

ANALIZA UKŁADU WIBRO-UDERZENIOWEGO Z NIELINIOWĄ CHARAKTERYSTYKĄ SPRĘŻYSTĄ

ZBIGNIEW WIŚNIEWSKI (GDAŃSK)

Wykaz ważniejszych oznaczeń

- S pole powierzchni dna tłoka elementu sprężystego,
- l maksymalna odległość pomiędzy dnem tłoka a dnem cylindra,
- p_0 ciśnienie w przestrzeni sprężania przy $X = l$,
- κ wykładnik adiabaty,
- X przemieszczenie masy drgającej,
- \dot{X} prędkość masy drgającej,
- \ddot{X} przyspieszenie masy drgającej,
- x bezwymiarowe przemieszczenie,
- \dot{x} bezwymiarowa prędkość,
- \ddot{x} bezwymiarowe przyspieszenie,
- t czas,
- ω częstość siły wymuszającej,
- φ kąt przesunięcia fazowego pomiędzy siłą wymuszającą i przemieszczeniem,
- R współczynnik restytucji,
- V prędkość uderzenia masy drgającej o ogranicznik,
- v bezwymiarowa prędkość uderzenia,
- X_0 luz pomiędzy częścią uderzającą a ogranicznikiem,
- x_0 luz bezwymiarowy,
- F_0 amplituda siły wymuszającej,
- Q ciężar masy drgającej,
- n stosunek okresu ruchu do okresu siły wymuszającej.

1. Wprowadzenie

Jednym z kierunków prac nad rozwojem konstrukcji wibro-uderzeniowych urządzeń do pogrążania pali (tzw. wibromłotów) były badania układów z nieliniowymi elementami sprężystymi. Celem zastosowania takich elementów było uzyskanie możliwości regulacji częstości uderzeń, co mieć może istotne znaczenie dla poprawy efektywności pracy wibromłotów.

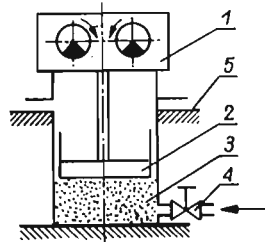
Bardzo obszerna bibliografia dotycząca układów wibro-uderzeniowych dotyczy w zasadzie jedynie takich układów, które opisane są liniowymi (w przedziale czasu między uderzeniami) równaniami. Metody stosowane do badania takich układów nie dadzą się zastosować w przypadkach, gdy w równaniach ruchu występują elementy nieliniowe.

W niniejszej pracy rozważa się możliwość badania ruchu układu wibro-uderzeniowego z nieliniową charakterystyką sprężystą za pomocą znanych przybliżonych metod analitycznych oraz pewną metodą numeryczną zaproponowaną przez autora.

2. Sformułowanie zagadnienia

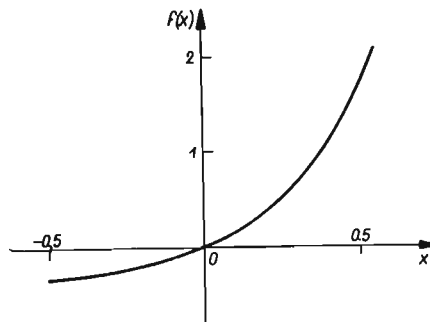
Badać będziemy układ wibro-uderzeniowy zawierający element sprężysty posiadający tę własność, że umożliwia on zmianę sztywności, a więc pośrednio i częstości uderzeń układu w sposób ciągły.

Schemat elementu sprężystego przedstawiono na rys. 1. Do wibratora 1 zamocowano



Rys. 1

tłok 2 poruszający się w cylindrze 3 połączonym sztywno z nieruchomym ogranicznikiem. Do przestrzeni między tłokiem a cylindrem dostarcza się poprzez zawór 4 powietrze. Gdy zawór jest zamknięty, tłok poruszając się w kierunku dna cylindra, spręża powietrze, którego warstwa znajdująca się między tłokiem a dnem cylindra tworzy sprężyste zawieszenie masy zamocowanej do tłoka. Ruch tłoka wymuszany jest siłą wywołaną przez obrót niewyważonych mas wibratora bezwładnościowego.



Rys. 2

Gdy siła wymuszająca i ciśnienie powietrza są odpowiednio dobrane, ruch tłoka ma charakter oscylacyjny, a przy dostatecznie dużej amplitudzie drgań następują zderzenia masy drgającej z ogranicznikiem na powierzchni 5.

Przy założeniu, że zmiana ciśnienia i objętości powietrza ma charakter adiabaticzny, zależność siły sprężystej od położenia tłoka (rys. 2) określa związek

$$(2.1) \quad N = Sp_0 \left[\left(1 - \frac{X}{l} \right)^{-\alpha} - 1 \right].$$

Rozpatrzmy ruch masy drgającej, zawieszonyj na opisanym wyżej elemencie sprężystym, przy następujących założeniach:

1) możliwe są drgania okresowe o okresie równym okresowi siły wymuszającej lub jego krotności;

2) drgania wymuszone są siłą harmoniczną skierowaną wzdłuż osi tłoka elementu sprężystego, przy czym częstość siły wymuszającej jest stała w ciągu cyklu ruchu;

3) uderzenia masy drgającej o ogranicznik zachodzą w przedziale czasu małym w porównaniu z okresem ruchu;

