

O STATECZNOŚCI NASYPÓW I SKARP W STANIE RÓWNOWAGI GRANICZNEJ¹⁾

RYSZARD JERZY I Z B I C K I (WROCLAW)

1. Wprowadzenie

W pracy rozważa się symetryczne, ciężkie masywy gruntowe o skończonej wysokości, obciążone na górnej poziomej powierzchni stałym naprężeniem normalnym (rys. 1 i 2). Przyjęto, że ośrodek znajduje się w stanie równowagi granicznej, której naruszenie spowoduje zsuwanie się ośrodka w dół. Zadanie polega na wyznaczeniu stanu naprężenia wewnątrz masywu i określeniu profilu zbocza wolnego od obciążeń zewnętrznych. W szczególnym przypadku, gdy profil zbocza ma w punkcie O pionową styczną, ciśnienie wzdłuż górnej krawędzi można rozpatrywać jako oddziaływanie pewnej warstwy ośrodka, w której występuje stan sprężysty (por. [1]).

SOKOŁOWSKI [2] rozpatrywał symetryczne, ciężkie masywy gruntowe, w których górne części ograniczone prostymi lub łukami parabol znajdują się w stanie sprężystym, a dolne o nieznanym profilu zbocza znajdują się w stanie granicznym. Pole naprężeń w części sprężystej dane jest w postaci prostych wzorów analitycznych. W części plastycznej pole naprężeń i profil brzegu swobodnego znajdujemy rozwiązując numerycznie odpowiednie różniczkowe równania charakterystyk.

Grunt traktuje się jako ciało sztywno-idealnie plastyczne, jednorodne i izotropowe. Zgodnie z przyjętym modelem gruntu parametry hipotezy Coulomba–Mohra, kąt tarcia wewnętrznego φ i kohezja k są stałe w całym rozpatrywanym obszarze. Przyjęto płaski stan odkształcenia. Układ równań równowagi granicznej otrzymany z równań równowagi wewnętrznej i warunku plastyczności Coulomba–Mohra jest typu hiperbolicznego (por. np. [1]) i rozwiązuje się go metodą charakterystyk. W większości przypadków podanie ścisłego rozwiązania analitycznego jest jednakże niemożliwe. Dlatego najczęściej trzeba się uciekać do metod przybliżonych: numerycznej metody różnic skończonych [1] lub metody graficznej [3]. Metody te dają przybliżoną wartość szukanej funkcji dla przyjętych jednych wartości parametrów występujących w równaniach stanu granicznego.

W pracy [4] SPENCER zaproponował metodę perturbacji po aproksymowanych (wyjściowych) charakterystykach, pozwalającą otrzymać przybliżone wyrażenie analityczne

¹⁾ Pracę wykonano podczas stażu naukowego odbywanego przez autora w Instytucie Podstawowych Problemów Techniki PAN w Warszawie w roku 1968/69, pod kierunkiem doc. dra Z. Mroza.

dla szukanej funkcji, przy założeniu, że jako dostatecznie mały można potraktować parametr $a\gamma/k$, gdzie γ jest ciężarem objętościowym ośrodka, a jest liniowym wymiarem deformowanego obszaru. Metodę perturbacji dla ośrodka Treski i płaskiego stanu odkształcenia stosowano w pracach [5, 6 i 7], a w pracy [8] dla stanu osiowej symetrii. W pracy [9] metodę perturbacji dostosowano do ośrodka typu Coulomba w stanie osiowej symetrii.

W niniejszej pracy zastosowano metodę Spencera do wyznaczenia stanu naprężenia w górnych obszarach deformacji skarpy i określenia przybliżonego kształtu zbocza.

2. Równania płaskiego stanu odkształcenia

Równania równowagi wewnętrznej mają postać

$$(2.1) \quad \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y = 0,$$

gdzie σ_x , σ_y , τ_{xy} są składowymi naprężeniami, X i Y są składowymi siły ciężkości na jednostkę objętości odpowiednio wzdłuż osi układu współrzędnych x , y . Poszukiwany stan naprężenia musi spełniać, oprócz równań (2.1), warunek plastyczności Coulomba-Mohra

$$(2.2) \quad \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) \sin \varphi + \left[\frac{1}{4}(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \tau_{xy}^2 \right]^{1/2} = k \cos \varphi,$$

gdzie k jest kohezją, tzn. wytrzymałością materiału na ścinanie przy naprężeniu normalnym $\sigma = 0$, φ jest kątem tarcia wewnętrznego.

Składowe granicznego stanu naprężenia można wyrazić związkami

$$(2.3) \quad \sigma_x = -p + q \cos 2\eta, \quad \sigma_y = -p - q \cos 2\eta, \quad \tau_{xy} = q \sin 2\eta,$$

gdzie

$$(2.4) \quad p = -\frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) = -\frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2), \quad q = \left[\frac{1}{4}(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \tau_{xy}^2 \right]^{1/2} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2),$$

$$\operatorname{tg} 2\eta = 2\tau_{xy}/(\sigma_x - \sigma_y), \quad 0 \leq \eta \leq \pi.$$

Graniczny stan naprężenia reprezentowany jest przez dwa niezależne parametry p i η .

Podstawiając (2.3) do (2.1), otrzymamy układ równań typu hiperbolicznego, którego charakterystyki α i β są określone odpowiednio przez równania

$$(2.5) \quad \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \Phi, \quad \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \left(\Phi + \frac{\pi}{2} + \varphi \right),$$

gdzie $\Phi = \eta - \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}$.

