.4)\qquad \frac{\partial\lambda(W_j = W_1 = U_1)}{\partial(W_j = U_i)} = \frac{1}{K(W_j, a_i)}\,\frac{\partial F(W_j = W_1 = U_1)}{\partial(W_j = U_i)} - \frac{F(W_1)}{[K(W_1, a_i)]^2}\times$$

$$\times\frac{\partial K(W_1, a_i)}{\partial(W_j = U_i)} = \frac{1}{K(W_1, a_i)}\,\frac{\partial[P(p_j = U_1)R(r_j = U_1)Z(z_j = U_1)}{\partial(W_j = U_1)} -$$

$$-\frac{P(p_j = U_1)R(r_j = U_1)Z(z_j = U_1)}{[K(W_j, a_i)]^2}\,\frac{\partial K(W_j, a_i)}{\partial(W_j = U_1)} = \frac{1}{K(W_j, a_i)}\times$$

(6.4) [c.d.]

$$\times \frac{\partial}{\partial(W_j=U_1)}\prod_{l=1}^{l=\nu}(\varrho_i)^{\omega_l}R(r_j)\sum_{i=1}^{i=d}\int\limits_{\tau_{i-1}}^{\tau_i}\bar{H}_i(\tau)d\tau-\frac{1}{[K(W_j,a_i)]^2}\times$$

$$\times\prod^{l=\nu}(\varrho_i)^{\omega_l}R(r_j)\sum_{i=1}^{i=d}\int\limits_{\tau_{i-1}}^{\tau_i}\bar{H}_i(\tau)d\tau\frac{\partial K(W_j,a_i)}{\partial(W_j=U_1)}=\frac{1}{K(U_1)}\frac{\partial F(U_1)}{\partial U_1}-$$

$$-\frac{F(U_1)}{[K(U_1)]^2}\frac{\partial K(U_1)}{\partial U_1}.$$

Gdy efekt ogólny lub efekt wysiłku występują w formie funkcjonału, wówczas dla wyznaczenia wielkości optymizowanych stosuje się metody wariacyjne. Zadanie optymizacyjne polega na określeniu takich funkcji $U_1(X_i)$, $U_2(X_i)$, ..., $U_m(X_i)$ — wybranych spośród $W_1(X_i)$, $W_2(X_i)$, ..., $W_n(X_i)$, dla których $\lambda[W_j(X_i)]$ lub $S[W_j(X_i)]$ przyjmują wartości ekstremalne. Dla jednej funkcji optymizowanej mamy

$$E[U_i(X_i)]=\max_{U_i(X_i)\in W_j(X_i)}\lambda[W_j(X_i),a_i]= \tag{6.5}$$

$$=\max_{U_i\in W_j}\frac{F[W_j(X_i)]}{K_w(W_j,a_i)+K_e(W_j,a_i)}=\max_{U_i\in W_j}\frac{\prod^{l=\nu}[\varrho_i(X_i)]^{\omega_l}R[r_j(X_i)]\sum_{i=1}^{i=\nu}\int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i}\bar{H}_i(\tau)d\tau}{K_w(W_j,a_i)+K_e(W_j,a_i)}=$$

$$=G_0+\int\limits_{X_1}^{X_2}M(W,W',W'',\ldots,W^{(n)},X_i)dX,$$

$$E[U_i(X_i)]=\min_{U_i\in W_j}S[W_j(X_i),a_i]= \tag{6.6}$$

$$=\min_{U_i\in W_j}\frac{K_w(W_j,a_i)+K_e(W_j,a_i)}{F[W_j(X_i)]}=\bar{G}_0+\int\limits_{X_1}^{X_2}\bar{M}(W,W',W'',\ldots,W^{(n)},X_i)dX.$$

W wyrażeniach (6.5) i (6.6) przez G_0 i $\bar{G}_0$ oznaczono wielkości funkcjonałów dla warunków początkowych. Funkcje $M(W, W', W'', \ldots, W^{(n)}, X_i)$ i $\bar{M}(W, W', W'', \ldots, W^{(n)}, X_i)$ spełniają równanie Eulera i w tej postaci są podstawą do określenia funkcji optymizowanych.

