

O EFEKCIE SKALI CIAŁA KRUCHEGO WYTRZYMUJĄCEGO USTALONĄ
KONCENTRACJĘ MIKRO-USZKODZEŃ

JANUSZ MURZEWSKI, JÓZEF SOJKA (KRAKÓW)

1. Model ośrodka i mechanizm zniszczenia

Jednostkowa granica wytrzymałości ośrodka kruchego zależy od absolutnych rozmiarów ciała, w tym sensie, że jej wartość oczekiwana jest malejącą funkcją objętości ciała. Prawdliwość ta, zwana efektem skali, została zbadana doświadczalnie i wytłumaczona na gruncie rachunku prawdopodobieństwa przez W. WEIBULLA [12], J. I. FRENKIELA [5], B. B. CZECZULINA [2] i innych autorów [1, 3]. Podstawą heurystyczną teorii efektu skali jest tak zwana hipoteza «najślabszego ogniwa w łańcuchu», według której nośność graniczną całego ciała określa się wytrzymałością miejscową jego najślabszego elementu oraz hipoteza, że w materiale znajdują się przypadkowe, beładnie rozmieszczone uszkodzenia lokalne, czyli miejsca o zaniżonej wytrzymałości.

Metody rozważań, jakie są przedstawicne na podstawie tych hipotez, można by z grubsza rzecz biorąc podzielić na dwa kierunki. Do kierunku pierwszego zaliczymy te prace, w których wprowadza się ciągle funkcje rozkładu minimalnych wartości lokalnej wytrzymałości materiału. W. WEIBULL jako pierwszy tak właśnie postąpił [12], a zaproponowane przez niego prawo rozkładu wartości minimalnych okazało się trafne i zyskało duże rozpowszechnienie [13]. Dalszy rozwój tego kierunku, dla którego charakterystyczne jest traktowanie materiału jako ośrodka ciągłego, polegać chyba będzie na zastosowaniach teorii stacjonarnych funkcji stochastycznych [8].

Drugi kierunek — to użycie klasycznych schematów losowania i «dyskretnych» funkcji rozkładu, np. funkcji rozkładu Bernoulliego. Stosując tę metodę należy sobie wyobrazić ciało jako zbiór cząstek, w których mogą występować defekty. Z reguły uwzględnia się niejednorodność tych defektów i charakteryzuje się je funkcją prawdopodobieństw Gaussa, Pearsona lub inną. Ten punkt widzenia został przedstawiony np. w pracy T. A. KONTOROWEJ i J. I. FRENKIELA [5]. W tym ujęciu poszukiwania teoretyczne zwrócone są w kierunku określenia prawdopodobieństwa rzadko występujących, najbardziej osłabionych cząstek materiału, bo te determinują wytrzymałość całego zbioru. Jednakże w znanych nam pracach nie spotkaliśmy konsekwentnie zastosowanego schematu rzadkich zdarzeń i prawa prawdopodobieństw Poissona. Nawet S. D. WOŁKOW [14], który przedstawia w gruncie rzeczy Poissonowski schemat losowania, dokonuje ostatecznie błędnego przejścia granicznego i aproksymuje końcowe wyniki Gaussowskim rozkładem asymptotycznym (str. 93 monografii [14]).

W niniejszej pracy zjawisko kruchego pęknięcia analizować będziemy w oparciu o uogólnioną (tak jak u S. D. WOŁKOWA) hipotezę najsłabszego ogniwa w łańcuchu i hipotezę przypadkowego rozłożenia defektów przy uwzględnieniu dyskretnej struktury materiału. Zarodek makropęknięcia w ośrodku traktować będziemy jako zdarzenie rzadkie, wywołane nadzwyczajną lokalną kumulacją mikrorys, i prowadzące ostatecznie do zastosowania prawa prawdopodobieństw Poissona. Wyniki, które przedstawimy, będą ogólniejsze od klasycznych wzorów opisujących efekt skali i dlatego ich zakres stosowalności w praktyce może być szerszy.

