

## OBSZAR KONTAKTU SZTYWNEJ KULI Z PÓŁPRZESTRZENIĄ LEPKOSPĘŻYSTĄ

JADWIGA H A L A U N B R E N N E R I BRONISŁAW L E C H O W I C Z (KRAKÓW)

### 1. Wprowadzenie

Badaniem narastania z czasem powierzchni rzeczywistego kontaktu dwu ciał stałych w obrębie kontaktu nominalnego zajmowało się kilku autorów, rozpatrując wpływ tego procesu na wzrost tarcia statycznego. W pracy przedstawionej poniżej badano zależność powierzchni nominalnego kontaktu od czasu dla sztywnej kuli przyciskanej stałą siłą normalną do półprzestrzeni lepkospężystej.

Problem kontaktu dwu ciał sprężystych, izotropowych, ograniczonych powierzchniami drugiego stopnia i przyciskanych do siebie stałą siłą  $P$ , normalną do ich wspólnej powierzchni stycznej, rozwiązał HERTZ [1] przy następujących założeniach: a) oba ciała stosują się do prawa Hooke'a, b) przez powierzchnię kontaktu nie przenoszą się naprężenia styczne, c) rozmiary liniowe obszaru kontaktu są dużo mniejsze od rozmiarów ciał ściskanych. W przypadku sztywnej kuli i półprzestrzeni sprężystej i izotropowej, obszar kontaktu jest kołem o promieniu  $a$  danym wzorem

$$a^3 = \frac{3P}{4} \cdot \frac{1-\nu^2}{E} R,$$

gdzie  $E$  i  $\nu$  oznaczają odpowiednio moduł Younga i współczynnik Poissona materiału podstawy, zaś  $R$  promień kuli. W przypadku tym, po przyłożeniu siły, powierzchnia kontaktu ustala się bardzo szybko, tym szybciej, im rozmiary ciał stykających się są mniejsze. Decyduje o tym prędkość rozchodzenia się fal sprężystych w ośrodku i ich tłumienie. W przypadku ciał lepkospężystych, po przyłożeniu siły ściskającej, obszar kontaktu narasta z czasem i może się ustalić, lub też narastać stale, jeżeli materiał podstawy okazuje nieodwracalne lepkie płynięcie.

Problem wciskania sztywnej, gładkiej kuli w półprzestrzeń lepkospężystą i nieściśliwą ( $\nu = 0,5$ ) rozwiązali teoretycznie LEE i RADOK [2]. Zakładając liniowy model reologiczny i przykładając do kuli siłę  $PH(t)$ , uzyskali na promień koła styku wzór

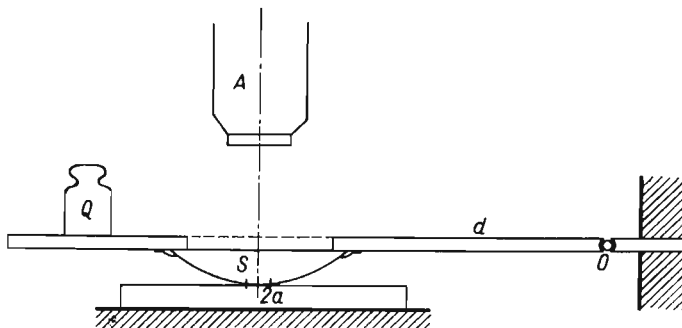
$$(1.1) \quad a^3(t) = \frac{3P}{4} R \left[ \frac{1}{E_0} + \psi(t) + \frac{t}{\eta_0} \right],$$

gdzie  $E_0$  oznacza moduł sprężystości natychmiastowej materiału,  $\psi(t)$  — funkcję pełzania, zaś  $\eta_0$  — współczynnik lepkości przy ustalonym płynięciu materiału] proporcjonalnym do czasu.

Wzór ten może posłużyć do wyznaczania wielkości charakteryzujących materiał lepko-sprężysty:  $E_0$ ,  $\eta_0$ ,  $\psi(t)$ , jeżeli wyznaczymy doświadczalnie  $a = a(t)$ ,  $R$ ,  $P$ .