Jeżeli $\partial/\partial s_\alpha$ i $\partial/\partial s_\beta$ oznacza różniczkowanie wzdłuż α i β — linii, wtedy związki wzdłuż charakterystyk mają postać

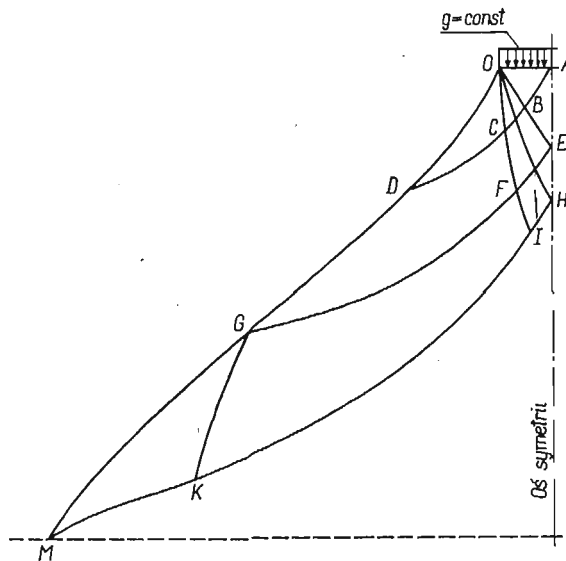
$$(2.6) \quad \begin{aligned} \cos \varphi \frac{\partial p}{\partial s_\alpha} + 2q \frac{\partial \Phi}{\partial s_\alpha} - X \cos(\Phi + \varphi) - Y \sin(\Phi + \varphi) &= 0, \\ \cos \varphi \frac{\partial p}{\partial s_\beta} - 2q \frac{\partial \Phi}{\partial s_\beta} + X \sin \Phi - Y \cos \Phi &= 0. \end{aligned}$$

Z warunków plastyczności (2.2) po podstawieniu (2.4) otrzymamy

$$(2.7) \quad q = p \sin \varphi + k \cos \varphi.$$

3. Schemat zadania

Na rys. 1 przedstawiono schematycznie układ obszarów plastycznych w przypadku nasypu o małych wymiarach korony w porównaniu z wysokością. Wychodząc z brzegu OA wyznaczamy stan naprężenia kolejno w obszarach OAB i OBC , a następnie znając

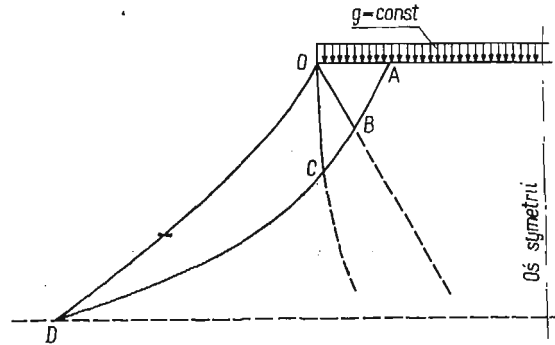


Rys. 1

przebieg linii OC określamy kształt brzegu swobodnego OD i stan naprężenia w OCD . Łatwo jest przedłużyć siatkę charakterystyk do obszaru ograniczonego linią EFG . Dalej postępujemy w sposób podobny do podanego przez BISHOPA [10]. Przedłużenie siatki charakterystyk, ograniczonej skrajną linią EFG rozpoczynamy od rozwiązania zagadnienia mieszanego, określonego znanymi wielkościami wzdłuż linii EFG i warunkiem symetrii na osi HA . Sformułowane zagadnienie mieszane określa jednoznacznie stan naprężenia w obszarze $EFGKIH$. Następnie należy rozwiązać zagadnienie odwrotne do zagadnienia brzegowego Cauchy'ego. Znając mianowicie przebieg linii GK wyznaczamy kształt brzegu swobodnego GM . Obszar na zewnątrz linii $HIKM$ jest sztywny. Przedstawiona siatka

charakterystyk ma charakter podobny do układu podanego przez EWINGA i HILLA [11] dla rozciąganej pręta z korbami.

W dalszych częściach pracy ograniczono się do podania przybliżonego rozwiązania zagadnienia w obszarze $OABCD$. Problem przedłużenia rozwiązania do linii $HIKM$ może stanowić treść oddzielnej pracy. Wydaje się, że problem ten może być rozwiązany w sposób podobny do podanego przez EWINGA w pracy [12].



Rys. 2

W przypadku nasypów o szerokiej koronie (rys. 2) lub skarp, kiedy ośrodek w jednym kierunku poziomym rozciąga się nieograniczenie, rozwiązanie budujemy w obszarze $OABCD$. Przedłużenie siatki charakterystyk jest możliwe do wykonania w sposób podobny do opisanego powyżej, w przypadku, kiedy materiał podłoża nie jest słabszy od materiału z którego zbudowany jest nasyp.

4. Warunki brzegowe

Dalsze rozważania ograniczamy do rozpatrzenia problemu przedstawionego schematycznie na rys. 3. Poszukujemy kształtu zbocza ograniczonego poziomą półosią $x \geq 0$ i obciążonego naprężeniem normalnym $\sigma_y = -g = \text{const}$ wzdłuż tej półosi. Profil zbocza $x < 0$ jest wolny od obciążeń zewnętrznych.