Przy analizie efektu skali ograniczymy się do ośrodków quasi-jednorodnych, sprężysto-kruchych, początkowo doskonale izotropowych. Przez quasi-jednorodność rozumiemy jednorodność w skali makroskopowej przy jednoczesnej niejednorodności w skali mikroskopowej. Sprężysto-krucha własność mikroelementu polega na tym, że po odkształceniu sprężystym i osiągnięciu przez mikronapężenie s odpowiedniej granicy P następuje momentalnie opadnięcie mikro-napężenia do zera. Sprężysto-krucha własność makroelementu polega na tym, że aż do granicy sprężystości Q materiał podlega prawu Hooke'a, następnie mogą zachodzić nieliniowe odkształcenia na skutek spękania, czyli tzw. plastyczności destrukcyjnej i dopiero po osiągnięciu przez napężenie σ granicy wytrzymałości R następuje rozerwanie ciała. Rozpatrywany jest stan napężenia doskonale jednoosiowy i quasi-jednorodny, a więc s jest zmienną losową a σ — wielkością w pełni określoną.

Przy założeniu doskonałej izotropii początkowej materiału mikrorysy występować będą w płaszczyznach prostopadłych do kierunku działania naprężeń rozciągających. Na skutek takiego spękania materiał nabywa własności anizotropowych. Zagadnienie nabytej anizotropii «destrukcyjnej» w przestrzennym stanie napężenia było już przedmiotem badań doświadczalnych i teoretycznych. Przy uproszczonym podejściu do tego zagadnienia, przedstawionym w pracy [9] i ograniczeniu się do jednoosiowego stanu napężenia jedynym efektem tej anizotropii będą wyżej wspomniane odstępstwa od prawa Hooke'a.

Zakładamy, że materiał ma mikrostrukturę podobną do tej, jaką opisywali w swoich pracach J. MURZEWSKI [9] i S. D. WOŁKOW [14], tzn. polegającą na podziale ośrodka na elementy objętościowe makroskopowe Ω (I rzędu) i mikroskopowe O (II rzędu), czyli na tzw. punkty fizyczne pierwszego i drugiego rodzaju, w stosunku do których stosuje się różne prawa fizyczne. Wymiary elementów makroskopowych szacowane są [9] na 0,1 mm, czyli 10^{-2} cm, tak żeby podlegać badaniom laboratoryjnym, elementów zaś mikroskopowych — na 10^3 Å, czyli 10^{-5} cm, tak żeby zachować jeszcze własności materii ciągłej. Przy tak pomyślanym geometrycznym podziale ośrodka ilość elementów O w elemencie Ω wynosi

$$(1.1) \quad M = \left(\frac{10^{-2}}{10^{-5}} \right)^3 = 10^9,$$

ilość zaś punktów pierwszego rodzaju jest tego samego rzędu już przy stosunkowo małych rozmiarach elementów konstrukcyjnych, bo ~ 10 cm,

$$(1.2) \quad N = \left(\frac{10}{10^{-2}} \right)^3 = 10^9.$$

Można się zatem spodziewać, że przy tak dużej liczbie elementów zachodzą prawa wielkich liczb, które zastosujemy w dalszych rozważaniach tej pracy. Wielkości mikroskopowe O i makroskopowe Ω , a zatem i M będziemy w dalszym ciągu traktować jako stałe dla danego ośrodka kruchego, ale nie będziemy konkretyzować ich wartości. Będą to więc parametry zależne od rodzaju materiału.

W związku z tak przyjętym modelem ośrodka rozróżniamy zniszczenie ośrodka mikroskopowe, czyli drugiego rodzaju, i makroskopowe, czyli pierwszego rodzaju, przy czym to ostatnie przy jednorodnym stanie naprężeń jest równoznaczne z utratą nośności całego ciała. O wytrzymałości materiału decydują losowo rozłożone mikrouszkodzenia (mikrorysy) wewnętrzne, powstające w nim w procesie obciążenia. Element objętościowy drugiego rzędu traci wytrzymałość z chwilą pojawienia się w nim jednej mikrorisy. Natomiast pęknięcie elementu pierwszego rzędu następuje przy pewnej granicznej liczbie mikrorys r uważanej za jedną makrorysę. Liczba naturalna r traktowana jest jako specyficzna stała materiałowa.