4) zderzenie charakteryzuje się współczynnikiem restytucji $0 < R < 1$, który zależy wyłącznie od rodzaju materiałów zderzających się części;

5) masa ogranicznika jest nieskończenie wielka i nie bierze udziału w drganiach;

6) w przedziale czasu między uderzeniami na układ nie działają żadne siły oporu;

7) nie występują wzajemne oddziaływania układu i źródła energii;

8) masa drgająca skupiona jest w środku masy, przy czym ruch mas wibratora nie wpływa na położenie środka masy;

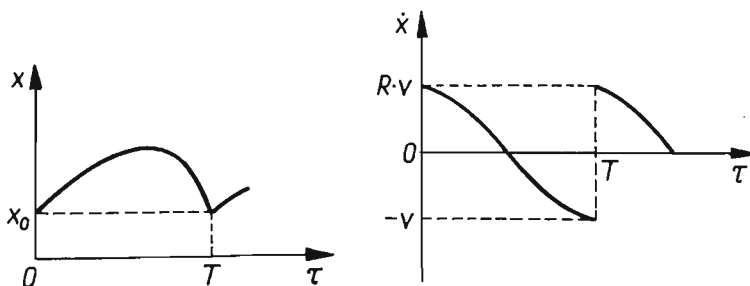
9) wszystkie parametry układu mają charakter zdeterminowany. Zgodnie z powyższymi założeniami ruch układu opisywać będzie równanie

$$(2.2) \quad \frac{Q}{g} \ddot{X} + Sp_0 \left[\left(1 - \frac{X}{l} \right)^{-\alpha} - 1 \right] = F_0 \cos(\omega t + \varphi).$$

Warunki okresowości ruchu mają postać (rys. 3)

$$(2.3) \quad X(0) = X_0 \quad X\left(\frac{2\pi}{\omega} n\right) = x_0,$$

$$X(0) = RV \quad X\left(\frac{2\pi}{\omega} n\right) = -V.$$



Rys. 3

Charakterystykę sprężystą (2.1) aproksymować można wielomianem szóstego stopnia dla $\frac{x}{l} \in [0 \div 0,8]$.

W pierwszej fazie analizy ruchu układu ograniczymy się do badania charakterystyki w postaci wielomianu trzeciego stopnia.

Otrzymamy więc

$$(2.4) \quad N(X) = A^2X + BX^3.$$

Wprowadzając podstawienia

$$(2.5) \quad X = \frac{F_0g}{Q\omega^2}x; \quad \tau = \omega t,$$

otrzymamy równanie ruchu we współrzędnych bezwymiarowych

$$(2.6) \quad \ddot{x} + a^2x + bx^3 = \cos(\tau + \varphi),$$

gdzie

$$(2.7) \quad a^2 = \frac{Sp_0A^2g}{Q\omega^2}; \quad b = \frac{Sp_0BF_0^2g^3}{Q^3\omega^2}.$$

Warunki okresowości przybiorą teraz postać

$$(2.8) \quad \begin{aligned} x(0) &= x_0, & x(2\pi n) &= x_0, \\ \dot{x}(0) &= Rv, & \dot{x}(2\pi n) &= -v, \end{aligned}$$

przy czym oznaczono

$$v = \frac{F_0g}{Q\omega}V.$$

3. Wybór metody rozwiązania

Znane metody rozwiązywania równań różniczkowych nieliniowych nie są w pełni ogólne, odnoszą się bowiem do pewnych określonych klas zagadnień. Badanie układów silnie nieliniowych prowadzi się w zasadzie wyłącznie metodami numerycznymi, gdyż przybliżone metody analityczne odnoszą się przeważnie do układów słabo nieliniowych.

Stosowanie metody numerycznej do badanego układu wibro-uderzeniowego wymaga znajomości warunków początkowych, których w rozpatrywanym przypadku nie znamy, ponieważ warunki początkowe odpowiadające rozwiązaniu spełniającemu warunki okresowości są funkcją parametrów układu [2, 3].

Na przykładzie dwóch typowych metod badania układów nieliniowych wykazemy, że z uwagi na specyficzne cechy układów wibro-uderzeniowych należy poszukiwać nowych metod.

3.1. Metoda kolejnych przybliżeń. Metoda kolejnych przybliżeń stosowana jest zwykle do równań zawierających nieliniowość w postaci wielomianu [1].

Jako pierwszy krok przybliżenia przyjmiemy całkę równania

$$(3.1) \quad \ddot{x}_1 + a^2x_1 = \cos(\tau + \varphi)$$

z warunkami okresowości (2.8).

