MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
1, 7 (1969)

DRGANIA GRUBOŚCIENNEJ RURY PRZY WEWNĘTRZNYM I ZEWNĘTRZNYM PRZEPŁYWIE CIECZY

JACEK SAMBORSKI (WARSZAWA)

Ważniejsze oznaczenia

a, b promień wewnętrzny i zewnętrzny rury,
ϱ gęstość materiału rury,
ϱ_w, ϱ_z gęstość cieczy wewnętrznej i zewnętrznej,
U_w, U_z prędkość niezaburzonego przepływu cieczy wewnętrznej i cieczy otaczającej rurę,
c_w, c_z prędkość propagacji dźwięku w cieczy wewnętrznej i zewnętrznej przy niezaburzonym przepływie,
$V=\dfrac{\omega}{k}$ prędkość fazowa sprężystej fali propagowanej wzdłuż rury,
$c_1=\sqrt{\dfrac{\lambda+2\mu}{\varrho}}$ prędkość fal podłużnych w materiale rury,
$c_2=\sqrt{\dfrac{\lambda}{\varrho}}$ prędkość fal poprzecznych w materiale rury,
λ, μ stałe Lamé'go materiału rury,
$J_n(r), Y_n(r)$ funkcje Bessela n-tego rzędu pierwszego rodzaju,
$I_n(r), K_n(r)$ funkcje Bessela n-tego rzędu drugiego rodzaju,

$$\eta_w=\frac{\varrho_w}{\varrho},\quad \eta_z=\frac{\varrho_z}{\varrho},\quad \xi_w=\frac{c_w}{c_2},\quad \xi_z=\frac{c_z}{c_2}.$$

1. Wstęp

Piśmiennictwo dotyczące zagadnień drgań powłok cylindrycznych w kontakcie z cieczą jest obszerne. Identyczny jak w niniejszej pracy przypadek dla cienkich powłok rozpatrzył BOŁOTIN w swojej pracy [3] i następnie powtórzył w [4]. Drgania grubych powłok cylindrycznych bez cieczy rozwiązali GAZIS [5] i MIRSKY, HERRMANN [6]. GREENSPON [7] zajął się cienkimi i grubymi powłokami zanurzonymi w nieruchomej cieczy z przyłożonym stałym ciśnieniem w środku. Wreszcie prace BOBESZKI ([2] jako kontynuacja [1]) dotyczą analogicznego zagadnienia, jak niniejsza praca, ale bez cieczy zewnętrznej. W odróżnieniu od literatury cytowanej powyżej, w niniejszej pracy uwzględniono przypadek grubej powłoki i ruch obu cieczy: wewnętrznej i zewnętrznej.

W pracy rozważamy drgania własne nieskończenie długiej rury o promieniu wewnętrznym a i zewnętrznym b (wielkości: promień b i grubość rury b-a są tego samego rzędu).

Materiał rury jest liniowo sprężysty. Rurę wewnątrz i zewnątrz opływają dwie ciecze, ściśliwe i nielepkie, o gęstościach odpowiednio ϱ_w i ϱ_z. W dalszym ciągu przyjmujemy nieskończenie małe przemieszczenia punktów rury i liniowe równania ruchu dla cieczy oraz liniowe warunki brzegowe. Przepływ cieczy w stanie spoczynku rury odbywa się ze stałą prędkością równolegle do osi rury.

2. Podstawowe równania zagadnienia

Dla infinitezymalnych odkształceń rury, perturbacja w przepływie wywołana przez odkształcenia rury różni się infinitezymalnie od przepływu ze stałą prędkością U, a potencjał perturbacji φ spełnia zlinearyzowane równanie

$$\nabla^2\varphi - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial}{\partial t} + U\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 \varphi = 0, \tag{2.1}$$

gdzie dla cieczy wewnętrznej należy podstawić: φ_w, c_w, U_w, a dla cieczy zewnętrznej: φ_z, c_z, U_z.

