MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
3, 7 (1969)

ZAGADNIENIE OSIOWO-SYMETRYCZNE DLA OBSZARÓW SPRĘŻYSTYCH NIEŚCIŚLIWYCH OGRANICZONYCH KULISTYMI POWIERZCHNIAMI

ELENA ZŁATANOWA (WARSZAWA)

Niniejsza praca przedstawia ogólne rozwiązanie zagadnienia osiowo-symetrycznego dla obszarów kulistych nieściśliwych. Ogólne równania dla ciała sprężystego nieściśliwego są wyprowadzone na podstawie klasycznej teorii sprężystości przy założeniu w jej równaniach współczynnika Poissona $\nu = 0{,}5$ [1]. Z takimi zagadnieniami spotykamy się w przypadkach, gdy zmianę objętości materiału można pominąć.

W pracy [2] dokonano obszernej analizy istniejących rozwiązań pokrewnych zagadnień dla obszarów ściśliwych. W analizie tej główne miejsce zajmuje rozwiązanie Thomsona dla równowagi sprężystej ściśliwej kuli i zagadnienie Goodiera koncentracji naprężeń wokół pustki kulistej lub wtrącenia kulistego przy jednorodnym rozciąganiu lub ściskaniu. Sama praca [2] przedstawia uogólnienie rozwiązania Goodiera dla problemów osiowo-symetrycznych. Przyjęte zostały zmodyfikowane równania Thomsona.

W niniejszej pracy jest rozwiązany taki problem przy założeniu nieściśliwości.

1. Podstawowe równania

Dla ciała sprężystego nieściśliwego, dla którego jest spełnione prawo Hooke'a zakładamy, że $\nu = 0{,}5$, skąd $E = 3G$. Otrzymujemy

$$
\begin{aligned}
3G\varepsilon_x &= \sigma_x - \frac{1}{2}(\sigma_y+\sigma_z),\\
3G\varepsilon_y &= \sigma_y - \frac{1}{2}(\sigma_z+\sigma_x),\\
3G\varepsilon_z &= \sigma_z - \frac{1}{2}(\sigma_x+\sigma_y).
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

Wprowadzając oznaczenie $p = \frac{1}{3}(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)$, otrzymamy następnie

$$
\begin{aligned}
\sigma_x &= 2G\varepsilon_x + p, & \tau_{xy} &= G\gamma_{xy},\\
\sigma_y &= 2G\varepsilon_y + p, & \tau_{yz} &= G\gamma_{yz},\\
\sigma_z &= 2G\varepsilon_z + p, & \tau_{zx} &= G\gamma_{zx},
\end{aligned}
\tag{1.2}
$$

przy czym $p(x, y, z)$ jest dowolną funkcją.

Jeżeli $u = u(x, y, z)$, $v = v(x, y, z)$, $w = w(x, y, z)$ są funkcjami przemieszczeń, to z równań (1.2), równań równowagi i z warunku nieściśliwości

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0 \tag{1.3}$$

otrzymamy układ równań w przemieszczeniach dla ośrodków nieściśliwych w postaci

$$\begin{aligned} G\nabla^2 u+\frac{\partial p}{\partial x}+X&=0,\\ G\nabla^2 v+\frac{\partial p}{\partial y}+Y&=0,\\ G\nabla^2 w+\frac{\partial p}{\partial z}+Z&=0. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Tu $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$, a X, Y, Z są siłami masowymi na jednostkę objętości.

2. Ogólne zależności dla obszarów kulistych

Wprowadzamy następujące funkcje przemieszczeń (por. [3]):

$$\begin{aligned} 2Gu &= \varrho^2\frac{\partial \Psi}{\partial x}+\frac{\partial \Phi}{\partial x}+x\omega,\\ 2Gv &= \varrho^2\frac{\partial \Psi}{\partial y}+\frac{\partial \Phi}{\partial y}+y\omega,\\ 2Gw &= \varrho^2\frac{\partial \Psi}{\partial z}+\frac{\partial \Phi}{\partial z}+z\omega, \end{aligned} \tag{2.1}$$

gdzie $\varrho^2 = x^2+y^2+z^2$,

$$\begin{aligned} \Psi &= \sum_\lambda A_\lambda \Psi_\lambda(x, y, z),\\ \omega &= \sum_\lambda B_\lambda \Psi_\lambda(x, y, z),\\ \Phi &= \sum_\lambda \Phi_\lambda(x, y, z), \end{aligned} \tag{2.2}$$

przy czym A_λ, B_λ są stałymi, a Ψ_λ, Φ_λ są jednorodnymi harmonicznymi funkcjami rzędu λ. Funkcje takie spełniają następujące tożsamości