Rozwiązanie takiego zagadnienia dla $a \neq 1$ podano w pracy [2]. Mamy więc

$$(3.2) \quad X_1(\tau) = A \cos(a\tau + \psi) + \frac{1}{a^2 - 1} \cos(\tau + \varphi)$$

przy czym oznaczono

$$(3.3) \quad A = \frac{v(1+R)}{2a} \frac{1}{\sin \pi a}; \quad \psi = -\pi a$$

$$\sin \varphi = (a^2 - 1) \frac{v(1-R)}{2}; \quad \cos \varphi = (a^2 - 1) \left[x_0 - \frac{v(1+R) \operatorname{ctg} \pi n a}{2a} \right],$$

$$v = \frac{2}{1-R} \frac{x_0 f + \sqrt{\frac{1+f^2}{(a^2-1)^2} - x_0^2}}{1+f^2}; \quad f = \frac{1+R}{1-R} \frac{\operatorname{ctg} \pi n a}{a}.$$

W drugim kroku iteracji podstawiamy do równania (2.6) związek (3.2)

$$(3.4) \quad \ddot{x}_2 + a^2 x_2 = \cos(\tau + \varphi) - b x_1^3(\tau),$$

a stąd po przekształceniach otrzymujemy

$$(3.5) \quad \ddot{x} + a^2 x_2 = A_1 \cos(\tau + \varphi) - A_2 \cos(a\tau + \psi) - A_3 \cos 3(\tau + \varphi) - A_4 \cos 3(a\tau + \psi) -$$

$$- A_5 \cos \alpha - A_6 \cos \beta - A_7 \cos \gamma - A_8 \cos \delta,$$

gdzie

$$(3.6) \quad A_1 = 1 - \frac{3b}{(a^2-1)^3} - \frac{3bA^2}{2(a^2-1)}; \quad A_2 = 3b \left[\frac{A^3}{4} - \frac{A}{2(a^2-1)} \right];$$

$$A_3 = \frac{b}{4(a^2-1)^3}; \quad A_4 = \frac{bA^3}{4}; \quad A_5 = A_6 = \frac{3A^2b}{4(a^2-1)};$$

$$A_7 = A_8 = \frac{3Ab}{4(a^2-1)^2};$$

$$\alpha = \varphi + 2\psi + (2a+1)\tau; \quad \beta = (2a-1)\tau + 2\psi - \varphi;$$

$$\gamma = (a+2)\tau + \psi + 2\varphi; \quad \delta = (2-a)\tau + 2\varphi - \psi.$$

Całka ogólna równania (3.5) ma postać

$$(3.7) \quad x_2 = A \cos(a\tau + \psi) + C_1 \cos(\tau + \varphi) - C_2 \tau \sin(a\tau + \psi) + C_3 \cos 3(\tau + \varphi) +$$

$$+ C_4 \cos 3(a\tau + \psi) + C_5 \cos \alpha + C_6 \cos \beta + C_7 \cos \gamma + C_8 \cos \delta,$$

gdzie

$$(3.8) \quad C_1 = \frac{A_1}{a^2-1}; \quad C_2 = \frac{A_2}{2a}; \quad C_3 = \frac{A_3}{9-a^2}; \quad C_4 = \frac{A_4}{8a^2};$$

$$C_5 = \frac{A_5}{1+4a+3a^2}; \quad C_6 = \frac{A_6}{3a^2-4a+1}; \quad C_7 = \frac{A_7}{4(a+1)};$$

$$C_8 = \frac{A_8}{4(1-a)}.$$

Podstawiając do (3.7) warunki okresowości (2.8) otrzymujemy układ czterech równań dla wyznaczenia stałych: A , v , ψ , φ :

$$(3.9) \quad \left\{ \begin{array}{l} A \cos \psi + C_1 \cos \varphi - C_2 \sin \psi + C_3 \cos 3\varphi + C_4 \cos 3\psi + C_5 \cos(\varphi + 2\psi) + \\ \quad + C_6 \cos(2\psi - \varphi) + C_7 \cos(\varphi + 2\psi) + C_8 \cos(2\varphi - \psi) = x_0; \\ -A \sin \psi - C_1 \sin \varphi - C_2 \cos \psi - 3C_3 \sin 3\varphi - 3C_4 \sin 3\psi - \\ \quad - (1+2a)C_5 \sin(\varphi + 2\psi) - (2a-1)C_6 \sin(2\psi - \varphi) - (a+2)C_7 \sin(\psi + 2\varphi) - \\ \quad - (2-a)C_8 \sin(2\varphi - \psi) = Rv; \\ A \cos(2\pi na + \psi) + C_1 \cos \varphi - C_2 \sin(2\pi na + \psi) + C_3 \cos 3\varphi + C_4 \cos 3(2\pi na + \psi) + \\ \quad + C_5 \cos[\varphi + 2(2\pi na + \psi)] + C_6 \cos[2(2\pi na + \psi) - \varphi] + C_7 \cos(2\pi na + \psi + \varphi) + \\ \quad + C_8 \cos(2\varphi - 2\pi na - \psi) = x_0; \\ -A \sin(2\pi na + \psi) - C_1 \sin \varphi - C_2(2\pi na + \psi) - 3C_3 \sin 3\varphi - \\ \quad - 3C_4 \sin 3(2\pi na + \psi) - (1+2a)C_5 \sin[\varphi + 2(2\pi na + \psi)] - \\ \quad - (2a-1)C_6 \sin[2(2\pi na + \psi) - \varphi] - (a+2)C_7 \cos(2\pi na + \psi + 2\varphi) - \\ \quad - (2-a)C_8 \sin(2\varphi - 2\pi na - \psi) = -v. \end{array} \right.$$

Równania (3.9) są równaniami przestępnymi.

Rozwiązanie tego układu wymaga, jak wykazała wstępna analiza, około 20 godzin ciągłej pracy maszyny cyfrowej o nominalnej szybkości 200 elementarnych operacji na sekundę. Ponieważ jednak nie ma pewności, czy drugi krok iteracji będzie wystarczająco dokładnym przybliżeniem rozwiązania, zaś następny krok wymagałby nieporównanie bardziej pracochłonnych obliczeń, można stwierdzić, że metoda kolejnych przybliżeń nie prowadzi do pozytywnych wyników.