Równania ruchu punktów należących do rury mają postać

$$\mu \operatorname{divgrad} \mathbf{u} + (\lambda+\mu) \operatorname{graddiv} \mathbf{u} = \varrho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}, \qquad \mathbf{u} = \mathbf{u}(u_1, u_2, u_3). \tag{2.2}$$

Przedstawmy wektor przemieszczenia $\mathbf{u}$ w postaci sumy gradientu potencjału skalarnego χ i rotacji bezźródłowego potencjału wektorowego $\boldsymbol{\psi}$

$$\mathbf{u} = \operatorname{grad}\chi + \operatorname{rot}\boldsymbol{\psi}, \qquad \operatorname{div}\boldsymbol{\psi} = 0. \tag{2.3}$$

Wprowadzamy współrzędne cylindryczne x, θ, r (oś x pokrywa się z osią cylindra). Znając potencjały χ i $\boldsymbol{\psi}$, możemy z (2.3) znaleźć pole przemieszczeń punktów rury

$$\begin{aligned} u_x &= u = \frac{\partial\chi}{\partial x} + \frac{\partial\psi_\theta}{\partial r} - \frac{\psi_\theta}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi_r}{\partial\theta}, \\ u_\theta &= v = \frac{1}{r}\frac{\partial\chi}{\partial\theta} + \frac{\partial\psi_\alpha}{\partial r} - \frac{\partial\psi_r}{\partial x}, \\ u_r &= w = \frac{\partial\chi}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial\psi_x}{\partial\theta} + \frac{\partial\psi_\theta}{\partial x}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Przyjmując część liniową tensora odkształcenia Eulera, składowe pola odkształceń i naprężeń zapiszemy w postaci

$$\begin{aligned} &e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad e_{\theta\theta} = \frac{w}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta}, \qquad e_{rr} = \frac{\partial w}{\partial r}, \\ &e_{x\theta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}\right), \quad e_{xr} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial x}\right), \quad e_{r\theta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial\theta}\right), \end{aligned} \tag{2.5}$$

$$\begin{aligned} &\sigma_{xx} = \lambda\Delta + 2\mu e_{xx}, \qquad \sigma_{\theta\theta} = \lambda\Delta + 2\mu e_{\theta\theta}, \qquad \sigma_{rr} = \lambda\Delta + 2\mu e_{rr}, \\ &\sigma_{x\theta} = 2\mu e_{x\theta}, \qquad \sigma_{xr} = 2\mu e_{xr}, \qquad \sigma_{\theta r} = 2\mu e_{\theta r}, \end{aligned} \tag{2.6}$$

gdzie

$$\Delta = (e_{xx}+e_{\theta\theta}+e_{rr}) = \nabla^2\chi = \frac{\partial^2\chi}{\partial x^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\chi}{\partial\theta^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\chi}{\partial r}+\frac{\partial^2\chi}{\partial r^2}. \tag{2.7}$$

Równanie (2.2) jest spełnione, jeśli potencjały χ i ψ spełniają równania falowe

$$\nabla^2\chi-\frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2}=0, \tag{2.8}$$

$$\nabla^2\psi-\frac{1}{c_2^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=0. \tag{2.9}$$

Warunki brzegowe łączące pole prędkości płynącej cieczy wewnętrznej i zewnętrznej i drgającej sprężyście rury są następujące: *warunek kinematyczny*, wymagający by były równe składowe promieniowe prędkości cząstki płynu i cząstki rury na powierzchniach $r = a$ i $r = b$

$$\left.\frac{\partial\varphi_w}{\partial r}\right|_{r=a} = \left.\frac{\partial u_r}{\partial t}\right|_{r=a}+U_w\left.\frac{\partial u_r}{\partial x}\right|_{r=a}, \tag{2.10}$$

$$\left.\frac{\partial\varphi_z}{\partial t}\right|_{r=b} = \left.\frac{\partial u_r}{\partial t}\right|_{r=b}+U_z\left.\frac{\partial u_r}{\partial x}\right|_{r=b}, \tag{2.11}$$

oraz *warunek dynamiczny* zapewniający ciągłość naprężeń na granicy ośrodków

$$\left.\sigma_{rx}\right|_{r=a} = \left.\sigma_{r\theta}\right|_{r=a} = 0, \tag{2.12}$$