7. Matematyczne własności funkcji [funkcjonałów] P, R, Z, F, K, λ i S

Funkcja wskaźników $P(p_j)$. Zmiennymi niezależnymi p_j na etapie syntezy i konstruowania są wskaźniki konstrukcji $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_\nu$ związane ograniczeniami fizycznymi, geometrycznymi i technologicznymi. W określonych granicach, każdemu zbiorowi ϱ_i jest podporządkowana i ustalana wartość $P(p_j)$. Wskaźniki przyjmują tylko dodatnie wartości, natomiast wykładniki mieszczą się w zakresie $0 \leqslant \omega_l \leqslant e$, gdzie e — liczba dodatnia i rzeczywista. Funkcja wskaźników jest funkcją określoną ciągłą i różniczkowalną w obszarze C-wymiarowym. Przy braku wpływu wskaźników ϱ_i na efekt techniczny, mamy

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = 0, \ldots, \omega_\nu = 0; \quad P(p_j) = 1.$$

Przy liniowym wpływie, mamy

$$\omega_1 = 1, \quad \omega_2 = 1, \ldots, \omega_\nu = 0; \quad P(p_j) = \varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_\nu.$$

Funkcja zakresowości $R(r_j)$. Przyjmuje wartości dyskretne $R(r_j) = 1$ dla układu jednozakresowego, $R(r_j) = f_1, f_2, \ldots$ dla układów wielozakresowych, przy czym f_i — są liczbami dodatnimi.

Funkcja stanu procesu $Z(z_j)$. Własności matematyczne tej funkcji zależą od funkcji podcałkowej $\overline{H}(z_j)$. W badaniach syntezy i konstruowania układu, $\overline{H}(z_j)$ jest funkcją określoną, ciągłą i różniczkowalną. Każdemu uporządkowanemu zbiorowi Z_j jest podporządkowana określona wartość charakterystyki $\overline{H}(z_j)$. W czasie eksploatacji układu, przy założeniu stabilnej pracy, rozpatrywana funkcja podcałkowa jest również określona, ciągła i różniczkowalna. W obu przypadkach funkcja $Z(z_j)$ jest równoważna całce typu Cauchy'ego. W pewnych klasach układów operacje optymizacyjne wymagają rozważania całki z funkcji $\overline{H}(z_j)$ jako całki Lebesgue'a. Z rozważań na kilku układach [2] wynika, że funkcje podcałkowe są złożone i dlatego całka jest w większości przypadków nierozwiązywalna zwykłymi metodami. Dzieląc jednak przedział jednego włączenia na etapy, można zastępować funkcje podcałkową przez wielomiany.

Funkcja efektu technicznego $F(W_j)$. Matematyczne własności funkcji opisującej efekt techniczny $F(W_j)$ zależą od własności $P(p_j)$, $R(r_j)$ i $Z(z_j)$.

Funkcja wysiłku $K(W_j, a_i)$. Przy założeniu ustabilizowanych warunków ekonomicznych ($a_i = \text{const}$), funkcja $K(W_j, a_i)$ zależy od wybranych technicznych wielkości W_j. Każdemu uporządkowanemu zbiorowi W_j jest podporządkowana określona wartość funkcji wysiłku. W pewnych przypadkach, przy skokach a_i funkcja $K(W_j, a_i)$ może być nieciągła.

Funkcja efektu ogólnego $\lambda(W_j, a_i)$. Dla przypadku $a_i = \text{const}$, funkcja $\lambda(W_j, a_i)$ jest dodatnią, określoną, ciągłą i różniczkowalną. Tylko w nielicznych przypadkach może wystąpić osobliwość, dla pewnych punktów przy $a_i \neq 0$.

