MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
2, 7 (1969)

# SKOŃCZONE ODKSZTAŁCENIA SPRĘŻYSTEGO KLINA I STOŻKA

ZBIGNIEW WESOŁOWSKI (WARSZAWA)

W nieliniowej teorii sprężystości znanych jest dotychczas zaledwie kilka ścisłych rozwiązań (por. [1] i [2]). Spowodowane to jest faktem, że równania nieliniowej teorii sprężystości są znacznie bardziej złożone niż teorii liniowej. Ta złożoność ogranicza w istotny sposób możliwość uzyskania rozwiązań ogólnych.

Praktycznie biorąc istnieje szansa rozwiązania zagadnienia nieliniowego jeśli sprowadza się ono do jednego równania różniczkowego zwyczajnego. Należy podkreślić, że nawet w przypadku, gdy poszukiwane funkcje są funkcjami jednej tylko zmiennej, na ogół otrzymuje się nie jedno równanie, a układ równań różniczkowych zwyczajnych, co wobec nieliniowości uniemożliwia rozwiązanie.

W niniejszej pracy przeprowadzono obliczenia dla dwóch odkształceń, dla których zagadnienie sprowadza się do rozwiązania jednego równania różniczkowego zwyczajnego.

## 1. Podstawowe zależności

Przed przystąpieniem do obliczeń konkretnych przypadków podamy tutaj za pracą [1] podstawowe zależności dotyczące nieliniowej teorii sprężystości. Wprowadźmy dwa na ogół różne układy współrzędnych: układ $\{x^i\}$ z tensorem metrycznym $g_{ij}$ oraz układ $\{X^\alpha\}$ z tensorem metrycznym $g_{\alpha\beta}$. Współrzędne typowego punktu $P$ rozważanego ciała w stanie naturalnym w układzie $\{X^\alpha\}$ oznaczmy przez $X^\alpha$. Współrzędne tego samego punktu w stanie odkształconym w układzie $\{x^i\}$ oznaczymy przez $x^i$

$$x^i = x^i(X^\alpha). \tag{1.1}$$

Cząstkowe pochodne funkcji $x^i(X^\alpha)$ względem $X^\alpha$

$$F^i_\alpha = \partial x^i/\partial X^\alpha \tag{1.2}$$

nazywamy gradientami odkształcenia. Lewy tensor Cauchy-Greena zdefiniowany jest przez związek

$$B^{ij} = F^i_\alpha F^j_\beta g^{\alpha\beta}, \tag{1.3}$$

a jego niezmienniki przez związki

$$
\begin{aligned}
I_1 &= B^i_i,\\
I_2 &= \frac{1}{2}[I_1^2-(B^2)^i_i],\\
I_3 &= \det B^i_j,
\end{aligned}
\tag{1.4}
$$

przy czym

$$(B^2)^{ij} = B^{ir}B^{js}g_{rs}. \tag{1.5}$$

Jeśli deformacja jest izochoryczna

$$I_3 = 1. \tag{1.6}$$

Dla rozważanych dalej izotropowych nieściśliwych materiałów sprężystych tensor naprężenia $\tau^{ij}$ określony jest związkiem

$$\tau^{ij} = \chi_1 B^{ij}+\chi_2(B^2)^{ij}+pg^{ij}, \tag{1.7}$$

gdzie $p$ jest dowolną funkcją skalarową, a $\chi_1$ i $\chi_2$ funkcjami niezmienników $I_1$ i $I_2$. Funkcje te są funkcjami materiałowymi, charakterystycznymi dla danego materiału. Równania równowagi są

$$\nabla_i \tau^{ij} = 0, \tag{1.8}$$

gdzie $\nabla_i$ oznacza różniczkowanie kowariantne w układzie $\{x^i\}$. Obciążenia brzegowe $t^i$ odniesione do jednostki powierzchni w stanie odkształconym określone są związkami

$$t^i = \tau^{ij}n_j, \tag{1.9}$$

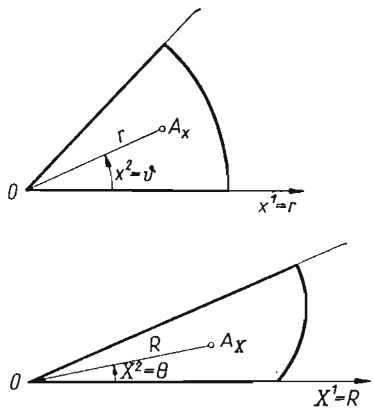
gdzie $n_j$ jest jednostkową normalną do powierzchni ciała w stanie odkształconym.