$$\left.\sigma_{rr}\right|_{r=a} = \varrho_w\left.\left(\frac{\partial\varphi_w}{\partial t}+U_w\frac{\partial\varphi_w}{\partial x}\right)\right|_{r=a}, \tag{2.13}$$

$$\left.\sigma_{rx}\right|_{r=b} = \left.\sigma_{r\theta}\right|_{r=b} = 0, \tag{2.14}$$

$$\left.\sigma_{rr}\right|_{r=b} = \varrho_z\left.\left(\frac{\partial\varphi_z}{\partial t}+U_z\frac{\partial\varphi_z}{\partial x}\right)\right|_{r=b}. \tag{2.15}$$

3. Rozwiązanie falowe

Dalsze rozważania ograniczamy do rury nieskończenie długiej. Rozwiązania równań (2.1), (2.8) i (2.9) przewidujemy w postaci

$$\begin{aligned}
\varphi_w(r,\theta,x,t) &= f(r)\cos n\theta\sin(\omega t-kx),\\
\varphi_z(r,\theta,x,t) &= p(r)\cos n\theta\sin(\omega t-kx),\\
\chi(r,\theta,x,t) &= g(r)\cos n\theta\cos(\omega t-kx),\\
\psi_x(r,\theta,x,t) &= h_x(r)\sin n\theta\cos(\omega t-kx),\\
\psi_\theta(r,\theta,x,t) &= h_\theta(r)\cos n\theta\sin(\omega t-kx),\\
\psi_r(r,\theta,x,t) &= h_r(r)\sin n\theta\sin(\omega t-kx).
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Przez podstawienie (3.1) do równań (2.1), (2.8) i (2.9) otrzymujemy zwyczajne równania różniczkowe na funkcje $p, f, g, h_1 \equiv h_x, h_\theta - h_r \equiv 2h_2$ oraz $h_\theta + h_r \equiv 2h_3$

$$\begin{aligned}
&B_{n,\alpha r}[f]=0, \qquad B_{n,\delta r}[p]=0, \qquad B_{n,\beta r}[g]=0,\\
&B_{n,\gamma r}[h_1]=0, \qquad B_{n+1,\gamma r}[h_2]=0, \qquad B_{n-1,\gamma r}[h_3]=0,
\end{aligned} \tag{3.2}$$

gdzie

$$B_{n,\varrho} = \frac{d^2}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{d}{d\varrho} - \left(\frac{n^2}{\varrho^2} - 1\right), \tag{3.3}$$

$$\alpha^2 = \frac{(\omega^2 - kU_w)^2}{c_w^2} - k^2; \quad \beta^2 = \frac{\omega^2}{c_1^2} - k^2; \quad \gamma^2 = \frac{\omega^2}{c_2^2} - k^2; \quad \delta^2 = \frac{(\omega - kU_z)^2}{c_z^2} - k^2. \tag{3.4}$$

Ogólne rozwiązanie (3.1) w tym przypadku ma postać

$$\begin{aligned} f(r) &= A_1 Z_n(\alpha r) + A_2 W_n(\alpha r), \\ p(r) &= B_1 Z_n(\delta r) + B_2 W_n(\delta r), \\ g(r) &= C_1 Z_n(\beta r) + C_2 W_n(\beta r), \\ h_1(r) &= D_1 Z_n(\gamma r) + D_2 W_n(\gamma r), \\ h_2(r) &= E_1 Z_{n+1}(\gamma r) + E_2 W_{n+1}(\gamma r), \\ h_3(r) &= F_1 Z_{n-1}(\gamma r) + F_2 W_{n-1}(\gamma r), \end{aligned} \tag{3.5}$$

gdzie Z_n oznacza I_n lub J_n, a W_n oznacza K_n lub Y_n zgodnie z układem (w zależności czy: α, β, γ lub δ są urojone czy rzeczywiste)