Zakładamy, że ciało o objętości V znajduje się w stanie mikronaprężeń s i że s_k , $k = 1, 2, \dots, L$, oznaczają naprężenia panujące w elementach mikroskopowych O_k . Jeżeli granica mikrowytrzymałości elementu O_k wynosi P_k , to mikroskopowy warunek pęknięcia tego elementu zapisujemy w postaci

$$(1.3) \quad s_k \geq P_k.$$

Jest to warunek wystarczający dla powstania stacjonarnej mikrorisy. Jeśli w k -tym elemencie mikroskopowym nie było mikrorisy, to jest to również warunek konieczny. Warunek mikrosójności ma wówczas postać nierówności przeciwnej

$$(1.4) \quad s_k < P_k.$$

Stadium plastyczności destrukcyjnej ośrodka z mikrostrukturą, znajdującego się pod obciążeniem, zaczyna się z chwilą pęknięcia jednego mikroelementu O_k i postępuje do chwili, kiedy w jednym makroelemencie Ω_i , $i = 1, 2, \dots, N$, składającym się z mikroelementów O_j , $j = 1, 2, \dots, M$, ilość zniszczonych punktów fizycznych osiągnie wartość graniczną r . Z tą chwilą następuje pęknięcie elementu Ω_i , czyli utworzenie się rysy, rozprzestrzeniającej się na cały przekrój ciała.

Założenie, że istnieje taka liczba $r > 1$, która charakteryzuje kruche zachowanie się materiału, jest podstawową hipotezą tej pracy. Nie jest to hipoteza nowa, gdyż m. in. S. D. WÓLKOW [14], jak już wspomniano, w ten sposób właśnie uogólnił koncepcję najsłabszego ogniwa w łańcuchu. Istnieje wiele argumentów przemawiających za celowością wprowadzenia takiego uogólnienia. Do nich zaliczyć należy powszechnie znane fakty doświadczalne, że pojedyncze mikropęknięcia rozciąganego ośrodka kruchego, wykrywane np. przez osłuchiwanie stetoskopem, nie powodują całkowitego zerwania ciała. Przemawia za tą hipotezą także fakt, że materiały kruche na granicy wytrzymałości z reguły wykazują odstępstwa od prawa Hooke'a, mimo że odkształcenia plastyczne typu poślizgowego lub lepkiego nie wchodzi w rachubę z uwagi na niskie naprężenie i krótki czas próby. Jeśli doświadczalnie stwierdza się w tym przypadku, że odkształcalność graniczna charakteryzuje wytrzymałość materiału, to ze statystycznej teorii plastyczności destrukcyjnej [9] wynika, że maksymalna koncentracja spękania jest specyficzną stałą ośrodka, a stąd z kolei wniosek, który będzie jeszcze w tej pracy szczegółowo wyprowadzony, że istnieje liczba r

ograniczająca ilość mikrorys w jednym makroelemencie. Nadmienić jednak należy, że hipoteza o stałej liczbie r nie jest jedyna, która pozwala wytłumaczyć fakt, że granica wytrzymałości może przewyższać granicę proporcjonalności ciała kruchego. Dla materiałów kruchych o silnie nieliniowym prawie odkształcenia można interpretować utratę wytrzymałości jako niestateczność stanu naprężenia [9], skąd wcale nie wynika $r = \text{const}$.

W ogólnym przypadku zarówno mikrowytrzymałość P jak też mikronaprężenie s są zmiennymi losowymi. Dla uproszczenia obliczeń i przejrzystości rozważań tylko jedną z tych wielkości będziemy uważać za zmienną losową o skończonej wariancji, a drugą — ustalimy. Kwestia, którą wielkość przyjąć za losową przy wyprowadzaniu statystycznego kryterium pęknięcia, czy mikrowytrzymałość P , jak często zakłada w swych pracach pierwszy z autorów, np. [7, 9], czy też — mikronaprężenie s , jak to czyni S. D. WOŁKOW [14], pozostaje otwartą. W pracy rozpatrzmy obydwaj warianty, jakkolwiek bardziej uzasadnionym wydaje się przyjmowanie za zmienną losową mikrowytrzymałości, gdyż rozrzut mikronaprężeń zależy głównie od zmienności mikroskopowych modułów sprężystości, które nie podlegają tak dużym fluktuacjom jak cechy wytrzymałościowe.