Jeżeli normalną i styczną składową naprężenia na zboczu oznaczmy przez σ_n i τ_{nt} , a przez λ oznaczmy kąt między styczną do zbocza w danym punkcie i osią x , wtedy można podać następujące wzory

$$(4.1) \quad \sigma_n = -p + q \sin[2(\Phi - \lambda) + \varphi], \quad \tau_{nt} = q \cos[2(\Phi - \lambda) + \varphi].$$

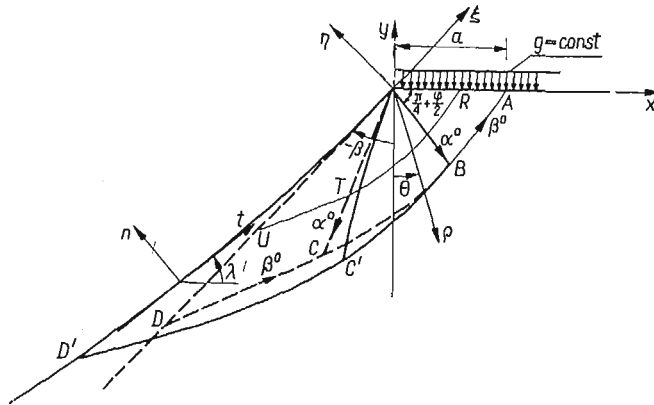
Z warunku $\sigma_n = \tau_{nt} = 0$, na zboczu otrzymamy

$$(4.2) \quad p = q = \frac{k \cos \varphi}{1 - \sin \varphi}, \quad \Phi = \lambda - \left(\frac{3}{4} \pi + \frac{\varphi}{2} \right) \text{ na } OD'.$$

Warunek $\sigma_y = -g$ i $\tau_{xy} = 0$ wzdłuż półosi $x \geq 0$ prowadzi do

$$(4.3) \quad p = \frac{g - k \cos \varphi}{1 + \sin \varphi}, \quad q = \frac{g \sin \varphi + k \cos \varphi}{1 + \sin \varphi}, \quad \Phi = -\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \text{ na } OA.$$

Jeżeli pominiemy wpływ sił ciężkości, wtedy wzory (4.3) będą także rozwiązaniem równań stanu granicznego w całym obszarze OAB .



Rys. 3

Stan naprężenia w obszarze OAB jest niezależny od współrzędnej x i daje się opisać następującymi równaniami:

$$(4.4) \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} - \gamma = 0,$$

gdzie γ jest ciężarem objętościowym ośrodka. Po scałkowaniu (4.4) i wyznaczeniu stałych z warunków brzegowych (4.3), w obszarze OAB otrzymamy

$$(4.5) \quad p = \frac{g - \gamma_y - k \cos \varphi}{1 + \sin \varphi}, \quad q = \frac{(g - \gamma_y) \sin \varphi + k \cos \varphi}{1 + \sin \varphi}, \quad \Phi = -\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}.$$

5. Równania metody perturbacji

Rozwiązania równań (2.6) i (2.7) poszukujemy w postaci szeregów potęgowych względem parametru ε :

$$(5.1) \quad \begin{aligned} p &= p^0 + \varepsilon p' + \varepsilon^2 p'' + \dots, \\ q &= q^0 + \varepsilon q' + \varepsilon^2 q'' + \dots, \\ \Phi &= \Phi^0 + \varepsilon \Phi' + \varepsilon^2 \Phi'' + \dots, \end{aligned}$$

gdzie ε jest wielkością rzędu $a\gamma/k$ (a jest liniowym wymiarem deformowanego obszaru), a układ p^0 , q^0 i Φ^0 jest rozwiązaniem analitycznym odpowiedniego problemu, kiedy wpływ sił ciężkości pomija się (rozwiązanie wyjściowe). Wyrazy p' , q' , Φ' i rzędów wyższych są rozwiązaniem liniowych równań perturbacyjnych odpowiedniej klasy.

Zmiennymi niezależnymi są długości łuku dwóch krzywych

$$(5.2) \quad \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \Phi^0, \quad \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \left(\Phi^0 + \frac{\pi}{2} + \varphi \right),$$

przyjętych jako układ współrzędnych, które są także α^0 i β^0 — charakterystyką rozwiązania wyjściowego. Jeżeli $\partial/\partial s_\alpha^0$ i $\partial/\partial s_\beta^0$ oznacza różniczkowanie wzdłuż wyjściowych α^0 i β^0 — linii, to

$$(5.3) \quad \begin{aligned} \cos \varphi \frac{\partial}{\partial s_\alpha} &= \cos(\varphi - \Phi + \Phi^0) \frac{\partial}{\partial s_\alpha^0} + \sin(\Phi - \Phi^0) \frac{\partial}{\partial s_\beta^0}, \\ \cos \varphi \frac{\partial}{\partial s_\beta} &= -\sin(\Phi - \Phi^0) \frac{\partial}{\partial s_\alpha^0} + \cos(\varphi + \Phi - \Phi^0) \frac{\partial}{\partial s_\beta^0}. \end{aligned}$$

Po podstawieniu (5.1) do (2.6) i (2.7) i mając na uwadze (5.3), otrzymamy te związki w postaci szeregów potęgowych względem ε . Przyrównując do zera wyrazy niezależne od ε , otrzymamy równania zerowej perturbacji

$$(5.4) \quad \begin{aligned} \cos \varphi \frac{\partial p^0}{\partial s_\alpha^0} + 2q^0 \frac{\partial \Phi^0}{\partial s_\alpha^0} &= 0, \quad \cos \varphi \frac{\partial p^0}{\partial s_\beta^0} - 2q^0 \frac{\partial \Phi^0}{\partial s_\beta^0} = 0, \\ q^0 &= p^0 \sin \varphi + k \cos \varphi. \end{aligned}$$

Rozwiązanie (5.4) z (5.2) prowadzi do wartości wyjściowych.