$$\begin{aligned} x\frac{\partial \Psi_\lambda}{\partial x}+y\frac{\partial \Psi_\lambda}{\partial y}+z\frac{\partial \Psi_\lambda}{\partial z} &= \lambda\Psi_\lambda,\\ x\frac{\partial \Phi_\lambda}{\partial x}+y\frac{\partial \Phi_\lambda}{\partial y}+z\frac{\partial \Phi_\lambda}{\partial z} &= \lambda\Phi_\lambda. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Działając na (2.1) operatorem Laplace'a, otrzymujemy

$$
\begin{aligned}
2G\nabla^2 u &= \nabla^2\left(\varrho^2\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)+\nabla^2\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)+\nabla^2(x\omega),\\
2G\nabla^2 v &= \nabla^2\left(\varrho^2\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right)+\nabla^2\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)+\nabla^2(y\omega),\\
2G\nabla^2 w &= \nabla^2\left(\varrho^2\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)+\nabla^2\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)+\nabla^2(z\omega).
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

Uwzględniając teraz fakt, że dla funkcji harmonicznych zachodzą zależności

$$
\nabla^2\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x},\frac{\partial\Phi}{\partial y},\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)\nabla^2\Phi=0,
$$

$$
\nabla^2(x\omega,\,y\omega,\,z\omega)=\left(2\frac{\partial\omega}{\partial x},2\frac{\partial\omega}{\partial y},2\frac{\partial\omega}{\partial z}\right),
$$

$$
\nabla^2(\varrho^2\Psi)=2(2\lambda+3)\Psi,
$$

możemy przekształcić pierwsze wyrazy po prawej stronie równości (2.4).

$$
\begin{aligned}
\nabla^2\left(\varrho^2\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right) &= \nabla^2\left[\frac{\partial}{\partial x}(\varrho^2\Psi)-2x\Psi\right]=\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2(\varrho^2\Psi)-\nabla^2 2x=2(2\lambda+1)\frac{\partial\Psi}{\partial x}.\\
\nabla^2\left(\varrho^2\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right) &= \nabla^2\left[\frac{\partial}{\partial y}(\varrho\Psi)-2y\Psi\right]=2(\lambda+1)\frac{\partial\Psi}{\partial y},\\
\nabla^2\left(\varrho^2\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right) &= \nabla^2\left[\frac{\partial}{\partial z}(\varrho^2\Psi)-2z\Psi\right]=2(\lambda+1)\frac{\partial\Psi}{\partial z}.
\end{aligned}
\tag{2.5}
$$

Ostatecznie (2.4) można przedstawić w następującej postaci

$$
\begin{aligned}
G\nabla^2 u &= (2\lambda+1)\frac{\partial\Psi}{\partial x}+\frac{\partial\omega}{\partial x},\\
G\nabla^2 v &= (2\lambda+1)\frac{\partial\Psi}{\partial y}+\frac{\partial\omega}{\partial y},\\
G\nabla^2 w &= (2\lambda+1)\frac{\partial\Psi}{\partial z}+\frac{\partial\omega}{\partial z}.
\end{aligned}
\tag{2.6}
$$

Podstawiając teraz (2.6) do (2.4) otrzymamy ostatecznie układ trzech równań różniczkowych na funkcje p, Ψ, ω.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial p}{\partial x} &= -\left[(2\lambda+1)\frac{\partial\Psi}{\partial x}+\frac{\partial\omega}{\partial x}+X\right],\\
\frac{\partial p}{\partial y} &= -\left[(2\lambda+1)\frac{\partial\Psi}{\partial y}+\frac{\partial\omega}{\partial y}+Y\right],\\
\frac{\partial p}{\partial z} &= -\left[(2\lambda+1)\frac{\partial\Psi}{\partial z}+\frac{\partial\omega}{\partial z}+Z\right].
\end{aligned}
\tag{2.7}
$$

Układ ten jest niesprzeczny, jeśli są spełnione warunki całkowalności, które w przypadku układu (2.7) sprowadzają się do

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}, \quad \frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial y}, \quad \frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial Z}.$$

Jeśli więc pole sił masowych jest polem potencjalnym, to możemy w jednospójnym obszarze jednoznacznie wyznaczyć funkcję $p(x, y, z)$

$$p = \\ = \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x,y,z)} \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz = -\int_{(x_0, y_0, z)}^{(x,y,z)} (G\nabla^2 u + X)dx + (G\nabla^2 v + Y)dy + (G\nabla^2 w + Z)dz.$$

W szczególnym przypadku kiedy nie ma sił masowych ($X = Y = Z = 0$), otrzymujemy stąd

$$p(x, y, z) = -\sum_{\lambda} [(2\lambda+1)A_\lambda + B_\lambda]\Psi_\lambda. \tag{2.8}$$