Zakładamy, że rozkłady prawdopodobieństw mikronaprężenia s i logarytmu mikrowytrzymałości $\ln P$ są typu gaussowskiego. Prawo Gaussa bywa z reguły przyjmowane dla scharakteryzowania rozkładu mikronaprężeń lub mikrodefektów w pracach teoretycznych na temat efektu skali [5, 14]. Potwierdzają je ostatnio przeprowadzone mikroskopowe badania eksperymentalne [4]. Logarytmiczno normalne prawo rozkładu dla mikrowytrzymałości jest częściej stosowane niż normalne prawo rozkładu, gdyż usuwa prawdopodobieństwa ujemnych wartości granicy mikrowytrzymałości, nie mające sensu realnego. Poza tym różnice między normalną i logarytmiczno normalną funkcją rozkładu przy niedużych współczynnikach zmienności są bardzo małe. W ogóle można mówić, że rozkład normalny i log-normalny jest rozkładem asymptotycznym dla wielu symetrycznych i niesymetrycznych rozkładów prawdopodobieństw [11] i stosowanie jego ma w pierwszym przybliżeniu znaczenie do pewnego stopnia uniwersalne.

2. Wpływ skali na granicę sprężystości

Korzystamy z następujących oznaczeń:

- V objętość ciała,
- Ω objętość elementu makroskopowego,
- O objętość elementu mikroskopowego,
- L ilość elementów O w ciele o objętości V ,
- N ilość elementów Ω w ciele o objętości V ,
- M ilość elementów O w elemencie o objętości Ω ,
- l ogólna ilość mikrorys w ciele o objętości V ,
- n losowa ilość makropęknięć w ciele o objętości V ,
- m losowa ilość mikrorys w elemencie Ω ,
- \bar{m} średnia ilość mikrorys w elemencie Ω ,
- r graniczna ilość mikrorys w elemencie Ω ,

między którymi zachodzą związki:

$$(2.1) \quad L = M \cdot N,$$

$$(2.2) \quad \Omega = M \cdot O,$$

$$(2.3) \quad V = N \cdot \Omega = M \cdot N \cdot O = L \cdot O,$$

$$(2.4) \quad l = \bar{m} \cdot N.$$

Geometryczne prawdopodobieństwo mikrorys λ , czyli średnia koncentracja zniszczonych mikroelementów O w objętości ciała V wyraża się wzorem

$$(2.5) \quad \lambda = \frac{l}{L} = \frac{\bar{m}}{M} \geq 0.$$

W pracach [7, 9] proponuje się nazwać prawdopodobieństwo λ spękaniami. Spękanie materiałów czysto-kruchych, nie wykazujących efektów ciągliwości (plastyczności poślizgowej itp.), równa się wyężeniu w probabilistycznym sensie tego słowa.

Przyjmujemy najpierw za zmienną losową mikronapężenie s i charakteryzujemy je normalnym prawem rozkładu $N(\bar{s}, \mu)$, o wartości średniej \bar{s} i odchyleniu standardowym μ . Wartość średnia \bar{s} równa się w przybliżeniu makroskopowemu napężeniu głównemu σ , co wynika z prawa akcji i reakcji [9, str. 268],

$$(2.6) \quad \bar{s} = \frac{\sigma}{1-\lambda} \approx \sigma.$$

Powyższą przybliżoną równość wprowadzamy dlatego, że λ w naszych rozważaniach jest liczbą bardzo małą, ponieważ \bar{m} jest liczbą skończoną, a M jest bardzo duże. Wariancja mikronapężeń w ośrodku quasi-jednorodnym wg twierdzenia S. D. WOŁKOWA [14, str. 29] jest proporcjonalna do właściwej energii sprężystej, a więc

$$(2.7) \quad \mu^2 = 2E_0\Phi.$$

gdzie $E_0 \geq 0$ jest stałą materiałową, określającą stopień niejednorodności sprężystej ośrodka.