Przyrównując do zera wyrazy rzędu ε , otrzymamy równania pierwszej perturbacji

$$(5.5) \quad \begin{aligned} \cos \varphi \frac{\partial p'}{\partial s_\alpha^0} + 2q^0 \frac{\partial \Phi'}{\partial s_\alpha^0} + 2q' \frac{\partial \Phi^0}{\partial s_\alpha^0} + \Phi' \left(\frac{\partial p^0}{\partial s_\beta^0} + \frac{2q^0}{\cos \varphi} \frac{\partial \Phi^0}{\partial s_\beta^0} \right) + \varepsilon^{-1} \gamma \sin(\Phi^0 + \varphi) &= 0, \\ \cos \varphi \frac{\partial p'}{\partial s_\beta^0} - 2q^0 \frac{\partial \Phi'}{\partial s_\beta^0} - 2q' \frac{\partial \Phi^0}{\partial s_\beta^0} - \Phi' \left(\frac{\partial p^0}{\partial s_\alpha^0} - \frac{2q^0}{\cos \varphi} \frac{\partial \Phi^0}{\partial s_\alpha^0} \right) + \varepsilon^{-1} \gamma \cos \Phi^0 &= 0, \\ q' &= p' \sin \varphi. \end{aligned}$$

W rozwiązaniu ograniczonym do pierwszej perturbacji, równanie profilu zbrocza we współrzędnych η , ξ (rys. 3) ma postać

$$(5.6) \quad \frac{d\eta}{d\xi} = \varepsilon \Phi',$$

a z (4.2), (4.3), (4.5) i (5.1), jako warunki brzegowe dla zerowej i pierwszej perturbacji otrzymamy

$$(5.7) \quad \begin{aligned} p^0 &= \frac{k \cos \varphi}{1 - \sin \varphi}, \quad \Phi^0 = \beta - \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right), \quad p' = 0 \quad \text{na } OD', \\ p^0 &= \frac{g - k \cos \varphi}{1 + \sin \varphi}, \quad \Phi^0 = -\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}, \quad p' = -\varepsilon^{-1} \frac{\gamma \gamma}{1 + \sin \varphi}, \quad \Phi' = 0 \quad \text{na } OB. \end{aligned}$$

6. Rozwiązanie równań perturbacyjnych

6.1. Rozwiązanie wyjściowe. Układ charakterystyk rozwiązania wyjściowego przedstawiają linie przerywane na rys. 3. Zerowe pole naprężeń określają formuły w OAB

$$(6.1) \quad p^0 = \frac{g - k \cos \varphi}{1 + \sin \varphi}, \quad q^0 = \frac{g \sin \varphi + k \cos \varphi}{1 + \sin \varphi}, \quad \Phi^0 = -\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2};$$

w obszarze OBC

$$(6.2) \quad \begin{aligned} p^0 &= \frac{g+k \operatorname{ctg} \varphi}{1+\sin \varphi} \exp \left\{ \left(2\theta - \frac{\pi}{2} + \varphi \right) \operatorname{tg} \varphi \right\} - k \operatorname{ctg} \varphi, \\ q^0 &= \frac{g \sin \varphi + k \cos \varphi}{1+\sin \varphi} \exp \left\{ \left(2\theta - \frac{\pi}{2} + \varphi \right) \operatorname{tg} \varphi \right\}, \\ \Phi^0 &= \theta - \frac{\pi}{2}, \quad \beta + \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}; \end{aligned}$$

obszarze OCD

$$(6.3) \quad p^0 = q^0 = \frac{k \cos \varphi}{1 - \sin \varphi}, \quad \Phi^0 = \beta - \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right),$$

gdzie ϱ, θ jest układem współrzędnych biegunowych ze środkiem w punkcie O , a kąt β określony jest wzorem

$$(6.4) \quad -\beta = \frac{\operatorname{ctg} \varphi}{2} \ln \left[\left(\frac{g+k \operatorname{ctg} \varphi}{k \operatorname{ctg} \varphi} \right) \frac{1-\sin \varphi}{1+\sin \varphi} \right].$$

Profil zbocza stanowi prosta OD nachylna do osi x pod kątem $\left(\frac{\pi}{2} + \beta \right)$.

Ciągłe pole naprężeń powinno spełniać warunek $\beta \leq 0$, wtedy z (6.4) otrzymamy, że obciążenie zewnętrzne g musi spełniać nierówność

$$(6.5) \quad g \geq \frac{2k \cos \varphi}{1 - \sin \varphi}$$

nakładającą znane ograniczenie na rozwiązanie zagadnienia równowagi granicznej [1]. Zauważmy jeszcze, że w obszarze OBC charakterystyki β^0 są spiralami logarytmicznymi; równanie linii ST ma postać

$$(6.6) \quad \varrho = \varrho_0 \exp \left\{ \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} - \theta \right) \operatorname{tg} \varphi \right\},$$

gdzie $OS = \varrho_0$ oraz $\varrho_0 = \varrho_1 \exp(\beta \operatorname{tg} \varphi)$, $\varrho_1 = OT$.