$$\begin{array}{lccccc} & |\omega - kU_w| < kc_w & & I_n(\alpha r) & & \\ & kc_w < |\omega - kU_w| & & J_n(\alpha r) & & \\ & \omega < kc_2 & I_n(\beta r) & K_n(\beta r) & I_n(\gamma r) & K_n(\gamma r) \\ (3.6) & kc_2 < \omega < kc_1 & I_n(\beta r) & K_n(\beta r) & J_n(\gamma r) & Y_n(\gamma r) \\ & kc_1 < \omega & J_n(\beta r) & Y_n(\beta r) & J_n(\gamma r) & Y_n(\gamma r) \\ & |\omega - kU_z| < kc_z & & K_n(\delta r) & & \\ & kc_z < |\omega - kU_z| & & Y_n(\delta r) & & \end{array}$$

Ponieważ $f(r)$ musi być ograniczone dla $r = 0$, a $p(r) = 0$ dla $r = \infty$, więc będzie: $A_2 = B_1 = 0$. Na podstawie $(2.3)_2$, każda z funkcji h_i $(i = 1, 2, 3)$ może być przedstawiona w postaci kombinacji dwóch pozostałych, więc przyimując $h_3 = 0$ mamy: $h_x = h_1$, $h_\theta = h_2$, $h_r = -h_2$.

Pola przemieszczeń, odkształceń i naprężeń mogą więc być przedstawione w następującej postaci:

$$\begin{aligned} u_x &= u = \left(kg - h_2' - \frac{1}{r} h_2 - \frac{n}{r} h_2\right)\cos n\theta \sin(\omega t - kx), \\ u_\theta &= v = \left(-\frac{n}{r} g + h_1' - kh_2\right)\sin n\theta \cos(\omega t - kx), \\ u_r &= w = \left(g' - h_1 \frac{n}{r} - kh_2\right)\cos n\theta \cos(\omega t - kx), \\ e_{xr} &= \frac{1}{2}\left[2kg' - h_2'' - \frac{1}{r}\left(h_2' - \frac{1}{r} h_2\right) - \frac{nk}{r} h_1 - k^2 h_2\right]\cos n\theta \sin(\omega t - kx), \\ e_{r\theta} &= \frac{1}{2}\left[-\frac{2n}{r}\left(g' - \frac{g}{r}\right) + h_1'' - kh_2' - \frac{h_1'}{r} + \frac{n^2}{r^2} h_1 + \frac{n+1}{r} kh_2\right]\sin n\theta \cos(\omega t - kx), \end{aligned} \tag{3.7}$$

$$e_{rr} = \left[g'' - \frac{n}{r}\left(h_1' - \frac{h_1}{r}\right) - kh^2\right]\cos n\theta\cos(\omega t - kx),$$

$$\sigma_{xr} = 2\mu e_{xr} = \mu\left[2kg' - h_2'' - \frac{1}{r}\left(h_2' - \frac{1}{r}h_2\right) - \frac{nk}{r}h_1 - k^2h_2\right]\cos n\theta\sin(\omega t - kx),$$

$$\sigma_{r\theta} = 2\mu e_{r\theta} = \mu\left[-\frac{2n}{r}\left(g' - \frac{g}{r}\right) + h_1'' - kh_2' - \frac{h_1}{r} + \frac{n^2h_1}{r^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{n+1}{r}kh_2\right]\sin n\theta\cos(\omega t - kx),$$

$$\sigma_{rr} = 2\mu e_{rr} + \lambda\nabla^2\chi =$$

$$= \left\{\left[g'' - \frac{n}{r}\left(h_1' - \frac{h_1}{r}\right) - kh_2'\right]2\mu - \lambda(\beta^2 + k^2)g\right\}\cos n\theta\cos(\omega t - kx),$$

gdzie primy oznaczają różniczkowanie względem r.