3.2. Metoda linearyzacji. Spośród wielu wariantów metody linearyzacji do badania układów silnie nieliniowych można stosować jedynie metodę PANOWKO [4], opartą na kryterium energetycznym.

Charakterystykę elementu sprzężystego określoną funkcją

$$(3.10) \quad f(x) = a^2 x + b x^3$$

zastępujemy przez wyrażenie

$$f^*(x) = \alpha^2(x + \Delta)$$

gdzie $\Delta = \frac{x_0 + L}{2}$, zaś L — maksymalne wychylenie masy drgającej od położenia równowagi.

Oznaczmy $r(x) = f(x) - \alpha^2(x + \Delta)$,

oraz $m(x) = (x + \Delta)r(x)$.

Wartość współczynnika α^2 wyznaczmy przyjmując kryterium najmniejszej różnicy między charakterystyką (3.10), a charakterystyką układu zlinearyzowanego.

Warunek ten sformułujemy następująco

$$(3.11) \quad I = \int_{x_0}^L m^2(x) dx = \min.$$

Aby całka (3.11) osiągnęła minimum, musi być

$$\frac{\partial I}{\partial(\alpha^2)} = 0,$$

a stąd

$$(3.12) \quad \alpha^2 = \frac{\int_{x_0}^L f(x)(x+\Delta)^3 dx}{\int_{x_0}^L (x+L)^4 dx}.$$

Oznaczając licznik prawej strony związku (3.12) przez I_1 , zaś mianownik przez I_2 , otrzymujemy

$$(3.13) \quad \begin{aligned} I_1 = & \frac{713}{1120} bL^7 + \frac{133}{160} bx_0L^6 + \frac{162a^2 + 69bx_0^2}{160} L^5 + \frac{x_0}{16} \left(17a^2 + \frac{3}{2}bx_0^2 \right) L^4 + \\ & + \frac{3}{8}x_0^2 \left(a^2 - \frac{3}{4}bx_0^2 \right) L^3 - \frac{x_0^3}{4} \left(a^2 + \frac{69}{40}bx_0^2 \right) L^2 - \frac{x_0^4}{16} \left(\frac{133}{10}bx_0^2 + 17a^2 \right) L - \\ & - \frac{x_0^5}{80} \left(\frac{713}{14}bx_0^2 + 81a^2 \right), \\ I_2 = & 242L^5 + 390L^4x_0 + 180L^3x_0^2 + 180L^2x_0^3 - 390Lx_0^4 - 242x_0^5. \end{aligned}$$

Podstawiając wyrażenia (3.13) do (3.12) otrzymujemy zależność wiążącą współczynnik linearyzowanej charakterystyki α^2 oraz amplitudę L . Ponieważ jednak wartość L nie jest znana, do wyznaczenia L konieczne jest dodatkowe równanie.

Aby bezwymiarowe przemieszczenie masy drgającej osiągnęło wartość maksymalną

$$(3.14) \quad x(\tau, \alpha) = L$$

musi być spełniony warunek

$$(3.15) \quad \dot{x}(\tau, \alpha) = 0.$$

Jeśli $\tau = \tau_i$ będzie pierwiastkiem równania (3.15) oraz jeśli spełniony będzie warunek

$$\ddot{x}(\tau_i, \alpha) < 0,$$

to związek (3.14) określać będzie maksimum lokalne przemieszczenia x .

Jednakże równanie (3.15) zawiera nieznaną wartość α , a zatem nie możemy wyznaczyć jego pierwiastków.

Zastosujemy więc następujący sposób postępowania:

1) dla przyjętej wartości $\tau = \tau_i$ wyznaczymy z równania (3.15) odpowiednie wartości $\alpha = \alpha_i$;

2) parę liczb $(\alpha_i; \tau_i)$ podstawimy do (3.14) i obliczymy odpowiadającą wartość $x = x_i$;

3) powtarzając czynności wymienione w p. 1) i 2) dla szeregu wartości τ_i z przedziału $[0; 2\pi n]$ otrzymamy ciąg par wartości $(x_i; \tau_i)$, przy czym jedna z tych wartości x_i jest przybliżeniem amplitudy L ;

4) w układzie współrzędnych (α, x) kreślimy przebieg zależności określonej związkiem (3.12) oraz zależności $\alpha(L)$.

Punkt przecięcia się tych dwóch linii wyznacza szukaną parę wartości (α, L) . Łatwo udowodnić, że istnieje jeden i tylko jeden punkt przecięcia tych linii (tylko jedna wartość współczynnika α spełniającego warunki linearyzacji).