6.2. Rozwiązanie równań pierwszej perturbacji. W obszarze $OC'D'$ zmiennymi niezależnymi jest układ współrzędnych s_α^0, s_β^0 oparty na charakterystykach wyjściowych z osiami skierowanymi zgodnie z kierunkami α^0 i β^0 — linii. Mamy następujące związki między układami współrzędnych

$$(6.7) \quad s_\alpha^0 = \frac{\xi}{2 \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right)} - \frac{\eta}{2 \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right)}, \quad s_\beta^0 = \frac{\xi}{2 \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right)} + \frac{\eta}{2 \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right)}.$$

W obszarze OBC zmiennymi niezależnymi jest układ współrzędnych biegunowych ϱ, θ . Wtedy mamy

$$(6.8) \quad \frac{\partial}{\partial s_\alpha^0} = \frac{\partial}{\partial \varrho}, \quad \frac{\partial}{\partial s_\beta^0} = \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} \quad \text{w } OBC'.$$

Równania pierwszej perturbacji (5.5), dla poszczególnych obszarów są następujące:
w OBC'

$$(6.9) \quad \begin{aligned} \cos \varphi \frac{\partial p'}{\partial \varrho} + 2q^0 \frac{\partial \Phi'}{\partial \varrho} + \frac{4}{\varrho} q^0 \Phi' - \varepsilon^{-1} \gamma \cos(\theta + \varphi) &= 0, \\ \cos \varphi \frac{\partial p'}{\partial \theta} - 2q^0 \frac{\partial \Phi'}{\partial \theta} - 2p' \sin \varphi + \varepsilon^{-1} \gamma \varrho \frac{\sin \theta}{\cos \varphi} &= 0; \end{aligned}$$

w obszarze $OC'D'$

$$(6.10) \quad \begin{aligned} \cos \varphi \frac{\partial p'}{\partial s_\alpha^0} + 2q^0 \frac{\partial \Phi'}{\partial s_\alpha^0} + \varepsilon^{-1} \gamma \sin\left(\beta - \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) &= 0, \\ \cos \varphi \frac{\partial p'}{\partial s_\beta^0} - 2q^0 \frac{\partial \Phi'}{\partial s_\beta^0} + \varepsilon^{-1} \gamma \sin\left(\beta + \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) &= 0, \end{aligned}$$

gdzie q^0 dane są odpowiednio przez wzory (6.2)₂ i (6.3)₁.

Po scałkowaniu kolejno równań (6.9)₂ i (6.9)₁ i po wyznaczeniu nieznanymi funkcji całkowania z warunków (5.7), w obszarze OBC' otrzymamy

$$(6.11) \quad \begin{aligned} p' &= \frac{3}{4} \varepsilon^{-1} \gamma \varrho \left\{ \left[\frac{3 \operatorname{tg} \varphi \sin \theta + \cos \theta}{1 + 8 \sin^2 \varphi} + \frac{\cos(\theta + \varphi)}{3 \cos \varphi} \right] + \left[\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)}{\cos \varphi} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{3 \operatorname{tg} \varphi \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)}{1 + 8 \sin^2 \varphi} \right] \exp\left\{ \left(\theta - \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) 3 \operatorname{tg} \varphi \right\} \right\}, \\ \Phi' &= -\frac{\cos \varphi}{8q^0} \varepsilon^{-1} \gamma \varrho \left\{ \left[\frac{3 \operatorname{tg} \varphi \sin \theta + \cos \theta}{1 + 8 \sin^2 \varphi} - \frac{\cos(\theta + \varphi)}{\cos \varphi} \right] + \left[\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)}{\cos \varphi} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{3 \operatorname{tg} \varphi \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)}{1 + 8 \sin^2 \varphi} \right] \exp\left\{ \left(\theta - \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) 3 \operatorname{tg} \varphi \right\} \right\}. \end{aligned}$$

W obszarze $OC'D'$ po scałkowaniu (6.10), mamy

$$(6.12) \quad \begin{aligned} p' &= -\frac{1}{2 \cos \varphi} \left\{ \varepsilon^{-1} \gamma \left[s_\alpha^0 \sin\left(\beta - \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) + s_\beta^0 \sin\left(\beta + \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) \right] - F(s_\beta^0) - G(s_\alpha^0) \right\}, \\ \Phi' &= -\frac{1}{4q^0} \left\{ \varepsilon^{-1} \gamma \left[s_\alpha^0 \sin\left(\beta - \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) - s_\beta^0 \sin\left(\beta + \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) \right] - F(s_\beta^0) + G(s_\alpha^0) \right\}, \end{aligned}$$

stąd, wobec $p' = 0$, dla $s_\alpha^0 = -s_\beta^0$ otrzymujemy

$$(6.13) \quad F(s_\beta^0) = -G(-s_\beta^0) + \varepsilon^{-1} \gamma s_\beta^0 \left[\sin\left(\beta + \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) - \sin\left(\beta - \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) \right]$$

oraz

$$(6.14) \quad \begin{aligned} p' &= -\frac{1}{2\cos\varphi} \left\{ \varepsilon^{-1}\gamma(s_\alpha^0 + s_\beta^0) \sin\left(\beta - \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) + G(-s_\beta^0) - G(s_\alpha^0) \right\}, \\ \Phi' &= -\frac{1}{4q^0} \left\{ \varepsilon^{-1}\gamma \left[s_\alpha^0 \sin\left(\beta - \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) - s_\beta^0 \left(2\sin\left(\beta + \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) - \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. - \sin\left(\beta - \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) \right) \right] + G(-s_\beta^0) + G(s_\alpha^0) \right\}. \end{aligned}$$