Z (2.1) można łatwo wyprowadzić następujące wzory:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \varrho^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + x\frac{\partial}{\partial x}(2\Psi + \omega) + \omega, \\
\varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = \varrho^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + y\frac{\partial}{\partial y}(2\Psi + \omega) + \omega, \\
\varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} = \varrho^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + z\frac{\partial}{\partial z}(2\Psi + \omega) + \omega, \\
\gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 2\varrho^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} + 2\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} + 2y\frac{\partial \Psi}{\partial x} + 2x\frac{\partial \Psi}{\partial y} + y\frac{\partial \omega}{\partial x} + x\frac{\partial \omega}{\partial y}, \\
\gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 2\varrho^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y \partial z} + 2\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial z} + 2z\frac{\partial \Psi}{\partial y} + 2y\frac{\partial \Psi}{\partial z} + z\frac{\partial \omega}{\partial y} + y\frac{\partial \omega}{\partial z}, \\
\gamma_{zx} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = 2\varrho^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z \partial x} + 2\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial x} + 2x\frac{\partial \Psi}{\partial z} + 2z\frac{\partial \Psi}{\partial x} + x\frac{\partial \omega}{\partial z} + z\frac{\partial \omega}{\partial x}.
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Dla problemu osiowo-symetrycznego we współrzędnych kulistych

$$x = \varrho\sin\theta\cos\varphi, \quad y = \varrho\sin\theta\sin\varphi, \quad z = \varrho\cos\theta, \quad \text{a} \quad \Phi = \Phi(\varrho, \theta), \quad \psi = \Psi(\varrho, \theta),$$

przemieszczenia i odkształcenia przedstawiają się następująco

$$\begin{aligned}
u_\varrho &= \frac{1}{2G}\left(\varrho^2 \frac{\partial \Psi}{\partial \varrho} + \frac{\partial \Phi}{\partial \varrho} + \varrho\omega\right), \\
v_\varphi &= 0, \\
w_\theta &= \frac{1}{2G}\left[\varrho\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\Psi + \frac{1}{\varrho^2}\Phi\right)\right];
\end{aligned} \tag{2.10}$$

$$(2.11)\qquad \begin{aligned} \varepsilon_\rho &= \frac{\partial u_\rho}{\partial \varrho} = \frac{1}{2G}\left[\varrho^2\frac{\partial^2\Psi}{\partial\varrho^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial\varrho^2} + \varrho\frac{\partial}{\partial\varrho}(2\Psi+\omega)+\omega\right],\\ \varepsilon_\theta &= \frac{\partial w_\theta}{\partial\theta} + \frac{u\varrho}{\varrho} = \frac{1}{2G}\left[\varrho\frac{\partial\Psi}{\partial\varrho} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial\Phi}{\partial\varrho} + \frac{\partial}{\partial\theta^2}\left(\Psi+\frac{1}{\varrho^2}\Phi\right)+\omega\right],\\ \varepsilon_\varphi &= -(\varepsilon_\rho+\varepsilon_\theta)\\ \gamma_{\rho\theta} &= \frac{\partial w_\theta}{\partial\varrho} - \frac{w_\theta}{\varrho} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial u_\rho}{\partial\theta} = \frac{1}{2G}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(2\varrho\frac{\partial\Psi}{\partial\varrho}+\omega\right)+2\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\varrho}\frac{\partial\Phi}{\partial\varrho}-\frac{\Phi}{\varrho^2}\right)\right]; \end{aligned}$$

$$(2.12)\qquad \begin{aligned} \sigma_\rho &= 2G\varepsilon_\rho+p,\\ \sigma_\varphi &= 2G\varepsilon_\varphi+p,\\ \sigma_\theta &= 2G\varepsilon_\theta+p. \end{aligned}$$

Z warunku nieściśliwości (1.3) podstawiając (2.9), otrzymamy

$$\frac{1}{2G}\left[\varrho^2\nabla^2\Psi+\nabla^2\Phi+\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)(2\Psi+\omega)+3\omega\right] = 0.$$

Warunek ten jest spełniony, gdy

$$(2.13)\qquad \frac{A_\lambda}{B_\lambda} = -\frac{\lambda+3}{2\lambda}.$$

Zachodzi to jeśli przyjmiemy na przykład

$$(2.14)\qquad A_\lambda = \lambda+3, \qquad B_\lambda = -2\lambda.$$

Można wykazać, że (2.14) wyczerpuje wszystkie rozwiązania.