## 2. Eksperyment

W przeprowadzonym doświadczeniu sztywna kula była reprezentowana przez soczewkę szklaną, płasko-wypukłą o promieniu krzywizny  $R = 10,5$  cm, półprzestrzeń lepko-sprężysta — przez płytę miękkiej żywicy epoksydowej P 53, grubości 2,5 cm, położoną na grubej płycie szklanej (rys. 1).



Rys. 1. Aparat do obserwacji obszaru styku soczewki z podłożem lepko-sprężystym

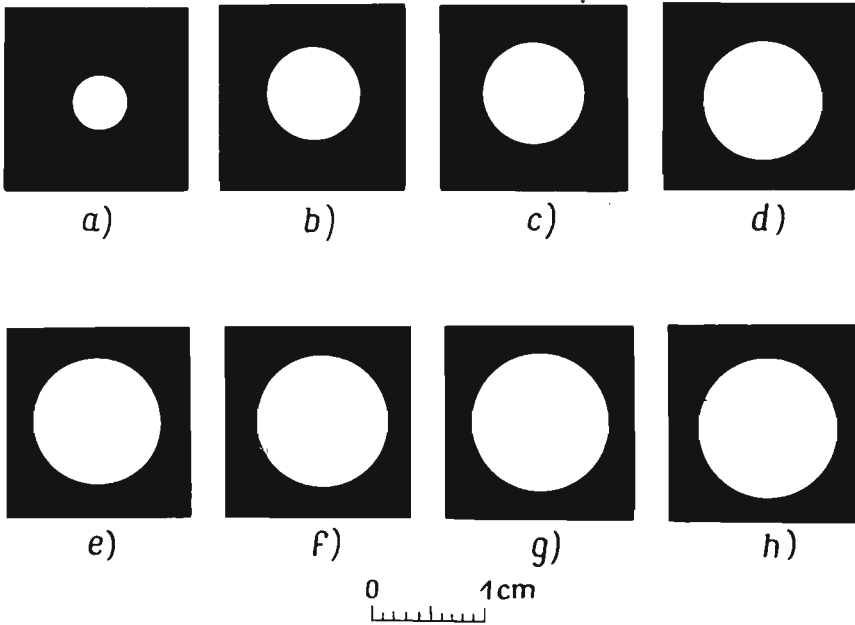
Soczewkę  $s$  umocowano w ramieniu  $d$  dźwigni obracalnej koło osi  $O$  i obciążonej odważnikiem  $Q$ . Łączny nacisk normalny po uwzględnieniu ciężaru soczewki,  $P = 11,4$  N. Aby zrealizować założenie pracy [2] dotyczące braku tarcia na powierzchni styku, powierzchnię żywicy natarto dwusiarczkiem molibdenu; zabieg ten zwiększył też kontrast optyczny obszaru styku z otoczeniem. Obszar styku fotografowano poprzez szkło soczewki.

Celem zbadania wartości współczynnika Poissona podczas pełzania, do płytki z badanej żywicy o wymiarach:  $10\text{ cm} \times 8\text{ cm} \times 1,1\text{ cm}$  przyklepiono dwie poprzeczki metalowe z haczykami i narysowano na niej tuszem dwa odcinki długości 7 cm, pionowy i poziomy. Fotografowano wiszącą pionowo płytkę przed obciążeniem i po obciążeniu ciężarem 20 N po upływie czasów: 10 s, 100 s, 1 h, 3 h liczonych od momentu przyłożenia obciążenia. Zmierzono długości obu odcinków na kliszy za pomocą komparatora i na podstawie definicji  $\nu$  uzyskano wartości  $\nu = 0,52; 0,44; 0,44; 0,45$ . Wartość  $\nu$  obliczona na podstawie zdjęć robionych w kilka sekund po nagłym przyłożeniu obciążenia wypadła w kilkakrotnie powtarzanych pomiarach o około 4% większa od 0,5. Tę nie spotykaną na ogół wartość  $\nu$  można wyjaśnić obniżeniem się temperatury próbki o około  $0,1^\circ\text{C}$  przy nagłym rozciągnięciu, stwierdzoną przy użyciu zamocowanej w niej termopary i anizotropią rozciągniętego materiału pod względem mechanicznym i cieplnym.