Wykorzystując warunki brzegowe (2.10—2.15) otrzymujemy jednorodny układ ośmiu równań na stałe A_1, B_2, C_1, C_2, D_1, D_2, E_1, E_2. Układ ten ma zawsze trywialne rozwiązanie $A_1 = B_2 = \ldots = E_2 = 0$, odpowiadające niezaburzonemu przepływowi cieczy i spoczynkowi rury. Przy pewnych warunkach możliwy jest jednak stan zaburzony odpowiadający przypadkowi, gdy nie wszystkie stałe są równe zeru. Warunkiem istnienia rozwiązania niezerowego jest, aby wyznacznik charakterystyczny tego układu był równy zero. Z równań powstałych z wykorzystania warunków (2.10) i (2.11) wyznaczono A_1 i B_2 w zależności od pozostałych stałych, a następnie podstawiono w ten sposób otrzymane wyrażenia na A_1 i B_2 do pozostałych sześciu równań, dzięki czemu obniżono stopień wyznacznika do sześciu. W oparciu o wzory rekurencyjne dla funkcji Bessela, warunek istnienia rozwiązań niezerowych można ostatecznie zapisać jako

(3.8) $$|C_{ij}| = 0. \quad (i, j = 1, 2, \ldots, 6),$$

gdzie

$$C_{11} = \{2n(n-1) - a^2[(\gamma^2 - k^2) + 2\beta^2(\lambda_2 - 1)]\}Z_n(\beta a) + 2\lambda_2\beta a Z_{n+1}(\beta a) +$$

$$+ \eta_w \xi_w^2 a^2(\alpha^2 + k^2)\frac{nZ_n(\beta a) - \lambda_2\beta a Z_{n+1}(\beta a)}{nZ_n(\alpha a) - \lambda_1\alpha a Z_{n+1}(\alpha a)} Zn(\alpha a),$$

$$C_{12} = 2\gamma k a^2 Z_n(\gamma a) - 2(n+1)ka Z_{n+1}(\gamma a) +$$

$$+ \eta_w \xi_w^2 a^2(\alpha^2 + k^2)\frac{ka Z_{n+1}(\gamma a)}{nZ_n(\alpha a) - \lambda_1\alpha a Z_{n+1}(\alpha a)} Z_n(\alpha a),$$

(3.9) $$C_{13} = 2n(n-1)Z_n(\gamma a) - 2n\lambda_3\gamma a Z_{n+1}(\gamma a) +$$

$$+ \eta_w \xi_w^2 a^2(\alpha^2 + k^2)\frac{nZ_n(\gamma a)}{nZ_n(\alpha a) - \lambda_1\alpha a Z_{n+1}(\alpha a)} Z_n(\alpha a),$$

$$C_{14} = \{2n(n-1) - a^2[(\gamma^2 - k^2) + 2\beta^2(\lambda_2 - 1)]\}W_n(\beta a) + 2\beta a W_{n+1}(\beta a) +$$

$$+ \eta_w \xi_w^2 a^2(\alpha^2 + k^2)\frac{nW_n(\beta a) - \beta a W_{n+1}(\beta a)}{nZ_n(\alpha a) - \lambda_1\alpha a Z_{n+1}(\alpha a)} Z_n(\alpha a),$$

$$C_{15} = 2\lambda_3\gamma ka^2W_n(\gamma a) - 2ka(n+1)W_{n+1}(\gamma a) + $$
$$+\eta_w\xi_w^2a^2(\alpha^2+k^2)\frac{kaW_{n+1}(\gamma a)}{nZ_n(\alpha a)-\lambda_1\alpha aZ_{n+1}(\alpha a)}Z_n(\alpha a),$$
$$C_{16} = 2n(n-1)W_n(\gamma a) - 2n\gamma aW_{n+1}(\gamma a) +$$
$$+\eta_w\xi_w^2a^2(\alpha^2+k^2)\frac{nW_n(\gamma a)}{nZ_n(\alpha a)-\lambda_1\alpha aZ_{n+1}(\alpha a)}Z_n(\alpha a),$$
$$C_{21} = -2n(n-1)Z_n(\beta a)+2n\lambda_2\beta aZ_{n+1}(\beta a),$$
$$C_{22} = \gamma ka^2Z_n(\gamma a)-2(n+1)kaZ_{n+1}(\gamma a),$$
$$C_{23} = -[2n(n+1)-(2\lambda_3-1)\gamma^2a^2]Z_n(\gamma a)-2\lambda_3\gamma aZ_{n+1}(\gamma a),$$
$$C_{24} = -2n(n-1)W_n(\beta a)+2n\beta aW_{n+1}(\beta a), \tag{3.9}$$
$$C_{25} = \lambda_3\gamma ka^2W_n(\gamma a)-2(n+1)kaW_{n+1}(\gamma a),$$
$$C_{26} = -[2n(n-1)-(2\lambda_3-1)\gamma^2a^2]W_n(\gamma a)-2\gamma aW_{n+1}(\gamma a),$$
$$C_{31} = 2nkaZ_n(\beta a)-2\lambda_2\beta ka^2Z_{n+1}(\beta a),$$
$$C_{32} = -(\gamma^2-k^2)a^2Z_{n+1}(\gamma a)+n\gamma aZ_n(\gamma a),$$
$$C_{33} = nkaZ_n(\gamma a),$$
$$C_{34} = 2nkaW_n(\beta a)-2\beta ka^2W_{n+1}(\beta a),$$
$$C_{35} = \lambda_3n\gamma aW_n(\gamma a)-(\gamma^2-k^2)a^2W_{n+1}(\gamma a),$$
$$C_{36} = nkaW_n(\gamma a).$$