Linearyzując równanie (2.6) zastępujemy je równaniem

$$(3.16) \quad \ddot{x} + \alpha^2 x = \cos(\tau + \varphi),$$

którego całka [5] ma postać ($n = 1$):

$$(3.17) \quad x = \frac{v(1+R)}{2\alpha} [\operatorname{ctg} \pi \alpha (\cos \alpha \tau - \cos \tau) + \sin \alpha \tau] + x_0 \cos \tau - \frac{v(1-B)}{2} \sin \tau,$$

zaś pochodna

$$(3.18) \quad \dot{x} = \frac{v(1+R)}{2} \left[\operatorname{ctg} \pi \alpha \left(\frac{1}{\alpha} \sin \tau - \sin \alpha \tau \right) + \cos \alpha \tau \right] - x_0 \sin \tau - \frac{v(1-R)}{2} \cos \tau.$$

Zrealizowanie wyżej opisanego postępowania wiąże się z dwiema zasadniczymi trudnościami:

1) koniecznością wielokrotnego rozwiązywania układu równań przestępnych o złożonej formie, co wymaga stosowania odpowiednio szybkiej maszyny cyfrowej;

2) sprawdzeniem poprawności rozwiązania, które wymaga możliwości oceny błędu, zaś dla oszacowania błędu trzeba znać wartość kąta przesunięcia fazowego φ , która zależy od warunków początkowych oraz parametrów układu, a więc wymaga znajomości rozwiązania. Oszacowanie dokładności rozwiązania jedynie na podstawie liczbowego porównania charakterystyki nieliniowej i zlinearyzowanej nie daje dostatecznej pewności, czy rozwiązanie równania zlinearyzowanego dostatecznie dobrze przybliży rozwiązanie rzeczywiste.

Tak więc metoda linearyzacji również nie nadaje się do zastosowania do badania nieliniowych układów wibro-uderzeniowych.

4. Metoda próbnego doboru parametrów

Podstawową trudnością związaną z omówionymi wyżej metodami były pracochłonne obliczenia, wymagające stosowania elektronicznej techniki obliczeniowej.

Dalsze poszukiwania prowadzono zatem w kierunku opracowania procesu numerycznego wymagającego możliwie najmniejszej ilości obliczeń.

Ogólnie znane metody numeryczne wymagają znajomości warunków początkowych równania, zaś w rozpatrywanym przypadku warunki początkowe dla rozwiązań okresowych są m.in. funkcją prędkości uderzenia, której nie znamy.

Tak więc omawiana metoda przyjmuje za punkt wyjścia poszukiwanie pary wartości prędkości uderzenia i kąta przesunięcia fazowego, którym odpowiada rozwiązanie okresowe.

Metoda próbnego doboru parametrów przewiduje następujący tok postępowania.

1. Określa się wstępnie obszar I, w którym należy poszukiwać wartości v i φ .

2. Badane równanie modeluje się na maszynie analogowej i wybierając kolejno pary wartości v i φ , którym odpowiadają poszczególne punkty obszaru, obserwuje się rozwiązanie np. na oscyloskopie katodowym.

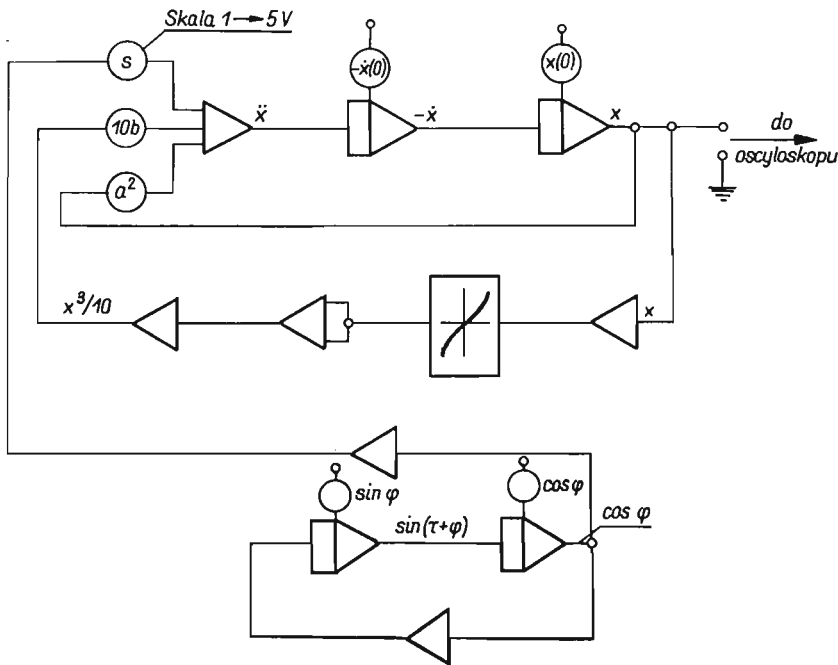
3. Takie postępowanie pozwoli określić poszukiwane rozwiązanie okresowe dla danych wartości x_0 i R , z niewielką dokładnością (ze względu na dość duży błąd modelowania członu nieliniowego rys. 4). Jako wynik prób na maszynie analogowej otrzymamy cztery pary wartości v i φ , określające obszar II, wewnątrz którego poszukiwać będziemy rozwiązania przy pomocy maszyny cyfrowej, co pozwoli uzyskać dokładniejszy wynik.

Opisany tok postępowania obrazują schematy operacyjne na rys. 5 i 6. Zastosowanie maszyny analogowej związane jest z możliwością szybkiej zmiany parametrów, co pozwala na prowadzenie poszukiwań w większym obszarze. Maszyna cyfrowa natomiast pozwala prowadzić obliczenia z większą dokładnością, przy użyciu standartowych metod numerycznych.