## 2. Deformacja klina

Rozważmy deformację, która w ustalonym walcowym układzie współrzędnych opisana jest związkami

$$
\begin{aligned}
r &= R\alpha(\Theta),\\
\vartheta &= \beta(\Theta),\\
z &= \lambda Z,
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

gdzie $\alpha$ oraz $\beta$ są pewnymi funkcjami, a $\lambda$ ustalonym parametrem. Jak wynika z (2.1) płaszczyzny $Z = \text{const}$ przechodzą w płaszczyzny $z = \text{const}$, a linie proste $\Theta = \text{const}$




Rys. 1

w linie proste $\vartheta$ = const. Okręgi $R$ = const nie przechodzą przy tym w okręgi $r$ = const, lecz doznają pewnego zniekształcenia opisanego funkcją $\alpha(\Theta)$. Celem dalszych rozważań jest takie określenie funkcji $\alpha$ i $\beta$, żeby deformacja była możliwa.

Oznaczając $x^i = (r, \vartheta, z)$, $X^\alpha = (R, \Theta, Z)$ mamy

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad g^{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{2.2}$$

$$g_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & R^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad g^{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/R^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{2.3}$$

Obliczając teraz w oparciu o (2.1) gradient odkształcenia $F^i_\alpha$ otrzymujemy

$$F^i_\alpha = \begin{bmatrix} \alpha & R\alpha' & 0 \\ 0 & \beta' & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}, \tag{2.4}$$

gdzie primem oznaczono różniczkowanie względem $\Theta$. W oparciu o (1.3), (1.4) oraz (2.2) (2.3) możemy teraz wyznaczyć tensor $B^{ij}$ oraz $(B^2)^{ij}$

$$B^{ij} = \begin{bmatrix} \alpha^2+\alpha'^2 & \alpha'\beta'/R & 0 \\ \alpha'\beta'/R & \beta'^2/R^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 \end{bmatrix}, \tag{2.5}$$

$$(B^2)^{ij} = \begin{bmatrix} (\alpha^2+\alpha'^2)^2+\alpha^2\alpha'^2\beta'^2 & \alpha'\beta'(\alpha^2+\alpha'^2+\alpha^2\beta'^2)/R & 0 \\ \alpha'\beta'(\alpha^2+\alpha'^2+\alpha^2\beta'^2)/R & (\alpha'^2\beta'^2+\alpha^2\beta'^4)/R & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^4 \end{bmatrix}. \tag{2.6}$$

Zgodnie z (1.4) pierwsze dwa niezmienniki tensora $B^{ij}$ są

$$\begin{aligned} I_1 &= \alpha^2+\alpha'^2+\alpha^2\beta'^2+\lambda^2, \\ I_2 &= \alpha^4\beta'^2+\lambda^2(I_1-\lambda^2). \end{aligned} \tag{2.7}$$

Dla rozpatrywanego tutaj materiału nieściśliwego zgodnie z (1.6) trzeci niezmiennik $I_3$ jest równy jedności; obliczając ten niezmiennik i przyrównując go do jedności otrzymujemy

$$\lambda^4\alpha^4\beta'^2 = 1, \tag{2.8}$$

skąd wynika

$$\beta' = \frac{1}{\alpha^2\lambda} \quad \text{lub} \quad \beta' = -\frac{1}{\alpha^2\lambda}. \tag{2.9}$$