Funkcja efektu wysiłku $S(W_j, a_i)$. Występuje jako funkcja dodatnia, określona, ciągła i różniczkowalna. Uwagi o własnościach matematycznych są również słuszne wtedy, gdy omówione funkcje występują jako funkcjonały.

Przykład. Podstawowym problemem w dynamice układów mechanicznych jest optymizacja parametrów. Rozpatrzmy zagadnienie wyznaczenia wielkości optymalnych parametrów układu w oparciu o charakterystyki uogólnione [3]. Przy założeniu

$$K({}_wW_j, a_i) + \int_0^{\tau_1} \overline{K}_e(W_j, a_i)\,d\tau = \text{const} = C_1, \tag{7.1}$$

$$K_w(W_j, a_i) + \sum_{i=1}^{i=d} \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \overline{K}_{ei}(W_j, a_i)\,d\tau = \text{const} = C_2, \tag{7.2}$$

zadanie sprowadza się do określenia wartości parametrów masy i tłumienia, przy których zachodzi związek

(7.3) $$E(U_l) = \max F_d(W_j) = \max[P(p_j)R(r_j)Z(z_j)] =$$

$$= \max P(p_j)R(r_j)\sum_{i=1}^{i=d}\int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i}\bar{H}_i(W_j,\tau)d\tau = P(p_j)R(r_j)[\max\int_0^{\tau_1}\bar{H}_1(W_j,\tau)d\tau+$$

$$+\max\int_{\tau_1}^{\tau_2}\bar{H}_2(W_j,\tau)d\tau+\ldots+\max\int_{\tau_{d-1}}^{\tau_d}\bar{H}_d(W_j,\tau)d\tau].$$

Przy

$$P(p_j)R(r_j) = \text{const} = C_3,$$

zagadnienie sprowadza się do badania

(7.4) $$J = \max\int_0^T \bar{H}(W_j,\tau)d\tau$$

lub, po wydzieleniu funkcji rozwiązującej określającej rzeczywisty przebieg stanu nieustalonego $y_r(W_j,\tau)$ i po wprowadzeniu funkcji programowej $y_p(\tau)$, mamy

(7.5) $$J = \max D\int_0^T [y_p(\tau)-\Delta y(W_j,\tau)]d\tau,$$

przy czym

(7.6) $$y_r(W_j,\tau) = -[y_p(\tau)-y_r(W_j,\tau)]+y_p(\tau) = -\Delta y(\tau)+y_p(\tau),$$

D — charakterystyka stała.

Zamiast szukać maksimum wyrażenia (7.5), wystarczy, przy ustalonym $y_p(\tau)$, określić parametry przy których

(7.7) $$\bar{J} = \min\int_0^T \Delta y(W_j,\tau)d\tau.$$

Niech równanie dla $y_r(\tau)$ ma postać

(7.8) $$\frac{d^2y_r(\tau)}{d\tau^2}+2\alpha\frac{dy_r(\tau)}{d\tau}+y_r(\tau) = L,$$

przy czym

(7.9) $$\lim_{\tau\to 0} y_r(\tau) = L_1, \quad y_r'(\tau=0) = 0,$$

(7.10) $$\lim_{\tau\to\infty} y_r(\tau) = L_2.$$

Rozwiązanie równania (7.8) po wykorzystaniu przyjętych warunków początkowych, kolejno dla $\alpha < 1$, $\alpha = 1$ i $\alpha > 1$, [przy czym $\alpha = \alpha(W_j)$], ma postać

(7.11) $$y_r(\tau) = e^{-\alpha\tau}\left[(L_1-L_2)\cos\tau\sqrt{1-\alpha^2}+\frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}\sin\tau\sqrt{1-\alpha^2}\right]+L_2,$$