Pozostałe współczynniki (od C_{41} do C_{66}) będą miały analogiczną postać (C_{41} jak C_{11}, C_{42} jak C_{12} itd), z tym, że należy zastąpić

$$\eta_w \to \eta_z, \quad \xi_w \to \xi_z, \quad a \to b, \quad Z_n(\alpha r) \to W_n(\delta r), \quad \alpha \to \delta,$$

a mianownik $[nZ_n(\alpha a)-\lambda_1\alpha aZ_{n+1}(\alpha a)]$ zastąpić mianownikiem $[nW_n(\delta b)-\delta bW_{n+1}(\delta b)]$. Wielkości λ_i $(i = 1, 2, 3)$ przyjmują wartości $+1$ lub -1 (w zależności czy α, β, γ są rzeczywiste czy urojone), zgodnie z tabelą

$$\begin{array}{lll}
\alpha \text{ urojone} & \to I_n(\alpha r) & \lambda_1 = -1, \\
\alpha \text{ rzeczywiste} & \to J_n(\alpha r) & \lambda_1 = 1, \\
\beta \text{ urojone} & \to I_n(\beta r),\ K_n(\beta r) & \lambda_2 = -1, \\
\beta \text{ rzeczywiste} & \to J_n(\beta r),\ Y_n(\beta r) & \lambda_2 = 1, \\
\gamma \text{ urojone} & \to I_n(\gamma r),\ K_n(\gamma r) & \lambda_3 = -1, \\
\gamma \text{ rzeczywiste} & \to J_n(\gamma r),\ Y_n(\gamma r) & \lambda_3 = 1.
\end{array} \tag{3.10}$$

U w a g a: W pracy BOBESZKI [2] popełniono pomyłkę rachunkową przy obliczaniu współczynników C_{ij}, pomyłkę tę powtórzono prawdopodobnie za pracą GAZISA [5]. W C_{11}, C_{41}, C_{14} i C_{44} zamiast (γ^2-1) winno być: $[(\gamma^2-1)+2\beta^2(\lambda_2-1)]$, a w C_{23}, C_{26}, C_{53} i C_{56} wyrażenie $\gamma^2k^2a^2$ winno być pomnożone przez $(2\lambda_3-1)$.

4. Rozwiązania szczególne

Równanie (3.8) opisuje związki dyspersyjne dla grubościennej rury opływanej wewnątrz i na zewnątrz przez płyny. W szczególnych przypadkach ten bardzo skomplikowany warunek znacznie się upraszcza.