Warunek nieściśliwości jest więc spełniony jeśli zachodzi $(2.9)_1$ lub $(2.9)_2$. Dalsze rozważania ograniczymy do przypadku, kiedy zachodzi $(2.9)_1$. Podstawiając (2.9) do (2.5)-(2.7) otrzymujemy

$$B^{ij} = \begin{bmatrix} \alpha^2+\beta'^2 & \frac{1}{R}\frac{\alpha'}{\alpha^2\lambda} & 0 \\ \frac{1}{R}\frac{\alpha'}{\alpha^2\lambda} & \frac{1}{\alpha^2\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}, \tag{2.10}$$

$$(2.11)\qquad (B^2)^{ij} = \begin{bmatrix} (\alpha^2+\alpha'^2)^2+\dfrac{\alpha'^2}{\alpha^2\lambda^2} & \dfrac{1}{R}\left(\dfrac{\alpha'}{\lambda}+\dfrac{\alpha'^3}{\alpha^2\lambda}+\dfrac{\alpha'}{\alpha^4\lambda^3}\right) & 0 \\ \dfrac{1}{R}\left(\dfrac{\alpha'}{\lambda}+\dfrac{\alpha'^3}{\alpha^2\lambda}+\dfrac{\alpha'}{\alpha^4\lambda^3}\right) & \dfrac{1}{R^2}\left(\dfrac{\alpha'^2}{\alpha^4\lambda^2}+\dfrac{1}{\alpha^6\lambda^4}\right) & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^4 \end{bmatrix},$$

$$(2.12)\qquad I_1 = \lambda^2+\alpha^2+\alpha'^2+\frac{1}{\alpha^2\lambda^2}, \qquad I_2 = \frac{1}{\lambda^2}+\lambda^2(I_1-\lambda)^2.$$

Jak wynika z (2.12) niezmienniki $I_1$, $I_2$ są jedynie funkcjami kąta $\Theta$, nie są natomiast funkcjami promienia $r$. Fakt ten istotnie upraszcza dalsze obliczenia.

Przejdziemy teraz do wyznaczenia naprężeń $\tau^{ij}$. (Zgodnie z (1.7) mamy

$$(2.13)\qquad \begin{aligned} \tau^{11} &= \chi_1(\alpha^2+\alpha'^2)+\chi_2(\alpha^4+\alpha'^4+2\alpha^2\alpha'^2+\lambda^{-2}\alpha^{-2}\alpha'^2)+p, \\ r^2\tau^{22} &= \chi_1\lambda^{-2}\alpha^{-2}+\chi_2(\lambda^{-2}\alpha^{-2}\alpha'^2+\lambda^{-4}\alpha^{-4})+p, \\ \tau^{33} &= \chi_1\lambda^2+\chi_2\lambda^4+p, \\ r\tau^{12} &= \chi_1\lambda^{-1}\alpha^{-1}\alpha'+\chi_2(\lambda^{-1}\alpha\alpha'+\lambda^{-1}\alpha^{-1}\alpha'^3+\lambda^{-3}\alpha^{-3}\alpha'), \\ \tau^{23} &= \tau^{31} = 0. \end{aligned}$$

W walcowym układzie współrzędnych równania równowagi (1.8) przyjmują postać

$$(2.14)\qquad \begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial r}\tau^{11}+\frac{\partial}{\partial\vartheta}\tau^{21}+\frac{1}{r}(\tau^{11}-r^2\tau^{22}) = 0, \\ &\frac{\partial}{\partial r}\tau^{12}+\frac{\partial}{\partial\vartheta}\tau^{22}+\frac{3}{r}\tau^{12} = 0, \\ &\frac{\partial}{\partial z}\tau^{33} = 0. \end{aligned}$$