Każda próba (zarówno na maszynie analogowej, jak i cyfrowej) obejmuje sprawdzenie trzech warunków

$$(4.1) \quad x(2\pi n) = x_0; \quad \dot{x}(2\pi n) = -v; \quad x > x_0 \quad \text{dla} \quad \tau \in (0, 2\pi n).$$

W przypadku, gdy którykolwiek z warunków (4.1) nie zostanie spełniony, wybiera się następną parę wartości v i φ .



Rys. 4. Schemat blokowy modelu analogowego równania (2.6)

Wobec tego, że dokładność modelowania tak ciągłego, jak i dyskretnego jest ograniczona, warunki (4.1) będą miały postać

$$(4.2) \quad \begin{aligned} |x(2\pi n) - x_0| &< \varepsilon_\tau, \\ |\dot{x}(2\pi n) - (-v)| &< \varepsilon_v, \\ |x - x_0| &< \varepsilon_x, \end{aligned}$$

gdzie: ε_τ ; ε_v ; ε_x — założone dopuszczalne odchyłki otrzymanych wyników od wartości oczekiwanych.

Omówiony wyżej tok postępowania zilustrujemy przykładem.

Poszukujemy rozwiązania okresowego równania

$$\ddot{x} + 0,25x + 0,20x^3 = \cos(\tau + \varphi),$$

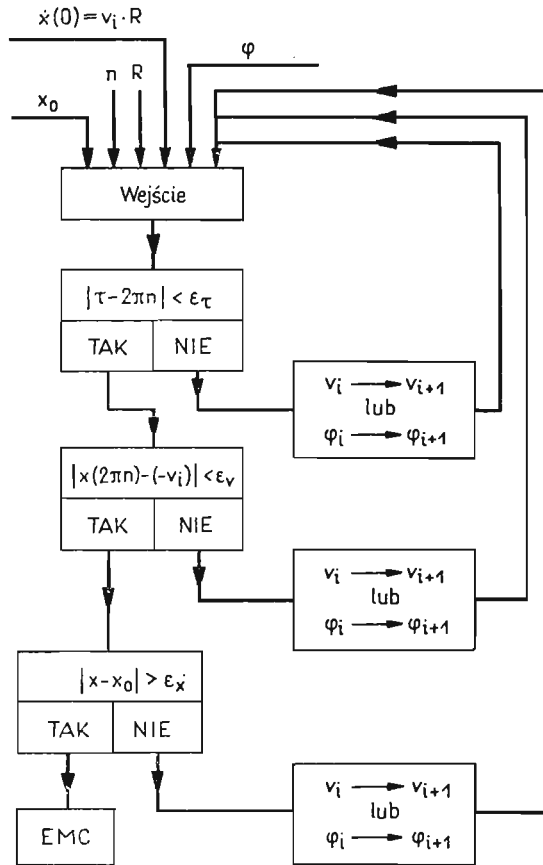
z warunkami okresowości

$$\begin{aligned} x(0) &= 0, & \dot{x}(0) &= 0,5v, \\ x(2\pi) &= 0, & \dot{x}(2\pi) &= -v, \end{aligned}$$

a więc $x_0 = 0$, $R = 0,5$, $n = 1$.

Badania prowadzono przy pomocy maszyny analogowej ELWAT-1 oraz maszyny cyfrowej ZAM-2 beta.

Wstępnie ustalono, że wartości φ i v poszukiwane będą w zbiorze $I(v, \varphi): v \in [0; 5,0]; \varphi \in [0; 2\pi]$.



Rys. 5. Schemat operacyjny działań maszyny analogowej

W wyniku badań na maszynie analogowej określono przybliżone rozwiązanie (rys. 7)

$$II(v; \varphi): \quad v \in [2,1; 2,5]; \quad \varphi \in [2,8; 3,6].$$

Próby prowadzone na maszynie cyfrowej dały w wyniku wartości

$$v = 2,25; \quad \varphi = 3,14.$$

Przebieg rozwiązania przedstawiono na rys. 8.

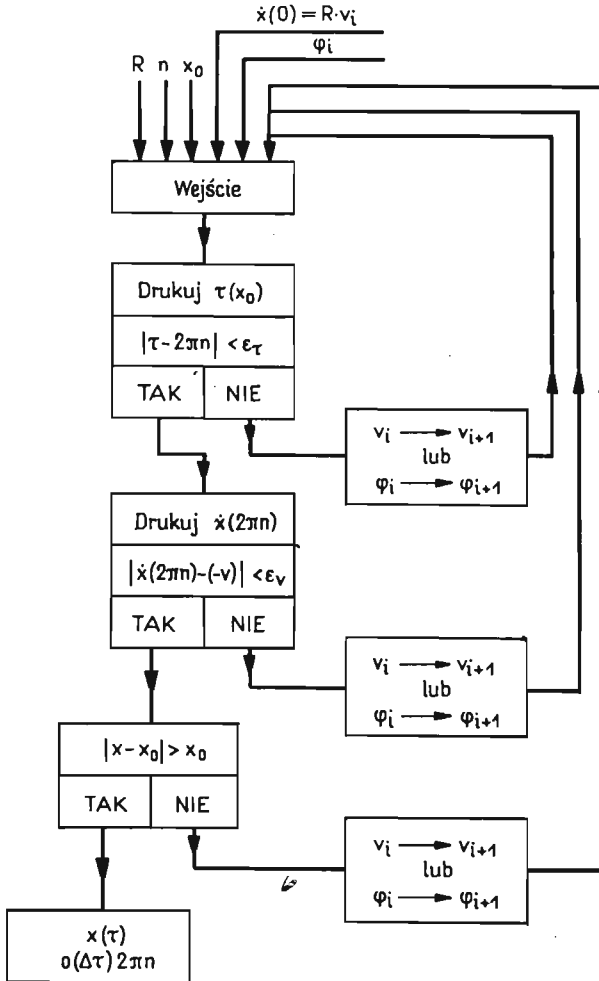
Aby zmniejszyć czas trwania prób negatywnych drukowano wyłącznie wartości początkowe i końcowe, a dopiero po uzyskaniu przebiegu spełniającego warunki okreso-