W celu znalezienia funkcji  $a = a(t)$  fotografowano obszar styku poprzez soczewkę. Przez pierwsze 1,5 minuty od chwili przyłożenia siły filmowano obszar kontaktu w sposób ciągły (20 klatek na sekundę), następnie robiono zdjęcia po 5, 10, 20, 40 minutach, potem

po 1, 2, 4, 8 godzinach itd. przez 3 doby w temperaturze  $(20,5 \pm 0,5)^\circ\text{C}$ . Sfotografowano też skalę milimetrową poprzez szkło soczewki. Rys. 2 przedstawia kilka uzyskanych zdjęć.

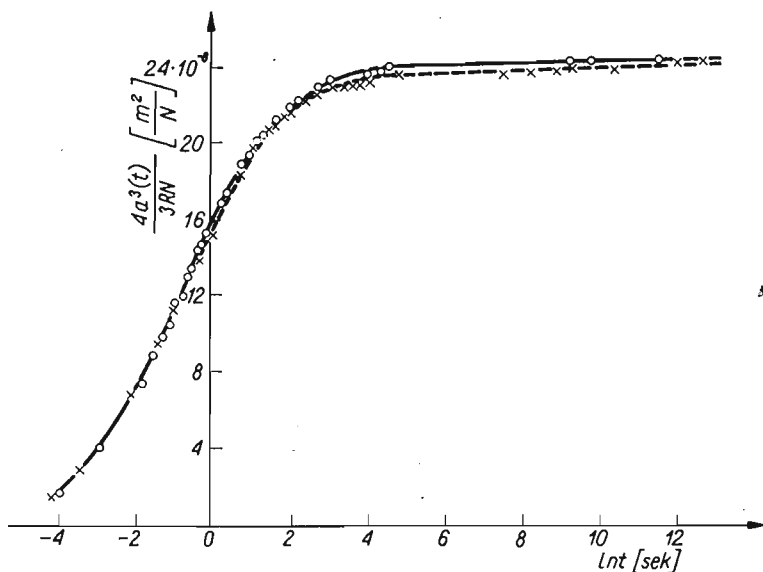
Po zmierzeniu średnic koła styku na zdjęciach, sporządzono wykres  $4a^3(t)/3PR$  w półlogarytmicznym układzie współrzędnych, przedstawiony na rys. 3. Jest to zgodnie z wzorem (1.1) równocześnie wykres podatności  $J$  materiału na rozciąganie. Z wykresu widać, że krzywa podatności dla czasów  $t > 1$  min przebiega niemal poziomo, z czego wnioskujemy, że materiał nie okazuje lepkiego płynięcia.



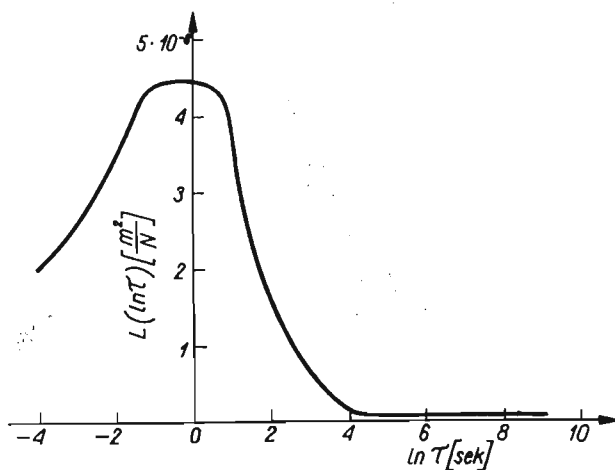
Rys. 2. Fotografie obszaru styku soczewki szklanej z podłożem lepkosprężystym (żywica P 53) po czasach: a) 0,05 s, b) 0,2 s, c) 0,4 s, d) 0,8 s, e) 20 min, f) 1 h, g) 1 d, h) 3 d, liczonych od momentu przyłożenia siły