Zgodnie z (2.1) i (2.9) należy przy tym pamiętać, że $d/dr = \alpha^{-1}\, d/dR$, $d/d\vartheta = 1/\beta'\ d/d\Theta = \lambda\alpha^2\, d/d\Theta$. Podstawiając do powyższych równań (2.13) i uwzględniając (2.12) otrzymujemy

$$(2.15)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial R} &= -L_1(R, \Theta), \\ \frac{\partial p}{\partial \Theta} &= -L_2(R, \Theta), \\ \frac{\partial p}{\partial Z} &= 0, \end{aligned}$$

gdzie

$$(2.16)\qquad \begin{aligned} RL_1(R, \Theta) = {} & \chi_1(\alpha^2-\lambda^{-2}\alpha^{-2}+\alpha\alpha'')+ \\ & +\chi_2(\alpha^4-\lambda^{-4}\alpha^{-4}-3\lambda^{-2}\alpha'^2+3\alpha^2\alpha'^2+\alpha^3\alpha''+3\alpha\alpha'^2\alpha'')+ \\ & +2\alpha'^2(\alpha^2+\alpha\alpha''-\lambda^{-2}\alpha^{-2})\left(\frac{\partial\chi_1}{\partial I_1}+\lambda^2\frac{\partial\chi_1}{\partial I_2}\right)+ \\ & +2\alpha'^2(\alpha^2+\alpha\alpha''-\lambda^{-2}\alpha^{-2})(\alpha^2+\alpha'^2+\lambda^{-2}\alpha^{-2})\left(\frac{\partial\chi_2}{\partial I_1}+\lambda^2\frac{\partial\chi_2}{\partial I_2}\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lambda\alpha^2 L_2(R,\Theta) = {} & 2\chi_2(\alpha\alpha'\lambda^{-1}+\alpha'\alpha''\lambda^{-1}-3\alpha'\alpha^{-3}\lambda^{-3})+\\ & +\frac{2\alpha'}{\lambda\alpha}\left(\frac{\partial\chi_1}{\partial I_1}+\lambda^2\frac{\partial\chi_1}{\partial I_2}\right)(\alpha^2+\alpha\alpha''-\lambda^{-2}\alpha^{-2})+\\ & +\frac{2\alpha'}{\lambda\alpha}\left(\frac{\partial\chi_1}{\partial I_1}+\lambda^2\frac{\partial\chi_2}{\partial I_2}\right)(\alpha^2+\alpha\alpha''-\lambda^{-2}\alpha^{-2})(\alpha'^2+\lambda^{-2}\alpha^{-2}).\end{aligned}\tag{2.17}$$

Z równania $(2.15)_3$ wynika, że $p$ nie zależy od $Z$, $p = p(R, \Theta)$. Koniecznym warunkiem istnienia funkcji $p$ jest więc

$$\frac{\partial L_1}{\partial\Theta} = \frac{\partial L_2}{\partial R},\tag{2.18}$$

co wobec niezależności $L_2(\Theta)$ od $R$ prowadzi do wniosku, że $L_1(R, \Theta)$ nie zależy od $\Theta$. Zgodnie z $(2.15)_1$ warunkiem równowagi jest więc

$$\begin{aligned}&\chi_1(\alpha^2-\lambda^{-2}\alpha^{-2}+\alpha\alpha'')+\chi_2(\alpha^4-\lambda^{-4}\alpha^{-4}+3\alpha^2\alpha'^2-3\lambda^{-2}\alpha'^2+\alpha^3\alpha''+3\alpha\alpha'^2\alpha''+\lambda^{-2}\alpha^{-1}\alpha'')+\\ &\quad+2\alpha'^2\left(\frac{\partial\chi_2}{\partial I_1}+\lambda^2\frac{\partial\chi_2}{\partial I_2}\right)(\alpha^2+\alpha\alpha''-\lambda^{-2}\alpha^{-2})(\alpha^2+\alpha'^2+\lambda^{-2}\alpha^{-2})+\\ &\quad+2\alpha'^2\left(\frac{\partial\chi_1}{\partial I_1}+\lambda^2\frac{\partial\chi_1}{\partial I_2}\right)(\alpha^2+\alpha\alpha''-\lambda^{-2}\alpha^{-2}) = H,\end{aligned}\tag{2.19}$$

gdzie $H$ jest dowolną stałą. Związek ten jest nieliniowym zwyczajnym równaniem różniczkowym pozwalającym wyznaczyć funkcję $\alpha(\Theta)$. Rozwiązanie równania (2.19) możliwe jest jednak dopiero po podaniu funkcji $\chi_1(I_1, I_2)$ oraz $\chi_2(I_1, I_2)$.