3. Zagadnienie zewnętrzne

Istotne znaczenie dla obliczeń ma fakt, czy punkty $\varrho = 0$ i $\varrho = \infty$ należą do rozpatrywanego obszaru czy nie. W związku z tym traktujemy oddzielnie przypadek a), dla którego wszystkie promienie ϱ są większe od pewnej ustalonej wielkości R, $\varrho > R$ i przypadek b), dla którego wszystkie promienie ϱ są mniejsze od pewnej ustalonej wielkości R, $\varrho < R$. Zagadnienie a) nazywamy dalej zagadnieniem zewnętrznym, a zagadnienie b) zagadnieniem wewnętrznym. Podamy tutaj podstawowe równania dla obu przypadków, zaczynając od zagadnienia zewnętrznego $\varrho > R$. Sytuacja taka zachodzi na przykład przy rozpatrywaniu pustki kulistej.

Funkcje przemieszczeń mają postać

$$(3.1)\qquad \begin{aligned} \Psi &= \sum_n A_{z,n} a_n S^{n+1} P_n(t),\\ \omega &= \sum_n B_{z,n} a_n S^{n+1} P_n(t),\\ \Phi &= R^2 \sum b_n S^{n+1} P_n(t), \end{aligned}$$

gdzie $S = \frac{R}{\varrho}$, $t = \cos\theta$, zaś $P_n(t)$ jest wielomianem Legendre'a [4,5]; rząd jednorodności $\lambda = -(n+1)$. Zgodnie z (2.14) $A_{z,n} = -n+2$, $B_{z,n} = 2(n+1)$.

Wprowadzając za pracą [2] oznaczenia[1]

$$
\begin{aligned}
C^*_{z,n}(S) &= n(n+1)S^{n+1}a_n-(n+1)S^{n+3}b_n,\\
D^*_{z,n}(S) &= (2-n)S^{n+1}a_n+S^{n+3}b_n,\\
F^*_{z,n}(S) &= -n^2(n+1)S^{n+1}a_n+(n+1)(n+2)S^{n+3}b_n,\\
N_{z,n}(S) &= -n(2n-1)S^{n+1}a_n,\\
H^*_{z,n}(S) &= n(n+1)(n-1)S^{n+1}a_n-(n+1)^2S^{n+3}b_n,\\
K^*_{z,n}(S) &= (n^2-1)S^{n+1}a_n-(n+2)S^{n+3}b_n,
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

zgodnie z (3.1), (2.9), (2.10), (2.11), (2.12) otrzymamy

$$
\begin{aligned}
u_\rho &= \frac{1}{2G}\varrho\sum_n C^*_{z,n}(S)P_n(t),\\
w_\theta &= \frac{1}{2G}\varrho\sum_n D^*_{z,n}(S)\frac{dP_n(t)}{d\theta},\\
p &= \sum_n N_{z,n}(S)P_n(t);
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_\rho &= \frac{1}{2G}\sum_n F^*_{z,n}(S)P_n(t),\\
\varepsilon_\theta &= \frac{1}{2G}\sum_n C^*_{z,n}(S)P_n(t)+D^*_{z,n}(S)\frac{d^2P_n(t)}{d\theta^2},\\
\varepsilon_\varphi &= \frac{1}{2G}\sum_n H^*_{z,n}(S)P_n(t)-D^*_{z,n}(S)\frac{d^2P_n(t)}{d\theta^2},\\
\gamma_{\rho\theta} &= \frac{1}{2G}\sum_n K^*_{z,n}(S)\frac{dP_n(t)}{d\theta};
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

$$
\begin{aligned}
\sigma_\rho &= \sum_n [F^*_{z,n}(S)+N_{z,n}(S)]P_n(t),\\
\sigma_\theta &= \sum_n [C^*_{z,n}(S)+N_{z,n}(S)]P_n(t)+D^*_{z,n}(S)\frac{d^2P_n(t)}{d\theta^2},\\
\sigma_\varphi &= \sum_n [H^*_{z,n}(S)+N_{z,n}(S)]P_n(t)-D^*_{z,n}(S)\frac{d^2P_n(t)}{d\theta^2},\\
\tau_{\rho\theta} &= \sum_n K^*_{z,n}(S)\frac{dP_n(t)}{d\theta}.
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

[1] Oznaczenia przyjęto jak w pracy [2]

4. Zagadnienie wewnętrzne

Rozpatrujemy teraz zagadnienie wewnętrzne, $\varrho < R$. Sytuacja taka zachodzi na przykład w przypadku pełnej kuli o skończonym promieniu. Funkcje przemieszczeń mają postać

$$\begin{aligned} \Psi &= \sum_n A_{w,n} c_n q^n P_n(t), \\ \omega &= \sum_n B_{w,n} c_n q^n P_n(t), \\ \Phi &= R^2 \sum d_n q^n P_n(t), \end{aligned} \tag{4.1}$$

gdzie $q = \dfrac{\varrho}{R}$, $t = \cos\theta$, $P_n(t)$ jest wielomianem Legendre'a, rząd jednorodności $\lambda = n$. Zgodnie z (2.14) $A_{w,n} = n+3$, $B_{w,n} = -2n$.