wości z żadaną dokładnością następowało drukowanie dla dostatecznie małego kroku zmiennej τ .

Wartość współczynnika restytucji R , obliczona jako stosunek modułów początkowej i końcowej wartości prędkości w otrzymanym rozwiązaniu wynosi

$$R = 0,498,$$

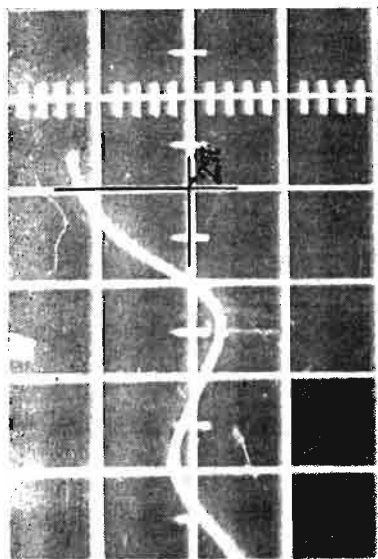
a więc różni się o 0,4% od wartości przyjętej.



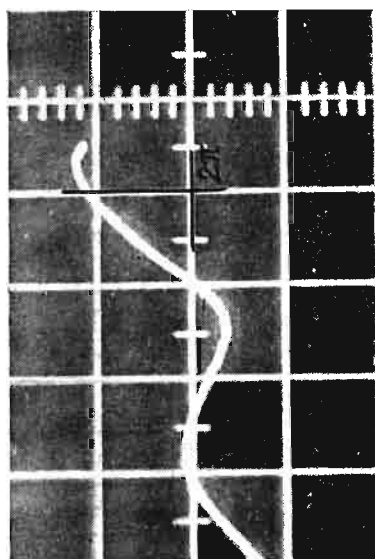
Rys. 6. Schemat operacyjny działań maszyny cyfrowej

Kontynuując próby możnaby oczywiście uzyskać mniejszy błąd (dla szeregu zbadanych przykładów uzyskano rozwiązanie z błędem mniejszym niż 0,1%).

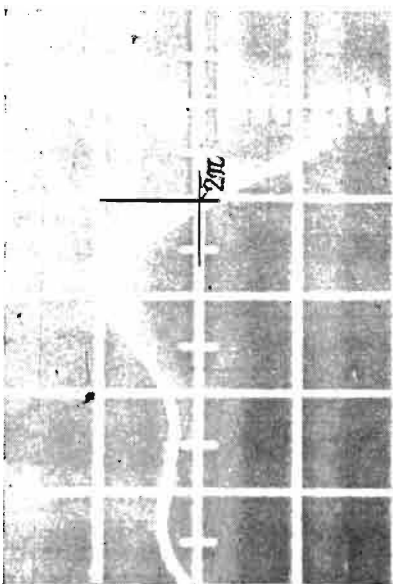
Omawiana metoda pozwala również na uzyskanie pewnych informacji o stabilności strukturalnej badanego układu, a ściślej — o wpływie małych zmian parametrów układu na przebieg rozwiązania. Wprowadzając mianowicie pewne zaburzenia warunków po-