Dalsze rozważania ograniczamy do materiału, gdzie $\chi_1$ jest stałą materiałową, a $\chi_2$ jest równe zeru (tzw. *neohookean*)

$$\chi_1 = C, \quad \chi_2 = 0.\tag{2.20}$$

Dla tego materiału (2.19) redukuje się do równania

$$\alpha_2+\alpha\alpha''-\frac{1}{\lambda^2\alpha^2} = \frac{H}{C}.\tag{2.21}$$

Oznaczając

$$\alpha'(\Theta) = \varkappa(\alpha(\Theta)),\tag{2.22}$$

mamy

$$\alpha'' = \varkappa\frac{d\varkappa}{d\alpha}.\tag{2.23}$$

Równanie (2.21) można więc przedstawić w następującej postaci

$$\varkappa\frac{d\varkappa}{d\alpha} = \frac{H}{\alpha C}-\alpha+\frac{1}{\lambda^2\alpha^3},\tag{2.24}$$

skąd wynika, że

$$\frac{1}{2}\varkappa^2 = \frac{H}{C}\ln\alpha-\frac{1}{2}\left(\alpha^2+\frac{1}{\lambda^2\alpha^2}\right)+D,\tag{2.25}$$

gdzie $D$ jest stałą całkowania. Ponowne całkowanie prowadzi do

$$\Theta = \int_1^{\alpha} \left( \frac{H}{C} \ln \alpha^2 - \alpha^2 - \frac{1}{\lambda^2 \alpha^2} \right)^{-1/2} d\alpha + E, \tag{2.26}$$

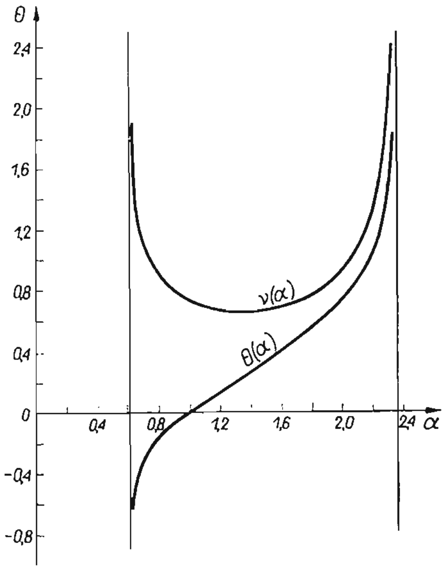
gdzie $E$ jest stałą całkowania. W ten sposób określona została dwuparametrowa rodzina deformacji możliwych w materiale (2.20).

Jeśli $H = 0$, to ogólnym rozwiązaniem równania (2.26) jest

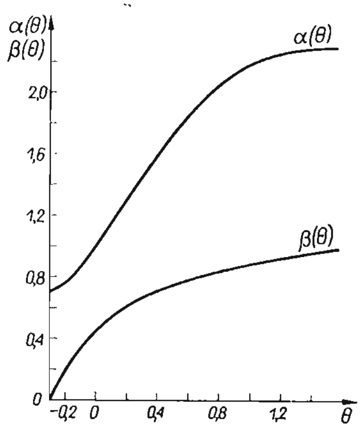
$$\alpha(\Theta) = \sqrt{\varkappa^2 \cos^2(\Theta - \Theta_0) + \frac{1}{\varkappa^2 \lambda^2} \sin^2(\Theta - \Theta_0)}\,, \tag{2.27}$$

gdzie $\Theta_0$ oraz $\varkappa$ są dowolnymi stałymi. Deformacja (2.27) jest deformacją jednorodną.