Wprowadzając oznaczenia

$$\begin{aligned} C^*_{w,n}(q) &= n(n+1)c_n q^n + nd_n q^{n-2}, \\ D^*_{w,n}(q) &= (n+3)c_n q^n + d_n q^{n-2}, \\ N_{w,n}(q) &= 2n-(2n+1)(n+3)c_n q^n, \\ F^*_{w,n}(q) &= n(n+1)^2 c_n q^n + n(n-1)d_n q^{n-2}, \\ H^*_{w,n}(q) &= -n(n+1)(n+2)c_n q^n - n^2 d_n q^{n-2}, \\ K^*_{w,n}(q) &= n(n+2)c_n q^n + (n-1)d_n q^{n-2}, \end{aligned} \tag{4.2}$$

zgodnie z (4.1), (2.9), (2.10), (2.11), (2.12), otrzymamy:

$$\begin{aligned} u_\rho &= \frac{1}{2G} \varrho \sum_n C^*_{w,n}(q) P_n(t), \\ w_\theta &= \frac{1}{2G} \varrho \sum_n D^*_{w,n}(q) \frac{dP_n(t)}{d\theta}, \\ p &= \sum_n N_{w,n} P_n(t); \end{aligned} \tag{4.3}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_\rho &= \frac{1}{2G} \sum_n F^*_{w,n}(q) p_n(t), \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{2G} \sum_n C^*_{w,n}(q) P_n(t) + D^*_{w,n} \frac{d^2 P_n(t)}{d\theta}, \\ \varepsilon_\varphi &= \frac{1}{2G} \sum_n H^*_{w,n}(q) P_n(t) - D^*_{w,n} \frac{d^2 P_n(t)}{d\theta^2}; \end{aligned} \tag{4.4}$$

$$
(4.5)\qquad
\begin{aligned}
\sigma_\rho &= 2G\varepsilon_\rho + p = \sum_n [F^*_{w,n}(q) + N_{w,n}(q)]\,P_n(t),\\
\sigma_\theta &= 2G\varepsilon_\theta + p = \sum_n [C^*_{w,n}(q) + N_{w,n}(q)]\,P_n(t) + D^*_{w,n}\frac{d^2P_n(t)}{d\theta^2},\\
\sigma_\varphi &= 2G\varepsilon_\varphi + p = \sum_n [H^*_{w,n}(q) + N_{w,n}(q)\,P_n(t) - D^*_{w,n}\frac{d^2P_n(t)}{d\theta^2},\\
\tau_{\rho\theta} &= G\gamma_{\rho\theta} = \sum_n K^*_{w,n}(q)\,\frac{dP_n(t)}{d\theta}.
\end{aligned}
$$

5. Grubościenna powłoka kulista nieściśliwa

Przez sumowanie stanu napięcia dla zagadnienia zewnętrznego i wewnętrznego można uzyskać stan napięcia dla grubościennej powłoki o promieniach wewnętrznym R_1 i zewnętrznym R_2, a więc dla $R_1 < \varrho < R_2$. Funkcje przemieszczeń w tym przypadku będą mieć postać

$$
(5.1)\qquad
\begin{aligned}
\Psi &= \sum_n [A_{z,n}a_nS^{n+1} + A_{w,n}c_nq^n]\,P_n(t),\\
\omega &= \sum_n [B_{z,n}a_nS^{n+1} + B_{w,n}c_nq^n]\,P_n(t),\\
\Phi &= \sum_n [R_1^2b_nS^{n+1} + R_2^2d_nq^n]\,P_n(t).
\end{aligned}
$$