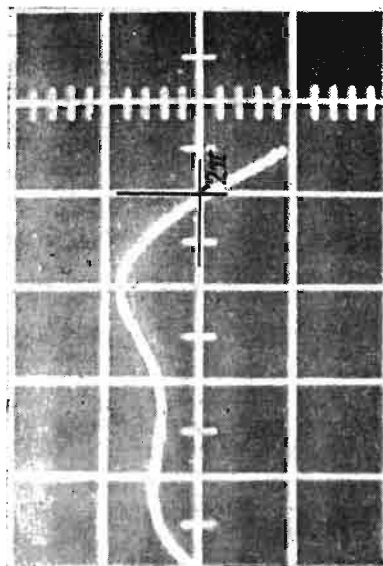
Rys. 7b



Rys. 7d

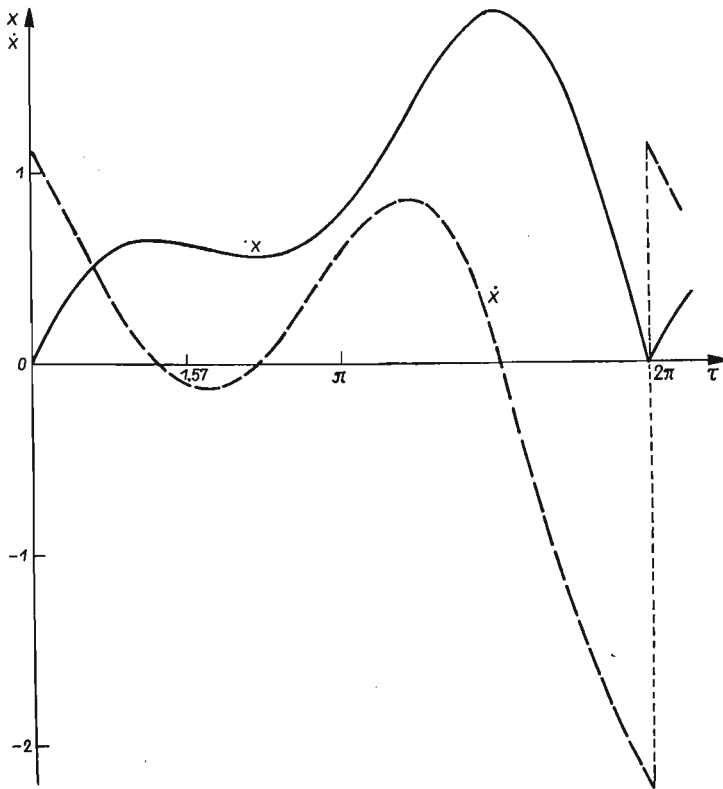


Rys. 7a



Rys. 7c

czątkowych lub parametrów układu można zaobserwować, jak zmienia się przebieg rozwiązania w stosunku do rozwiązania niezaburzonego oraz jak zmienia się różnica w miarę wzrostu ilości cykli ruchu (tablica 1).



Rys. 8

Tablica 1

τ	x_z	\dot{x}_z	$x_z - x$
+0,0000	+0,00000	+1,12500	+0,00000
+0,50000	+0,43439	+0,61196	-0,00022
+1,00000	+0,62232	+0,16103	-0,00167
+1,50000	+0,62662	-0,10461	-0,00497
+2,00000	+0,56065	-0,11577	-0,00981
+2,50000	+0,55028	+0,10093	-0,01541
+3,00000	+0,68999	+0,46197	-0,02115
+3,50000	+1,00678	+0,78195	-0,02657
+4,00000	+1,42776	+0,83598	-0,03130
+4,50000	+1,75986	+0,40252	-0,03522
+5,00000	+1,75673	-0,45630	-0,03818
+5,50000	+1,30306	-1,32550	-0,03871
+6,00000	+0,47152	-1,96718	-0,03582
+6,20000	+0,05662	-2,17872	-0,03397

$$n = 1, a = 0,51, b = 0,21, x_0 = 0,0, R = 0,5, \varphi = 3,14159, \Delta\tau = 0,05.$$

5. Wnioski końcowe

Na podstawie analizy możliwości zastosowania do rozpatrywanego układu różnych metod badania układów nieliniowych stwierdzono, że nie nadają się one do układów wibro-uderzeniowych, zawierających człony nieliniowe.

Zaproponowana w niniejszym artykule metoda pozwala uzyskać przybliżone rozwiązanie numeryczne z dokładnością nie mniejszą niż metody stosowane w innych zagadnieniach nieliniowych.

Omawiana metoda pozwala uzyskać pewne informacje o stabilności strukturalnej, co ma istotne znaczenie ze względu na nieuniknione różnice pomiędzy założonymi a rzeczywistymi wartościami parametrów układu, wynikającymi zawsze przy realizacji technicznej.

Literatura cytowana w tekście

1. W. J. CUNNINGHAM, *Analiza układów nieliniowych*, Warszawa 1962.
2. А. Э. КОБРИНСКИЙ, *Механизмы с упругими связями*, Москва 1964.
3. B. KOWALCZYK, *Badanie stabilności strukturalnej układu wibro-uderzeniowego o jednym stopniu swobody*, (w druku)
4. J. G. PANOWKO, *A review of applications of the methods of direct linearization*, Proc. XI Conf. Appl. Mech., Monachium 1964.
5. Z. WIŚNIEWSKI, *Analiza układu wibro-uderzeniowego z nieliniową charakterystyką sprężystą*. Rozprawa doktorska, Politechnika Gdańska, 1967.

Резюме

АНАЛИЗ ВИБРОУДАРНОЙ СИСТЕМЫ С НЕЛИНЕЙНОЙ УПРУГОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ

В работе изучено движение виброударной системы с одной степенью свободы и нелинейной упругой характеристикой.

Рассматриваемая нелинейность типа многочлена по отношению к перемещениям колеблющейся массы получается из адиабатической аппроксимации характеристики упругого элемента применяемого в системе.

Исследуется возможность решения уравнения движения при помощи метода последовательных приближений или метода линеаризации Пановко. Показываются трудности связанные с применением этих методов. Предлагается некоторый численный метод, в котором совместно используются электронные аналоговая и цифровая вычислительные машины.

Summary

ANALYSIS OF A VIBRATORY-IMPACT SYSTEM WITH NONLINEAR SPRING CHARACTERISTICS

The paper deals with an oscillatory system with one degree of freedom. The vibrating mass is suspended on nonlinear spring, and striking a rigid stop. Two methods of solution are assumed: the perturbation method and Panovko's direct linearization method. On account of difficulties involved, the methods mentioned above had to be replaced by a certain digital method based on cooperation of analog and digital computers.