Funkcję G wyznaczamy z warunku ciągłości $p^0 + \varepsilon p'$ i $\Phi^0 + \varepsilon \Phi'$ na linii OC' , której równanie rzędu ε ma postać

$$(6.15) \quad \frac{\varrho_1 d\theta}{d\varrho_1} = \varepsilon \Phi',$$

gdzie Φ' jest określone przez (6.11)₂. Biorąc pod uwagę, że $\theta = \beta + \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}$ dla $\varrho_1 = 0$, z (6.15) otrzymamy

$$(6.16) \quad \theta = \left(\beta + \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) - \frac{\cos\varphi}{8q^0} \gamma \varrho_1 \left\{ \left[\frac{3\operatorname{tg}\varphi \sin\left(\beta + \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) + \cos\left(\beta + \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)}{1 + 8\sin^2\varphi} - \frac{\cos\left(\beta + \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)}{\cos\varphi} \right] + \left[\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)}{\cos\varphi} - \frac{3\operatorname{tg}\varphi \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)}{1 + 8\sin^2\varphi} \right] \exp(3\beta \operatorname{tg}\varphi) \right\}.$$

Na linii OC' , w klasie ε , mamy także $s_\alpha^0 = \varrho_1$. Wykorzystując teraz (6.2), (6.3), (6.11), (6.14) i (6.16), z warunku ciągłości p i Φ na OC' znajdujemy

$$(6.17) \quad G(s_\alpha^0) = - \varepsilon^{-1}\gamma s_\alpha^0 \sin\left(\beta - \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) + \varepsilon^{-1}\gamma s_\alpha^0 \cos\varphi \left\{ \left[\frac{3\operatorname{tg}\varphi \sin\left(\beta + \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) + \cos\left(\beta + \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)}{1 + 8\sin^2\varphi} - \frac{\cos\left(\beta + \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)}{\cos\varphi} \right] + \left[\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)}{\cos\varphi} - \frac{3\operatorname{tg}\varphi \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)}{1 + 8\sin^2\varphi} \right] \exp(3\beta \operatorname{tg}\varphi) \right\}.$$

Wobec (6.17), w obszarze $OC'D'$ ostatecznie otrzymujemy

$$(6.18) \quad p' = \frac{1}{2} \varepsilon^{-1} \gamma (s_\alpha^0 + s_\beta^0) \left\{ \left[\frac{3 \operatorname{tg} \varphi \sin \left(\beta + \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) + \cos \left(\beta + \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right)}{1 + 8 \sin^2 \varphi} + \frac{\cos \left(\beta + \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right)}{\cos \varphi} \right] + \left[\frac{\cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right)}{\cos \varphi} - \frac{3 \operatorname{tg} \varphi \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) + \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right)}{1 + 8 \sin^2 \varphi} \right] \exp(3\beta \operatorname{tg} \varphi) \right\},$$

$$\Phi' = \frac{\cos \varphi}{4q^0} \varepsilon^{-1} \gamma (s_\beta^0 - s_\alpha^0) \left\{ \left[\frac{3 \operatorname{tg} \varphi \sin \left(\beta + \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) + \cos \left(\beta + \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right)}{1 + 8 \sin^2 \varphi} - \frac{\cos \left(\beta + \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right)}{\cos \varphi} \right] + \left[\frac{\cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right)}{\cos \varphi} - \frac{3 \operatorname{tg} \varphi \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) + \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right)}{1 + 8 \sin^2 \varphi} \right] \right\} \times$$

$$\times \exp(3\beta \operatorname{tg} \varphi) + \frac{1}{2q^0} \varepsilon^{-1} \gamma s_\beta^0 \left[\sin \left(\beta + \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) - \sin \left(\beta - \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \right],$$

gdzie $q^0 = k \cos \varphi / (1 - \sin \varphi)$.

Wzór na Φ' dla punktów położonych na zboczach OD' można otrzymać całkując bezpośrednio równania (6.9)₂ i (6.10)₂ wzdłuż wyjściowej linii STU . Mianowicie, po scałkowaniu otrzymamy

$$(6.19) \quad \exp(2\beta \operatorname{tg} \varphi) \left(p'_s - \frac{2q_s^0}{\cos \varphi} \Phi'_s \right) - \left(p'_T - \frac{2q_T^0}{\cos \varphi} \Phi'_T \right) -$$

$$- \varepsilon^{-1} \gamma \varrho_0 \frac{3 \operatorname{tg} \varphi \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) + \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right)}{1 + 8 \sin^2 \varphi} \exp(2\beta \operatorname{tg} \varphi) +$$

$$+ \varepsilon^{-1} \gamma \varrho_1 \frac{3 \operatorname{tg} \varphi \sin \left(\beta + \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) + \cos \left(\beta + \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right)}{1 + 8 \sin^2 \varphi} = 0$$

oraz

$$(6.20) \quad \left(p'_T - \frac{2q_T^0}{\cos \varphi} \Phi'_T \right) - \left(p'_U - \frac{2q_U^0}{\cos \varphi} \Phi'_U \right) + \varepsilon^{-1} \gamma \varrho_1 \frac{\sin \left(\beta + \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right)}{\cos \varphi} = 0.$$