Wykres podatności uzyskany w ten sposób porównano z wykresem otrzymanym przez obserwację pełzania próbki w kształcie prostopadłościennej beleczki o wymiarach:  $1,6\text{ cm} \times 1,2\text{ cm} \times 15,5\text{ cm}$ , uchwyconej nieruchomo u góry i poddanej stałej pionowej sile rozciągającej 24 N. Użyto aparatu opisanego w pracy: HALAUNBRENNER i KUBISZ [3] z ciągłym zapisem optycznym. Na podstawie obserwacji pełzania sporządzono wykres podatności na rozciąganie  $J = \frac{\epsilon}{\sigma}$  w funkcji  $\ln t$ . Wykres ten przedstawia krzywa przebiegająca na rys. 3. Z rys. 3 widać, że oba wykresy do czasu około 1 s pokrywają się; potem podatność obliczona na podstawie promienia koła styku jest w przybliżeniu o 2% większa. Wzrost ten można przypisać niewielkiej zmianie temperatury (gdyż aparat na rys. 1 nie był termostatowany) i wartości współczynnika Poissona odbiegającej od wymaganej przez teorię wartości 0,5.

Na podstawie wykresu podatności na rys. 3 można znaleźć wielkości charakteryzujące żywicę pod względem lepkosprężystym. Przyjmując, że materiał podstawy jest reprezentowany modelem liniowym, złożonym ze sprężyny ( $E_0$ ), tłumika ( $\eta_0$ ) i nieskończenie wielu



Rys. 3. Wykresy podatności  $J = \varepsilon(t)/\sigma$  żywicy epoksydowej P 53 na rozciąganie w stałej temperaturze  $20,5^\circ\text{C}$ ; krzywą ciągłą sporządzono na podstawie obserwacji narastania średnicy koła styku, kreśląc  $4a^3(t)/3PR$  jako funkcję  $\ln t$ ; krzywą przerywaną — na podstawie obserwacji pełzania beleczki poddanej stałej sile rozciągającej



Rys. 4. Pierwsze przybliżenie logarytmicznego widma czasów opóźnień dla żywicy epoksydowej P 53 w temperaturze  $20,5^\circ\text{C}$

elementów Voigta o zmieniających się w sposób ciągły  $E$  i  $\eta$  połączonych szeregowo otrzymujemy na podatność na rozciąganie tego modelu wzór

$$J = \frac{\varepsilon}{\sigma} = \frac{1}{E_0} + \int_0^{\infty} f(\tau)[1 - e^{-t/\tau}] d\tau + \frac{t}{\eta_0},$$

gdzie  $\tau = \eta/E$  jest czasem opóźnienia poszczególnego elementu Voigta, funkcja  $f(\tau)$  — funkcją rozkładu podatności na poszczególne czasy opóźnień, zwana też *widmem czasów opóźnień*.

Funkcję  $L$  rozkładu podatności na  $\ln \tau$ :  $L(\ln \tau) = \tau f(\tau)$  zwaną *logarytmicznym widmem czasów opóźnień* uzyskano z wykresu na rys. 3 metodą STAVERMANA i SCHWARTZLA [4] różniczkując graficznie tę krzywą. Rysunek 4 przedstawia pierwsze przybliżenie logarytmicznego widma czasów opóźnień dla żywicy P 53. Sprężystość natychmiastowa odczytana z pierwszego zdjęcia powierzchni styku  $E_0 = 6600 \text{ N/cm}^2$ , odczytana z krzywej pełzania belecзки  $7500 \text{ N/cm}^2$ .

### 3. Wnioski

Wyznaczanie *widma czasów opóźnień* przez obserwację narastania powierzchni styku kuli z półprzestrzenią lepkosprężystą jest metodą wymagającą spełnienia podanych, na wstępie założeń, a zatem nie zawsze dającą się zastosować. Moment pierwszego zdjęcia fotograficznego jest niepewny z dokładnością do czasu przesuwu jednej klatki. Wynika stąd niepewna wartość modułu sprężystości natychmiastowej  $E_0$ . Wyznaczanie widm korzystniejszej jest zatem oprzeć na obserwacji pełzania prętów przy rozciąganiu lub skręcaniu z zapisem ciągłym wielkości odkształcenia.

Narastanie powierzchni styku z czasem jest przyczyną zależności siły tarcia statycznego przy ślizganiu i toczeniu ciał po podłożu lepkosprężystym od czasu nieruchomego kontaktu. Po przyłożeniu do ciała spoczywającego siły stycznej do powierzchni podstawy i stopniowym jej zwiększeniu, następuje nagły skok ciała z dużą prędkością, któremu towarzyszy wydobycie się ciała z zagłębienia, w którym spoczywało.