(7.12) $$y_r(\tau) = L_2-(L_2-L_1)(1+\tau)e^{-\tau},$$

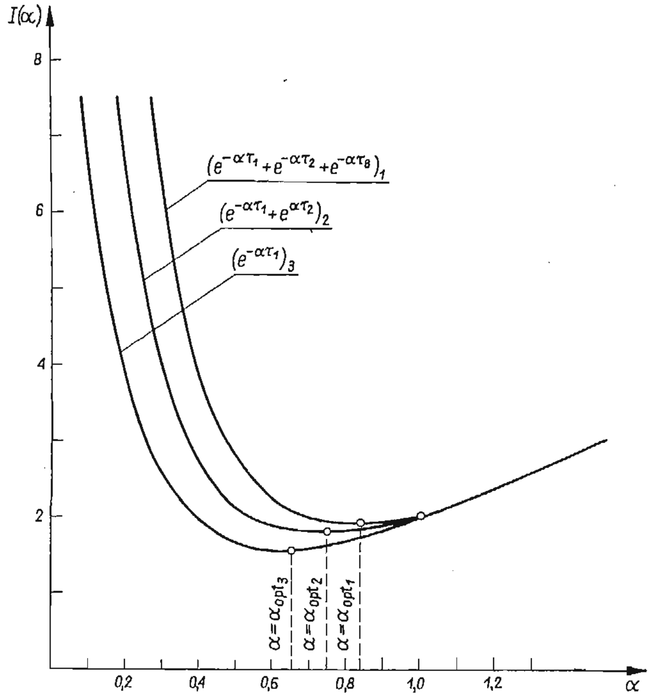
7.13) $$y_r(\tau) = G_1e^{k_1\tau}+G_2e^{k_2\tau},$$

gdzie

(7.14) $$k_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1},$$

(7.15) $$k_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 1}.$$

Wstawiając do wyrażenia (7.7) kolejno rozwiązania (7.11), (7.12) i (7.13) jako funkcje $y_r(\alpha)$ otrzymamy $\bar{J}(\alpha)$, której przebieg pokazany jest na rys. 2. W zależności od ilości



Rys. 2

pulsacji ($\mu = 1, 2, 3$), α_{opt} przemieszcza się w kierunku większych wartości. Dla $\mu = 3$, minimum funkcji $\bar{J}(\alpha = \alpha_{\text{opt}})$ wynosi 1,52, przy czym wartość wielkości optymizowanej wynosi 0,62. Wstawiając wartość α_{opt} do całki (7.7) oraz wracając do wyrażenia (7.3), poprzez związki (7.4) i (7.5), otrzymamy wyrażenie na max $F(W_j)$.

8. Związki pomiędzy charakterystykami uogólnionymi i klasycznymi charakterystykami układów mechanicznych

Zarówno efekt techniczny, jak i efekt ogólny układu mechanicznego można sprowadzić do charakterystyk używanych przy opisie układów mechanicznych. Dla przykładu, dla układów jednozakresowych, przy $\omega_1 = 0, \omega_2 = 0, \ldots, \omega_\nu = 0$ oraz przy założeniu, że charakterystyka główna układu jest znaną funkcją czasu

$$\bar{H}(W_j, \tau) = H(\tau),$$

mamy

$$P(p_j) = 1, \quad R(r_j) = 1, \quad F(W_j) = H(\tau)[\tau_2 - \tau_1)$$

przy czym $\tau_2 - \tau_1$ — czas pracy układu dla jednego włączenia.

Jeśli charakterystyką główną jest moc układu, wtedy efekt techniczny redukuje się do funkcji określającej pracę układu mechanicznego. W rozpatrywanym przykładzie funkcja efektu ogólnego będzie określona jako iloraz pracy układu dla jednego włączenia oraz kosztów związanych z jego eksploatacją.