Eliminując z (6.19) i (6.20) wyrażenie $\left(p'_r - \frac{2q_r^0}{\cos \varphi} \Phi'_r\right)$ i wykorzystując brzegowe wartości (5.7) na p' i Φ' , dla zbocza otrzymamy

$$(6.21) \quad \Phi'_U = \frac{\cos \varphi}{2q_U^0} \varepsilon^{-1} \gamma s_\beta^0 \left\{ \left[\frac{3 \operatorname{tg} \varphi \sin \left(\beta + \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) + \cos \left(\beta + \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right)}{1 + 8 \sin^2 \varphi} + \frac{\sin \left(\beta + \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right)}{\cos \varphi} \right] + \left[\frac{\cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right)}{\cos \varphi} - \frac{3 \operatorname{tg} \varphi \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) + \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right)}{1 + 8 \sin^2 \varphi} \right] \exp(3\beta \operatorname{tg} \varphi) \right\}.$$

7. Przybliżony wzór na kształt zbocza

W rozwiązaniu ograniczonym do pierwszej perturbacji, na zboczu OD' mamy $s_\alpha^0 = -s_\beta^0$ oraz $\eta = 0$. Po podstawieniu (6.18)₂ lub (6.21) do (5.6) i po scałkowaniu otrzymamy następujący wzór na kształt zbocza

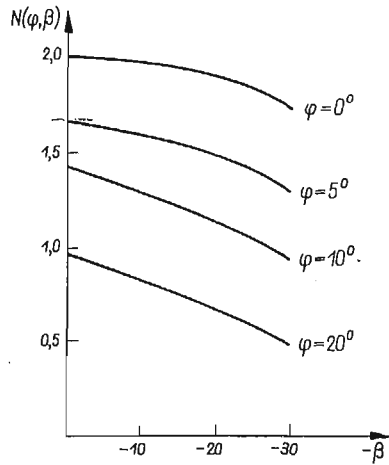
$$(7.1) \quad \eta = \frac{1}{8k} \gamma \xi^2 N(\varphi, \beta),$$

gdzie

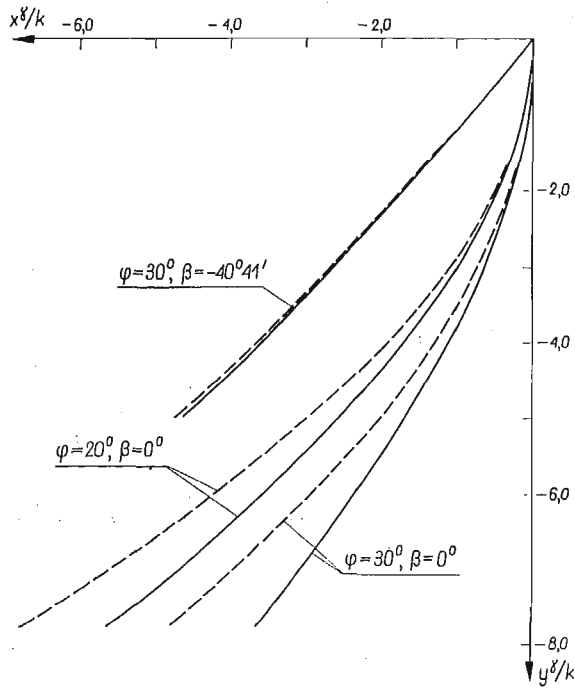
$$(7.2) \quad N(\varphi, \beta) = \frac{1 - \sin \varphi}{\cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right)} \left\{ \left[\frac{3 \operatorname{tg} \varphi \sin \left(\beta + \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) + \cos \left(\beta + \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right)}{1 + 8 \sin^2 \varphi} + \frac{\sin \left(\beta + \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right)}{\cos \varphi} \right] + \left[\frac{\cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right)}{\cos \varphi} - \frac{3 \operatorname{tg} \varphi \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) + \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right)}{1 + 8 \sin^2 \varphi} \right] \exp(3\beta \operatorname{tg} \varphi) \right\}.$$

O charakterze funkcji $N(\varphi, \beta)$ informuje rys. 4, na którym przedstawiono wykresy zależności N od β dla $\varphi = 0^\circ, 5^\circ, 10^\circ, 20^\circ$. Można stwierdzić, że przy wzroście obciążenia zewnętrznego g (kąt β maleje) wpływ ciężaru własnego ośrodka na kształt zbocza maleje.

Dla $-\beta \cong \frac{\pi}{2} - \varphi$ ($\varphi \leq 20^\circ$), $N = 0$ i profil zbocza stanowi prosta nachylona do osi x pod kątem równym w przybliżeniu kątowi tarcia wewnętrznego φ . Kształt zbocza jest więc w tym przypadku taki sam, jak w rozwiązaniu wyjściowym, kiedy pomija się wpływ sił ciężkości.