Następnie

$$
(5.2)\qquad
\begin{aligned}
u_\rho &= \frac{1}{2G}\varrho\sum_n [C^*_{z,n}(S) + C^*_{w,n}(q)]\,P_n(t).\\
w_\theta &= \frac{1}{2G}\varrho\sum_n D^*_{z,n}(S) + D^*_{w,n}(q)]\,P_n(t),\\
p &= \sum [N_{z,n}(S) + N_{w,n}(q)]\,P(t);
\end{aligned}
$$

$$
(5.3)\qquad
\begin{aligned}
\varepsilon_\rho &= \frac{1}{2G}\sum_n [F^*_{z,n}(S) + F^*_{w,n}(q)]\,P_n(t),\\
\varepsilon_\theta &= \frac{1}{2G}\sum_n [C^*_{z,n}(S) + C^*_{w,n}(q)]\,P_n(t) + [D^*_{z,n}(S) + D^*_{w,n}(q)]\,\frac{d^2P_n(t)}{d\theta^2},\\
\varepsilon_\varphi &= \frac{1}{2G}\sum_n [H^*_{z,n}(S) + H^*_{w,n}(q)]\,P_n(t) - [D^*_{z,n}(S) + D^*_{w,n}(q)]\,\frac{d^2P_n(t)}{d\theta^2},\\
\gamma_{\rho\theta} &= \frac{1}{G}\sum_n [K^*_{z,n}(S) + K^*_{w,n}(S)]\,\frac{dP_n(t)}{d\theta};
\end{aligned}
$$

$$
(5.4)\qquad
\begin{aligned}
\sigma_\rho &= \sum_n [F^*_{z,n}(S)+F^*_{w,n}(q)+N_{z,n}(S)+N_{w,n}(q)]P_n(t),\\
\sigma_\theta &= \sum_n [C^*_{z,n}(S)+C^*_{w,n}(S)+N_{w,n}(S)+N_{w,n}(q)]P_n(t)+[D^*_{z,n}(S)+D^*_{w,n}(q)]\frac{d^2P_n(t)}{d\theta^2},\\
\sigma_\varphi &= \sum_n [H^*_{z,n}(S)+H^*_{w,n}(S)+N_{z,n}(S)+N_{w,n}(q)]P_n(t)+[D^*_{z,n}(S)+D^*_{w,n}(q)]\frac{d^2P_n(t)}{d\theta^2},\\
\tau_{\rho\theta} &= \sum_n [K^*_{z,n}(S)+K^*_{w,n}(q)]\frac{dP_n(t)}{d\theta},
\end{aligned}
$$

gdzie oznaczenia są określone wzorami (3.2) i (4.2).

6. Pełna kula nieściśliwa poddana działaniu dwóch sił skupionych

Zastosujemy wzory wyprowadzone w p. 4 dla wyznaczenia rozkładu naprężeń i przemieszczeń w pełnej kuli nieściśliwej, obciążonej dwiema siłami skupionymi.

Mamy dla przemieszczeń następujące wzory

$$
(6.1)\qquad
\begin{aligned}
u_\rho &= \frac{1}{2G}\varrho \sum_n{}' [n(n+1)c_nq^n+nd_nq^{n-2}]P_n(t),\\
w_\theta &= \frac{1}{2G}\varrho \sum_n{}' [(n+3)c_nq^n+d_nq^{n-2}]\frac{dP_n(t)}{d\theta}.
\end{aligned}
$$

Okazuje się celowe przedstawienie naprężeń w następującej postaci

$$
(6.2)\qquad
\begin{aligned}
\sigma_\rho &= \sum_n [\alpha_{w,n}c_nq^n+n(n-1)d_nq]^nP_n(t),\\
\sigma_\theta &= \sum_n [\beta_{w,n}c_nq^n+nd_nq^n]P_n(t)+\sum_n ([n+3)c_nq^n+d_nq^{n-2}]\frac{d^2P_n(t)}{\theta^2},\\
\sigma_\varphi &= \sum_n \gamma_{w,n}c_nq^n-n^2d_nq^n]P_n(t)-\sum_n [(n+3)c_nq^n+d_nq^{n-2}]\frac{d^2P_n(t)}{d\theta^2},\\
\tau_{\rho\theta} &= \sum_n \delta_{w,n}c_nq^n+(n-1)d_nq^{n-2},
\end{aligned}
$$

gdzie oznaczyliśmy

$$
(6.3)\qquad
\begin{aligned}
\alpha_{w,n} &= n^3-4n-3, & \beta_{w,n} &= -n^2-4n-3,\\
\gamma_{w,n} &= -n^3-5n^2-7n-3, & \delta_{w,n} &= n(n+3),
\end{aligned}
$$

$q=\frac{\varrho}{R}$, R — promień kuli.