9. Względne postacie charakterystyk uogólnionych

W niektórych zagadnieniach optymizacyjnych układów mechanicznych wygodniej jest używać wielkości względnych $\bar{F}$, $\bar{K}$, $\bar{\lambda}$ i $\bar{S}$. Przypadki takie występują w badaniach nad modyfikacją i poprawą charakterystyk układów oraz w badaniach eksploatacyjnych. Wprowadzając pojęcia uogólnionych charakterystyk rzeczywistych (rz) i teoretycznych (t), w odniesieniu do efektu technicznego, funkcji wysiłku, efektu ogólnego i efektu wysiłku, otrzymamy:

$$\text{(9.1)} \quad \bar{F}(W_1, W_2, \ldots, W_m) = \frac{F^{(rz)}(W_1, W_2, \ldots, W_n)}{F^{(t)}(W_1, W_2, \ldots, W_n)} = \frac{P^{(rz)}(p_j) R^{(rz)}(r_j) Z^{(rz)}(z_j)}{P^{(t)}(p_j) R^{(t)}(r_j) Z^{(t)}(z_j)},$$

$$\text{(9.2)} \quad \bar{K}(W_1, W_2, \ldots, W_m, a_1, a_2, \ldots, a_n) = \frac{K^{(rz)}(W_j, a_i)}{K^{(t)}(W_j, a_i)} = \frac{K_w^{(rz)}(W_j, a_i) + K_e^{(tz)}(W_j, a_i)}{K_w^{(t)}(W_j, a_i) + K_e^{(t)}(W_j, a_i)},$$

$$\text{(9.3)} \quad \bar{\lambda}(W_1, W_2, \ldots, W_m, a_1, a_2, \ldots, a_n) = \frac{\lambda^{(rz)}(W_j, a_i)}{\lambda^{(t)}(W_j, a_i)} = \frac{F^{(rz)}(W_j) K^{(t)}(W_j, a_i)}{F^{(t)}(W_j) K^{(rz)}(W_j, a_i)},$$

$$\text{(9.4)} \quad \bar{S}(W_1, W_2, \ldots, W_m, a_1, a_2, \ldots, a_n) = \frac{S^{(rz)}(W_j, a_i)}{S^{(t)}(W_j, a_i)} = \frac{F^{(t)}(W_j) K^{(rz)}(W_j, a_i)}{F^{(rz)}(W_j) K^{(t)}(W_j, a_i)}.$$

Przy pełnym eksploatacyjnym wykorzystaniu układu mechanicznego, a więc przy zgodności wartości teoretycznych i rzeczywistych efektów i funkcji wysiłku, mamy:

$$\text{(9.5)} \quad \lim_{\substack{F^{(rz)} \to F^{(t)} \\ K^{(rz)} \to K^{(t)}}} \lambda(W_j, a_i) = \lim_{\substack{F^{(rz)} \to F^{(t)} \\ K^{(rz)} \to K^{(t)}}} \frac{\lambda^{(rz)}(W_j, a_i)}{\lambda^{(t)}(W_j, a_i)} =$$

$$= \lim_{\substack{F^{(rz)} \to F^{(t)} \\ K^{(rz)} \to K^{(t)}}} \frac{\prod\limits_{i=1}^{i=\nu} (\varrho_i)_{rz}^{\omega_i} R_{rz}(r_j) \sum\limits_{i=1}^{i=d} \int\limits_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \bar{H}_{rz}(W_j, a_i) d\tau}{\prod\limits^{i=\nu} (\varrho_i)_t^{\omega_i} R_t(r_j) \sum\limits_{i=1}^{i=d} \int\limits_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \bar{H}_t(W_j, a_i) d\tau} = \lim_{\substack{F^{(rz)} \to F^{(t)} \\ K^{(rz)} \to K^{(t)}}} \frac{F^{(rz)}(W_j) K^{(t)}(W_j, a_i)}{F^{(t)}(W_j) K^{(rz)}(W_j, a_i)} = 1.$$