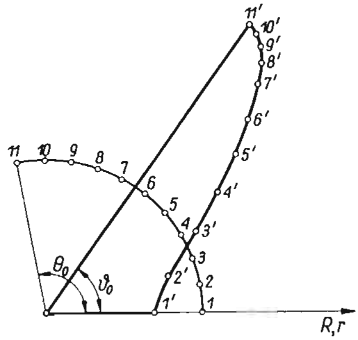
W przypadku $H \neq 0$ funkcja $\alpha(\Theta)$ nie daje się wyrazić przez funkcje elementarne. W celu pokazania jakiemu odkształceniu odpowiada (2.26), wykonano odpowiednie




Rys. 2




Rys. 3




Rys. 4

obliczenia numeryczne dla $H = C$, $D = 4$, $E = 0$, $\lambda = 1$. Na rys. 2 pokazano obliczoną dla tych wartości funkcję $v = \left(D + H\ln\frac{\alpha^2}{C} - \alpha^2 - \frac{1}{\alpha^2\lambda^2}\right)^{-1/2}$ oraz jej całkę, która jest poszukiwaną funkcją $\Theta(\alpha)$. Na rys. 3 pokazano funkcję $\alpha(\Theta)$ oraz funkcję $\beta(\Theta)$. Na rys. 4 pokazano klin nieodkształcony i odkształcony. Po odkształceniu punkty 0', 1', 2', ... przechodzą w punkty 0, 1, 2, ... .

### 3. Deformacja stożka

Istnienie deformacji (2.1) sugeruje, że podobna deformacja jest również możliwa, jeśli walcowy układ współrzędnych zastąpić kulistym. Wykażemy, że tak jest w rzeczywistości.

Rozważamy deformację, która w ustalonym kulistym układzie współrzędnych opisana jest związkami[1])

$$\begin{aligned} r &= R\alpha(\Theta), \\ \vartheta &= \beta(\Theta), \\ \varphi &= \Phi, \end{aligned} \tag{3.1}$$

gdzie $\alpha$ oraz $\beta$ są pewnymi funkcjami. Celem dalszych rozważań jest takie określenie funkcji $\alpha$ i $\beta$, żeby deformacja była możliwa.

Oznaczając $x^i = (r, \vartheta, \varphi)$, $X^\alpha = (R, \Theta, \Phi)$ mamy

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\sin^2\vartheta \end{bmatrix}, \quad g^{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/r^2\sin^2\vartheta \end{bmatrix}, \tag{3.2}$$

$$g_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & R^2 & 0 \\ 0 & 0 & R^2\sin^2\Theta \end{bmatrix}, \quad g^{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/R^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/R^2\sin^2\Theta \end{bmatrix}. \tag{3.3}$$

Obliczając teraz w oparciu o (3.1) gradient odkształcenia $F^i_\alpha$ (1.2) otrzymujemy

$$F^i_\alpha = \begin{bmatrix} \alpha & R\alpha' & 0 \\ 0 & \beta' & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{3.4}$$

gdzie primem oznaczono różniczkowanie względem $\Theta$.

W oparciu o (1.3), (1.4), (3.2) i (3.3) możemy teraz wyznaczyć tensory $B^{ij}$ i $B^{ir}B^{js}g_{rs} = (B^2)^{ij}$, a mianowicie

$$B^{ij} = \begin{bmatrix} \alpha^2+\alpha'^2 & \frac{1}{R}\alpha'\beta' & 0 \\ \frac{1}{R}\alpha'\beta' & \frac{1}{R^2}\beta'^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/R^2\sin^2\Theta \end{bmatrix}, \tag{3.5}$$

[1]) Deformację nieco ogólniejszą rozważał w 1967 r. R. M. Christensen [3], popełnił jednak omyłkę w obliczeniach tensora $B^{ij}$, która rzutuje na dalsze obliczenia.