Rys. 4



Rys. 5

W przypadku, gdy kąt $\beta = 0$, tzn. gdy profil zbocza ma w punkcie O pionową styczną, obciążenie zewnętrzne g jest wtedy równe wartości $2k \cos \varphi / (1 - \sin \varphi)$ i można rozpatrywać je jako oddziaływanie warstwy ośrodka o wysokości $H = 2k \cos \varphi / \gamma (1 - \sin \varphi)$, w któ-

rej występuje stan sprężysty (por. [1]). Z (7.1) otrzymamy następujący wzór na kształt zbocza

$$(7.3) \quad \eta = \frac{1}{4k} \gamma \xi^2 \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{4} \right).$$

Na rys. 5, w układzie osi zmiennych bezwymiarowych $x' = \frac{\gamma x}{k}$ i $y' = \frac{\gamma y}{k}$, wykreślono kształt zbocza dla $\varphi = 20^\circ$ i 30° oraz $\beta = 0$, a także dla przypadku $\varphi = 30^\circ$ i $\beta = -40^\circ 41'$; linie przerywane odpowiadają rozwiązaniu perturbacyjnemu, linie ciągłe rozwiązaniom numerycznym podanym w pracach [1] i [13]. Dokładność otrzymanego rozwiązania perturbacyjnego (7.1) maleje ze wzrostem wysokości zbocza oraz wartości kąta tarcia φ , rośnie ze wzrostem obciążenia g .

8. Wnioski

Porównanie wyników rozwiązania perturbacyjnego i numerycznego pozwala stwierdzić, że wyprowadzony wzór na kształt zbocza może być zastosowany w inżynierskich obliczeniach stateczności skarp.

Podana przez SPENCERA metoda perturbacji powinna znaleźć szersze zastosowanie przy obliczaniu zadań nośności granicznej. Pozwala ona w sposób stosunkowo nieskomplikowany matematycznie znaleźć przybliżone rozwiązanie w postaci wzoru analitycznego, a uzyskiwana dokładność rozwiązania jest wystarczająca z inżynierskiego punktu widzenia (por. [4, 5, 6, 7]).

Pracę należy traktować jako etap wstępny na drodze uzyskania kompletnych rozwiązań masywów gruntowych w stanie równowagi granicznej.

Literatura cytowana w tekście

1. W. W. SOKOŁOWSKI, *Statyka ośrodków sypkich* (przekł. z ros.), PWN, Warszawa 1958.
2. В. В. СОКОЛОВСКИЙ, *Некоторые формы равнопорочных массивов*, *Механика Твёрдого Тела*, № 2 (1968), 44–51.
3. G. de JOSSELIEN de JONG, *Statics and kinematics in the failable zone of a granular material*, Delft 1959.
4. A. J. M. SPENCER, *Perturbation methods in plasticity—III. Plane strain of ideal soil and plastic solids with body forces*, *J. Mech. Phys. Sol.*, 10 (1962), 165–178.
5. A. J. M. SPENCER, *Perturbation methods in plasticity—I. Plane strain of non-homogeneous plastic solids*, *J. Mech. Phys. Sol.*, 9 (1961), 279–288.
6. A. J. M. SPENCER, *Perturbation methods in plasticity—II. Plane strain of slightly irregular bodies*, *J. Mech. Phys. Sol.*, 10 (1962), 17–27.
7. E. A. MARSHALL, *Rolling contact with plastic deformation*, *J. Mech. Phys. Sol.*, 16 (1968), 243–254.
8. A. J. M. SPENCER, *The approximate solution of certain problems of axially-symmetric plastic flow*, *J. Mech. Phys. Sol.*, 12 (1964), 231–244.
9. R. J. IZBICKI, *Zastosowanie metody perturbacji do analizy plastycznego płynięcia ośrodka typu Coulomba w stanie osiowej symetrii*, *Rozpr. Inżyn.*, 18 (1970).
10. J. W. F. BISHOP, *On the complete solution to problems of deformation of a plastic-rigid material*, *J. Mech. Phys. Sol.*, 2 (1953), 43–53.

11. D. J. F. EWING, R. HILL, *The plastic constraint of V-notched tension bars*, J. Mech. Phys. Sol., 15 (1967), 115-124.
12. D. J. F. EWING, *A series-method for constructing plastic slipline fields*, J. Mech. Phys. Sol., 15 (1967), 105-114.
13. А. И. Говядинов, С. В. Фалькович, *Устойчивость откосов при предельном состоянии равновесия*, Инженерный сборник, 14 (1953), 3-30.

Р е з ю м е

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ НАСЫПЕЙ И ОТКОСОВ В СОСТОЯНИИ ПРЕДЕЛЬНОГО РАВНОВЕСИЯ

В работе рассматриваются симметричные массивные грунтовые сооружения нагруженные на верхней горизонтальной поверхности постоянным нормальным напряжением. Принимается, что среда находится в состоянии предельного равновесия.

Задача об определении напряженного состояния внутри сооружения и формы ската свободного от внешних напряжений решена для верхних областей деформации сооружения с помощью предложенного А. М. Спенсером метода возмущений.

На основе сравнения решения полученного с помощью метода возмущения с численным решением установлено, что выведенная приближенная формула на форму ската может применяться для инженерных расчетов устойчивости откосов.

S u m m a r y

ON THE STABILITY OF THE EMBANKMENTS AND SLOPES IN THE STATE OF LIMIT EQUILIBRIUM

A symmetric heavy soil mass loaded on its upper horizontal surface by a uniform normal load (Figs. 1 and 2) is considered in the paper. The medium is assumed to be in the state of limit equilibrium.

The problem of determination of the stress state within the mass and of the shape of the stress-free slope was solved for the upper region of the mass with the aid of the perturbation method proposed by SPENCER [4].

Comparison of the presented solution and the numerical solution yields the conclusion that the derived approximate formula for the form of the slope can be used in engineering calculations concerning the stability of slopes.

INSTYTUT GEOTECHNIKI
POLITECHNIKI WROCLAWSKIEJ

Praca została złożona w Redakcji dnia 16 stycznia 1970 r.