Przy niepełnym wykorzystaniu układu mechanicznego, mamy:

$$\text{(9.6)} \quad \lim_{\substack{F^{(rz)} \to F^{(t)} \\ K^{(rz)} > K^{(t)}}} \lambda(W_j, a_i) < 1$$

lub

$$\text{(9.7)} \quad \lim_{\substack{F^{(rz)} < F^{(t)} \\ K^{(rz)} \to K^{(t)}}} \lambda(W_j, a_i) < 1$$

10. Wnioski

Wprowadzenie charakterystyk uogólnionych i wykorzystanie ich jako kryteriów optymizacyjnych pozwala na rozszerzenie wpływu wielkości układu na $E(U_i)$ w procesie optymizacyjnym. Zastosowanie $\lambda(W_j, a_i)$ i $S(W_j, a_i)$ lub $\lambda[W_j(X_i), a_i]$ i $S[W_j(X_i), a_i]$ do określania wartości i funkcji optymizowanych, uogólnia zadania ekstremalizacyjne występujące w syntezie i konstruowaniu. Należy przy tym nadmienić, że wprowadzenie takich charakterystyk do problematyki określania wartości optymalnych wielkości układu w pewnych przypadkach może rozszerzyć aparat matematyczny. Jednak wykorzystanie maszyn matematycznych do rozwiązywania konkretnych technicznych zadań optymizacyjnych pozwoli na złagodzenie tej wady.

Literatura cytowana w tekście

1. R. KULIKOWSKI, *Procesy optymalne i adaptacyjne w układach regulacji automatycznej*, PWN, Warszawa, 1965 r.
2. R. STANISZEWSKI, *Wyznaczania optymalnej serii oraz badania wpływu zmian wielkości na efektywność produkowanych silników spalinowych przy pomocy charakterystyk uogólnionych*, Siln. Spal., 1/70.
3. R. STANISZEWSKI, *Problemy ekstremalizacyjne w syntezie i projektowaniu układów dynamicznych.* Materiały konferencji «Dynamika konstrukcji», Łańcut 1968 r.

Резюме

ВОПРОСЫ ОПТИМИЗАЦИИ ПРИ СИНТЕЗЕ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В работе приводятся теории построения обобщенных характеристик используемых в дальнейшем в качестве оптимизационных критериев при определении оптимальных значений параметров. В качестве предмета рассмотрения принята механическая система в общем смысле — в отношении геометрии, веса структуры и происходящих физических явлений. Выведены зависимости на технический эффект и функции затрат. Общий эффект определен как отношение технического эффекта к функции затрат. Величина обратная общему эффекту является тн. обобщенной эффективностью затрат. Выведены основные уравнения оптимизации и приводятся общие выводы относительно приведенного вида обобщенных характеристик. Приводится пример иллюстрирующий применение обобщенных характеристик для оптимизации параметров в вопросах относящихся к динамике механических систем. Приводится также пример использования обобщенных характеристик для исследования целесообразности изменения значений отдельных параметров.

Summary

OPTIMIZATION PROBLEMS IN SYNTHESIS OF MECHANICAL SYSTEMS

The theories of construction of generalized characteristics are described in the paper, and their utilization as optimizing criterions is demonstrated. The object of investigations is assumed to be a mechanical system in a general sense — with respect to geometric, structural and loading properties and physical phenomena occurring in the systems. The relations concerning the technological effect and effort functions are derived. The general effect is defined as the ratio of the technological effect to the effort function. The reciprocal of the general effect is the so-called effort effect. The fundamental optimization equations are derived and general conclusions concerning the forms of generalized characteristics are drawn. An example illustrating the application of generalized characteristics to the optimization of parameters in dynamical problems of mechanical systems is given. Another example of the application of generalized characteristics to the investigation of the purposefullness of the parameter changes concludes the paper.

WOJSKOWA AKADEMIA TECHNICZNA
WARSZAWA

Praca została złożona w Redakcji dnia 21 kwietnia 1970 r. — po raz drugi 6 maja 1970 r.