Współczynniki c_n i d_n w powyższych równaniach są niewiadome. Określamy je z warunków brzegowych. Neuber interpretuje działanie sił skupionych na powierzchni kuli w następujący sposób

$$
(6.4)\qquad \sigma^0_\rho = \lim \sigma^0_\rho(n) \quad \tau^0_{\rho\theta} = \tau^0_{\rho\theta}(n) = 0,
$$

gdzie σ_ρ^0 i $\tau_{\rho\theta}^0$ oznaczają naprężenia na brzegu, a

$$\sigma_\rho^0(n) = -\frac{P}{nR^2}(n+1)t^{2n}, \qquad (t = \cos\theta).$$

Autor pracy [6] za pomocą szeregu wielomianów Legendre'a

$$t^{2n} = \frac{1}{2n+1}P_0(t) + \sum_{k=1}^{n}(4k+1)\frac{2n(2n-2)\dots(2n-2k+2)}{(2n+1)(2n+3)\dots(2n+2k+1)}P_{2k}(t),$$

znajduje, przez przechodzenie do granicy dla $n \to \infty$, nową postać stanu naprężenia, odpowiadającą działaniu dwóch sił

$$\sigma_\rho^0 = \frac{1}{2}\sigma_s \sum_{k=0}^{\infty}(4k+1)P_{2k}, \qquad \tau_{\rho\theta}^0 = 0 \qquad \left(\sigma_s = -\frac{P}{nR^2}\right) \tag{6.5}$$

i udowadnia, że

$$\begin{aligned} \sigma_\rho^0 &= 0 && \text{dla} \quad \theta \neq 0, \pi, \\ \sigma_\rho^0 &= -\infty && \text{dla} \quad \theta = 0, \pi. \end{aligned} \tag{6.6}$$

W rozpatrywanym przypadku warunki brzegowe dla $q = \varrho/R = 1$ są

$$\sigma_\rho - \sigma_\rho^0 = 0, \quad \tau_{\rho\theta} - \tau_{\rho\theta}^0 = 0 \qquad \text{dla} \qquad \theta \neq 0, \pi, \tag{6.7}$$

a więc na podstawie (6.5) i (6.2) otrzymamy układ równań algebraicznych, za pomocą którego wyznaczymy współczynniki

$$\begin{aligned} &\alpha_{w,2k}c_{2k}q^{2k} + 2k(2k-1)d_{2k} = \frac{4k+1}{2}\sigma_s, \\ &\delta_{w,2k}c_{2k}q^{2k} + (2k-1)d_{2k} = 0, \end{aligned} \tag{6.8}$$

$$c_{2k} = \frac{4k+1}{2}\cdot\frac{1}{M_{2k}}\sigma_s, \qquad d_{2k} = -\frac{4k+1}{2}\frac{1}{M_{2k}}L_{w,2k}\sigma_s, \tag{6.9}$$

gd ,

$$M_{w,2k} = -8k^2 - 8k - 3, \qquad L_{w,2k} = \frac{\delta_{w,2k}}{2k-1}.$$

Wartości współczynników dla $k = 0, 1, \dots, 7$ są podane w tablicy 1.

Na podstawie równań (6.1) i (6.2) oraz (6.9) stan naprężenia w pełnej nieściśliwej kuli możemy przedstawić w postac i

$$\begin{aligned} u_\rho &= \frac{\sigma_s}{4G}\varrho\sum_{k=0}^{\infty}\frac{4k+1}{M_{w,2k}}[2k(2k+1)q^{2k} - 2kL_{w,2k}q^{2k-2}]P_{2k}(t), \\ w_\theta &= \frac{\sigma_s}{4G}\varrho\sum_{k=0}^{\infty}\frac{4k+1}{M_{w,2k}}[(2k+3)q^{2k} - L_{w,2k}q^{2k-2}]\frac{dP_{2k}(t)}{d\theta}. \end{aligned} \tag{6.10}$$

Tablica 1

k	$M_{w,2k}$	$\delta_{w,2k}$	$L_{w,2k}$	c_{2k}/σ_s	d_{2k}/σ_s
0	−3,0000	0,0000	0,0000	−0,3333	0,0000
1	−17,0000	8,0000	8,0000	−0,4471	1,1768
2	−51,0000	24,0000	8,0000	−0,0882	0,7056
3	−99,0000	48,0000	9,6000	−0,0656	0,6388
4	−163,0000	80,0000	11,4267	−0,0521	0,5953
5	−243,0000	120,0000	13,3333	−0,0432	0,5761
6	−339,0000	168,0000	15,2727	−0,0368	0,5620
7	−451,0000	224,0000	17,2308	−0,0321	0,5531

$$(6.11)\quad \frac{\sigma_\rho}{\sigma_s}=\frac{1}{2}+\frac{40}{19}P_2(t)+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{4k+1}{2M_{w,2k}}\alpha_{w,2k}q^{2k}P_{2k}(t)+$$

$$+\sum_{k=2}^{\infty}-\frac{4k+1}{2M_{w,2k}}L_{w,2k}(2k-1)2kq^{2k-2}P_{2k}(t),$$