W przypadku fali stojącej ($k = 0$) wyznacznik redukuje się do iloczynu dwóch podwyznaczników

$$D_1 D_2 = 0, \tag{4.1}$$

gdzie

$$D_1 = \begin{vmatrix} C_{11} & C_{13} & C_{14} & C_{16} \\ C_{21} & C_{23} & C_{24} & C_{26} \\ C_{41} & C_{43} & C_{44} & C_{46} \\ C_{51} & C_{53} & C_{54} & C_{56} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} C_{32} & C_{35} \\ C_{62} & C_{65} \end{vmatrix}. \tag{4.2}$$

Rozwiązania niezerowe istnieją, jeśli przynajmniej jeden z podwyznaczników jest równy zeru. Przy $D_1 = 0$ stan odkształcenia jest płaski, przy $D_2 = 0$ zachodzą podłużne drgania ścinające (oba rodzaje drgań niezależne od x).

W przypadku fal osiowo-symetrycznych ($n = 0$) warunek istnienia rozwiązań niezerowych (3.8) redukuje się do

$$D_3 D_4 = 0, \tag{4.3}$$

gdzie

$$D_3 = \begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{14} & C_{15} \\ C_{31} & C_{32} & C_{34} & C_{35} \\ C_{41} & C_{42} & C_{44} & C_{45} \\ C_{61} & C_{62} & C_{64} & C_{65} \end{vmatrix}, \quad D_4 = \begin{vmatrix} C_{23} & C_{26} \\ C_{53} & C_{56} \end{vmatrix}. \tag{4.4}$$

Przy $D_3 = 0$ powstają fale podłużne osiowo-symetryczne (tylko przemieszczenia u_r i u_x). Jeśli $D_4 = 0$, to przypadek fal skrętnych (tylko przemieszczenia u_θ).

Literatura cytowana w tekście

1. A. BOBESZKO, *Sprężyste fale giętne w nieskończonej rurze przy przepływie płynu nieściśliwego*, Rozpr. Inżyn. 1, **11** (1963).
2. A. BOBESZKO, *Flexural elastic waves in infinite tube containing flowing a compressible fluid, according to the exact theory of elasticity*, Arch. Mech. Stos., 1, **16** (1964).
3. В. В. БОЛОТИН, *Колебания и устойчивость упругой цилиндрической оболочки в потоке сжимаемой жидкости*, Инж. Сб. 24, 1956.
4. В. В. БОЛОТИН, *Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости*, Москва 1961.
5. D. C. GAZIS, *Three-dimensional investigation of the propagation of waves in hollow circular cylinders*, JASA, 5, **31** (1959).
6. I. MIRSKY, G. HERRMANN, *Axially symmetric motions of thick cylindrical shells*, J. Appl. Mech., 1, **25** (1958).
7. J. E. GREENSPON, *Vibrations of thick and thin cylindrical shells surrounded by water*, JASA, 10, **33** (1961).

Р е з ю м е

КОЛЕБАНИЯ ТОЛСТОСТЕННОЙ ТРУБЫ ОБТЕКАЕМОЙ ВНУТРИ И СНАРУЖИ ЖИДКОСТЬЮ

В работе рассмотрены собственные колебания бесконечной, упругой толстостенной трубы. Труба обтекается внутри и снаружи двумя различными сжимаемыми и невязкими жидкостями. Предполагается, что обе жидкости текут в невозмущенном состоянии трубы параллельно её оси. Сверх того, считается, что перемещения в трубе бесконечно малы и можно принять линеаризованные уравнения движения жидкости и линейные краевые условия. Окончательное решение задачи дано в виде дисперсионных соотношений. Рассмотрены два частных случая: осесимметрические колебания и волны независимые от координаты вдоль оси трубы.

S u m m a r y

VIBRATIONS OF A THICK-WALLED TUBE IN INTERNAL AND EXTERNAL FLOWS OF FLUIDS

Vibrations of infinitely long, elastic and thick-walled tube are considered. The tube is assumed to be in two flows – internal and external – of two different but both compressible and non-viscous fluids. In addition, in the case of the tube in rest, both flows are assumed to be uniform with velocity parallel to the tube. Moreover, infinitesimal displacements of the tube as well as linear equations of fluids motion and linear boundary conditions are applied. The final solution of the problem in question is presented in the form of dispersion relations. The paper is illustrated by two cases: of axially symmetric vibrations and infinite wavelengths.

ZAKŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGŁYCH
INSTYTUTU PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 5 czerwca 1968 r.