$$(B^2)^{ij} = \begin{bmatrix} (\alpha^2+\alpha'^2)+\alpha^2\alpha'^2\beta'^2 & \frac{1}{R}\alpha'\beta'(\alpha^2+\alpha'^2+\alpha^2\beta'^2) & 0 \\ \frac{1}{R}\alpha'\beta'(\alpha^2+\alpha'^2+\alpha^2\beta'^2) & \frac{1}{R^2}\beta'^2(\alpha'^2+\alpha^2\beta'^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\alpha^2}{R^2}\frac{\sin^2\beta}{\sin^4\Theta} \end{bmatrix}. \tag{3.6}$$

Zgodnie z (1.4) pierwsze dwa niezmienniki tensora $B^{ij}$ są

$$\begin{aligned} I_1 &= \alpha^2+\alpha'^2+\alpha^2\beta'^2+\alpha^2\frac{\sin^2\beta}{\sin^2\Theta}, \\ I_2 &= \alpha^4\beta'^2+\alpha^2(\alpha^2+\alpha'^2+\alpha^2\beta'^2)\frac{\sin^2\beta}{\sin^2\Theta}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Niezmienniki te są więc tylko funkcjami kąta $\Theta$.

Dla rozpatrywanego tutaj materiału nieściśliwego zgodnie z (1.5) trzeci niezmiennik jest równy jedności. Obliczając ten niezmiennik i przyrównując go do jedności otrzymujemy warunek nieściśliwości

$$\alpha^6\beta'^2\sin^2\beta = \sin^2\Theta. \tag{3.8}$$

W stosunku do (2.8) zachodzi tu ta różnica, że (3.8) jest równaniem różniczkowym ze względu na $\beta$.

Ograniczymy się dalej do przypadku, kiedy każda z wielkości w (3.8) jest dodatnia. W tym przypadku po wyciągnięciu pierwiastka z obu stron (3.8) otrzymujemy

$$\alpha = \left(\frac{\sin^2\Theta}{\beta'\sin\beta}\right)^{1/3}. \tag{3.9}$$

Deformacja jest więc izochoryczna jeśli zmianie kąta towarzyszy określona przez (3.3) i (3.1) zmiana promienia $r$.

Zgodnie z (1.7) naprężenia $\tau^{ij}$ są

$$\begin{aligned} \tau^{11} &= \chi_1(\alpha^2+\alpha'^2)+\chi_2(\alpha^4+\alpha'^4+2\alpha^2\alpha'^2+\alpha^2\alpha'^2\beta'^2)+p, \\ r^2\tau^{22} &= \chi_1\alpha^2\beta'^2+\chi_2\alpha^2\beta'^2(\alpha'^2+\alpha^2\beta'^2)+p, \\ r^2\tau^{33}\sin^2\vartheta &= \chi_1\alpha^2\frac{\sin^2\beta}{\sin^2\Theta}+\chi_2\alpha^4\frac{\sin^4\beta}{\sin^4\Theta}+p, \\ r\tau^{12} &= \chi_1\alpha\alpha'\beta'+\chi_2\alpha\alpha'\beta'(\alpha^2+\alpha'^2+\alpha^2\beta'^2), \\ \tau^{23} &= \tau^{31} = 0, \end{aligned} \tag{3.10}$$

a równania równowagi (1.8) w rozpatrywanym kulistym układzie współrzędnych przybierają postać

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial r}\tau^{11}+\frac{\partial}{\partial\vartheta}\tau^{21}+\frac{1}{r}(2\tau^{11}-r^2\tau^{22}-r^2\tau^{33}\sin^2\vartheta)+\tau^{21}\mathrm{ctg}\vartheta = 0, \\ &\frac{\partial}{\partial r}\tau^{12}+\frac{\partial}{\partial\vartheta}\tau^{22}+\frac{2}{r}\tau^{12}+(\tau^{22}-\tau^{33}\sin^2\vartheta)\mathrm{ctg}\vartheta = 0, \\ &\frac{\partial}{\partial\varphi}\tau^{33} = 0, \end{aligned} \tag{3.11}$$

przy czym zgodnie z (3.1) $\frac{d}{dr} = \frac{1}{\alpha}\frac{d}{dR}, \frac{d\cdot}{d\vartheta} = \frac{1}{\beta'}\frac{d}{d\Theta}, \frac{d}{d\varphi} = \frac{d}{d\Phi}$.