Z problemem narastania powierzchni styku należy liczyć się przy składowaniu przedmiotów sporządzonych z materiałów lepkosprężystych, gdyż poddane stałemu naciskowi mogą się trwale odkształcać, a w przypadku dużej adhezji — szepiać.

### Literatura cytowana w tekście

1. H. HERTZ, J. für Reine und Angewandte Mathematik, B. 29, S. 259, 1882.
2. E. LEE, J. R. M. RADOK, *Stress analysis in linearly viscoelastic materials*. IX Congress International de Mécanique Appliquée, v. V, 321-329, Univ. de Bruxelles, 1957.
3. J. HALAUNBRENNER, A. KUBISZ, Mech. Teor. i Stos. 1, 5, (1967).
4. A. J. STAVERMAN, E. SCHWARTZL, Die Physik der Hochpolymeren, Berlin, Springer, 1956, vol. 4, S. 44.

### Резюме

#### ОБЛАСТЬ КОНТАКТА ЖЕСТКОГО ШАРА С ВЯЗКО-УПРУГИМ ПОЛУПРОСТРАНСТВОМ

Область контакта жесткого шара прижимаемого нормальной силой  $P$  к изотропному вязко-упругому полупространству представляет собой круг, радиус которого увеличивается со временем. Эту задачу теоретически решили Ли и Радок (Конгресс Инт. прикл. мех. Брюссель 1957 г.).

Полученное решение связывает радиус круга контакта  $a(t)$  с функцией ползучести материала и дает возможность экспериментально определить функцию ползучести на основании наблюдения роста  $a$  при постоянной температуре.

При эксперименте использовано толстую плиту из мягкой эпоксидовой смолы P 53 и стеклянную линзу с радиусом кривизны  $R = 10,5$  см. Область стыка смолы, для уменьшения трения и увеличения оптического контакта натирается  $M_oS_2$ . Линзу расположено на плите снимая непрерывно на киноплёнке область контакта: в течение первой 1,5 минуты (20 кадров в секунду), затем после 5, 10, 20 и 40 минут и далее после 1, 2, 4 и 8 часов и т. д. в течение трех суток при постоянной температуре  $20,5^\circ\text{C}$ . Изготовлено диаграмму:  $a^3 \frac{4}{3RP}$  в функции времени в полулогарифмической координатной системе, получая кривые функции ползучести смолы. Для сравнения определяются функции ползучести при растяжении стержня, изготовленного из той же самой смолы при той же температуре. Обе кривые совпадают с собой с точностью до 2%. На основании полученной функции ползучести определяется мгновенная податливость и спектр времен запоздании смолы P 53 при постоянной температуре  $20,5^\circ\text{C}$ .

### Summary

#### THE CONTACT ZONE BETWEEN A RIGID SPHERE AND A VISCO-ELASTIC HALF-SPACE

The contact zone between a rigid sphere and a visco-elastic isotropic half-space under the normal compressible force takes the form of a circle with the radius increasing with the time. This problem has been theoretically solved by Lee and Radok (1957). The obtained relation between the radius of the contact circle  $a(t)$  and the creep-function enables us to find experimentally the creep-function on the basis of observed growth of the radius  $a$ .

A thick plate of the soft epoxy resin P 53 and a glass lens with the radius  $R = 10,5$  cm have been used. The contact surface was covered by a thin layer of  $M_oS_2$  in order to minimize the friction and to improve the optical contrast. The contact zone between the lense and the plate was filmed during the first 1,5 min. (20 pictures per minute), and then photographed after 5, 10, 20, 40 minutes and 1, 2, 4, 8 hours and so on during 3 days. The constant temperature  $20,5^\circ\text{C}$  was maintained during the test.

As the results the diagram of the magnitude  $a^3 \frac{4}{3RP}$  as the function of the time was plotted. This diagram represents the creep-function. For comparison the creep-function was also experimentally determined from the tension bar test. Both curves almost coincide, the difference being less than 2%.

Using the creep function the retardation spectrum was determined for the P 53 resin in the constant temperature  $20,5^\circ\text{C}$ .

POLITECHNIKA KRAKOWSKA

*Praca została złożona w Redakcji dnia 27 grudnia 1968 r.*