$$\frac{\sigma_\theta}{\sigma_s}=\frac{1}{2}-\frac{40}{19}P_2(t)+\frac{20}{19}\frac{d^2P_2(t)}{d\theta^2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4k+1}{2M_{w,2k}}\beta_{w,2k}q^{2k}P_{2k}(t)+$$

$$+\sum_{k=2}^{\infty}-\frac{4k+1}{2M_{w,2k}}2kL_{w,2k}q^{2k-2}P_{2k}(t)+\sum_{k=2}^{\infty}-\frac{4k+1}{2M_{w,2k}}L_{w,2k}q^{2k-2}\frac{d^2P_{2k}(t)}{d\theta^2},$$

$$\frac{\sigma_\varphi}{\sigma_s}=\frac{1}{2}-\frac{80}{19}P_2(t)-\frac{20}{19}\frac{d^2P_{2k}(t)}{d\theta^2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4k+1}{2M_{w,2k}}\gamma_{w,2k}q^{2k}P_{2k}(t)-$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4k+1}{2M_{w,2k}}(2k+3)q^{2k}\frac{d^2P_{2k}(t)}{d\theta^2}+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{4k+1}{2M_{w,2k}}L_{w,2k}q^{2k-2}\frac{d^2P_{2k}(t)}{d\theta^2},$$

$$\frac{\tau_{\rho\theta}}{\sigma_s}=\frac{20}{19}\frac{dP_2(t)}{d\theta}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4k+1}{2M_{w,2k}}\delta_{w,2k}\frac{dP_{2k}(t)}{d\theta}-$$

$$-\sum_{k=2}^{\infty}\frac{4k+1}{2M_{w,2k}}(2k-1)L_{w,2k}q^{2k-2}\frac{dP_{2k}(t)}{d\theta}.$$

Naprężenia w środku kuli wynoszą zatem

$$\sigma_\rho^* = \left[\frac{1}{2} + \frac{40}{19} P_2(t)\right]\sigma_s,$$

$$\sigma_\theta^* = \left[\frac{1}{2} + \frac{40}{19} P_2(t) + \frac{20}{19}\frac{d^2P_2(t)}{d\theta^2}\right]\sigma_s,$$

$$\sigma_\varphi^* = \left[\frac{1}{2} - \frac{80}{19} P_2(t) - \frac{20}{19}\frac{d^2P_2(t)}{d\theta^2}\right]\sigma_s,$$

a główne naprężenia w środku kuli ($\theta = 0$)

$$\sigma_1^* = \sigma_2^* = \frac{21}{38}\frac{P}{\pi R^2}, \qquad \sigma_3^* = -\frac{99}{38}\frac{P}{\pi R^2}.$$

Literatura cytowana w tekście

1. J. GOLECKI, *On the foundations of the theory of elasticity of plane incompressible non-homogeneous bodies* Symposium on Non-Homogeneity in Elasticity and Plasticity, Warszawa 1958.
2. J. GOLECKI, *Pewne zagadnienia osiowo-symetryczne dla obszarów sprężystych ograniczonych kulistym powierzchniami*, Arch. Mech. Stos., 2, 7 (1955).
3. A. E. LOVE, *Treatise on the mathematical theory of elasticity*, Cambridge 1906.
4. Н. Н. ЛЕБЕДЕВ, *Специальные функции и их прилежение*, Москва 1953.
5. E. W. HOBSON, *The theory of spherical and ellipsoidal harmonics*, Cambridge 1931.
6. J. GOLECKI, *Concentrated force acting on a spherical surface*, Bull. Acad. Polon. Sci., Vol. VI, 1958,

Резюме

ОСЕСИММЕТРИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НЕСЖИМАЕМОЙ УПРУГОЙ ОБЛАСТИ ОГРАНИЧЕННОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

Получены выражения для перемещений и напряжений в упругих несжимаемых областях ограниченных сферическими поверхностями. Рассматривается: 1) внешная задача, 2) внутренная задача, 3) толстостенная сферическая оболочка. Выведенные выражения применяются к расчету полной сфери нагреженной двумя сосредоточенными силами. Даются выражения на перемещения и напряжения.

Summary

AXI-SYMMETRIC PROBLEM FOR INCOMPRESSIBLE ELASTIC REGIONS BOUNDED BY SPHERICAL SURFACES

The displacements and stresses in incompressible elastic regions bounded by spherical surfaces have been derived in the three particular cases: 1) External problem (spherical cavity); 2) Internal problem (solid sphere); 3) Thick-walled spherical shell. The formulae derived in the paper are applied to the case of a solid sphere compressed by two concentrated forces. Explicit expressions for displacements and stresses are given.

POLITECHNIKA W SOFII

Praca została złożona w Redakcji dnia 5 marca 1969 r.