Dla oszczędności miejsca ograniczymy dalsze rozważania do neohookeanu [por. (2.20)]. Dla tego materiału (3.11) redukuje się do

$$\begin{gathered}
\frac{\partial p}{\partial R}+\frac{1}{R}\chi_1\left(2\alpha^2+3\alpha'^2+\alpha\alpha''-\alpha\beta'^2+\frac{\alpha\alpha'\beta''}{\beta'}-\alpha^2\frac{\sin^2\beta}{\sin^2\Theta}+\alpha\alpha'\beta'\frac{\cos\beta}{\sin\beta}\right)=0,\\
\frac{1}{\beta'}\frac{\partial p}{\partial\Theta}+\chi_1\left(\alpha\alpha'\beta'+2\alpha^2\alpha'+2\alpha\beta'\alpha'+\alpha\beta'^2\operatorname{ctg}\beta-\alpha^2\frac{\sin\beta\cos\beta}{\sin^2\Theta}\right)=0,\\
\frac{\partial p}{\partial Z}=0.
\end{gathered}\tag{3.12}$$

Jak wynika z $(3.12)_3$ funkcja $p$ nie zależy od $Z$, $p = p(R, \Theta)$.

Wobec tego, że $(3.12)_2$ nie zależy od $R$ mamy $\partial^2 p/\partial R\partial\Theta = 0$. Warunkiem istnienia $p$ jest więc

$$2\alpha+3\alpha'+\alpha\alpha''-\alpha\beta'^2+\frac{\alpha\alpha'\beta''}{\beta'}-\alpha^2\frac{\sin^2\beta}{\sin^2\Theta}+\alpha\alpha'\beta'\operatorname{ctg}\beta = \text{const}.\tag{3.13}$$

Po podstawieniu (3.9) do powyższego warunku, otrzymujemy jedno zwyczajne równanie różniczkowe na funkcję $\beta(\Theta)$. Równanie to jest jednak bardzo skomplikowane i nie udało się znaleźć analitycznego rozwiązania tego równania. Rozwiązanie numeryczne można znaleźć w sposób podobny jak w części drugiej dla odkształcenia płaskiego.

### Literatura cytowana w tekście


1. C. TRUESDELL, W. NOLL, *Non-Linear Field Theories of Mechanics*, Flügge's Encyclopedia of Physics, Berlin 1960.
2. A. E. GREEN, W. ZERNA, *Theoretical Elasticity*, Oxford 1954.
3. R. M. CHRISTENSEN, *Large elastic deformation of a spherical wedge*, Int. J. Non-Lin. Mech., **3**, **2** (1967), 207–216.



Резюме

КОНЕЧНЫЕ ДЕФОРМАЦИИ УПРУГОГО КЛИНА И КОНУСА

Рассматривается конечная упругая деформация несжимаемого клина. Точки клина подвергаются таким радиальным и окружным перемещениям, что плоскости в пределах которых находится край клина, остаются плоскостями. Показано, что для того чтобы определить напряженное и деформированное состояние, следует решить дифференциальное уравнение второго порядка. Это уравнение решается для случая, когда материалом является так наз. неогукиан. Дается одно численное решение.

Аналогичные решения проводились для конуса, который подвергается такой осесимметрической деформации, что прямые, проходящие через вершину клина, остаются прямыми.

Summary

FINITE DEFORMATIONS OF AN ELASTIC WEDGE AND CONE

The finite deformations of the elastic incompressible wedge are investigated. The points of the wedge suffer radial and transversal displacements, such that the surfaces $\vartheta$ = const remain plane. It is shown, that in order to find the stress and strain, it is necessary to solve a second order ordinary differential equation. This equation is solved for the neo-Hookean material. The numerical solution is given.

Similar investigations are performed for an elastic cone under axially-symmetric deformation in such a manner that the surfaces $\vartheta$ = const remain the conical surfaces.

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

*Praca została złożona w Redakcji dnia 23 października 1968 r.*