Energia potencjalna odkształcenia sprężystego dla ośrodka izotropowego w rozpatrywanym jednoosiowym przypadku napężeń wynosi

$$(2.8) \quad \Phi = \frac{\sigma^2}{2E},$$

gdzie E jest ustalonym modułem Younga. A więc odchylenie standardowe mikronapężeń wynosi

$$(2.9) \quad \mu = \sqrt{2E_0\Phi} = \sigma \sqrt{\frac{E_0}{E}}.$$

Wprowadzając symbol v dla oznaczenia współczynnika zmienności dostajemy wzór

$$(2.10) \quad v = \frac{\mu}{\bar{s}} = \sqrt{\frac{E_0}{E}} = \text{const.}$$

W pierwszym wariancie obliczeń traktujemy mikrowytrzymałość P_k mikroelementu σ_k jako jednakową wielkość dla każdego k ,

$$(2.11) \quad P_k \approx \bar{P} = \text{const.}$$

Biorąc pod uwagę (1.4), (2.6) i (2.11) oraz rozkład normalny, wyrażamy prawdopodobieństwo mikrosłójności, czyli koncentrację mikroelementów niezniszczonych następującym wzorem:

$$(2.12) \quad \mathcal{P}(s < \bar{P}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \mu} \int_{-\infty}^{\bar{P}} \exp\left[-\frac{(s-\sigma)^2}{2\mu^2}\right] ds = F(t),$$

gdzie $F(t)$ jest dystrybuantą standaryzowanego rozkładu normalnego,

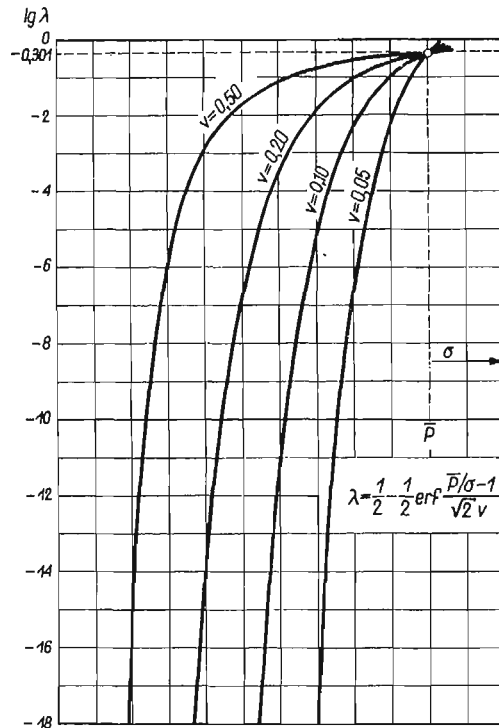
$$t = \frac{\bar{P} - \sigma}{\mu} = \frac{\bar{P}/\sigma - 1}{v}.$$

Prawdopodobieństwo mikrouszkodzenia wynosi

$$(2.13) \quad \mathcal{P}(s \geq \bar{P}) = 1 - F(t)$$

i kojarzy się ze strukturą ośrodka za pomocą wzoru (2.5). Tak więc porównujemy prawdopodobieństwo (2.13) z geometrycznym prawdopodobieństwem mikrouszkodzenia (2.5) i otrzymujemy

$$(2.14) \quad \lambda = 1 - \mathcal{P}\left(\frac{\bar{P}/\sigma - 1}{v}\right).$$



Rys. 1

Zależność λ od σ przy wybranych wartościach parametru v przedstawiono na rys. 1. W granicznym przypadku $v \rightarrow 0$, a więc dla stanu naprężenia idealnie jednorodnego prawdopodobieństwo mikropęknięcia wynosi

$$(2.15) \quad \begin{aligned} \lambda = 0, \quad \text{czyli} \quad l = 0 \quad \text{dla} \quad \sigma < \bar{P} \\ \lambda = 1, \quad \text{czyli} \quad l = L \quad \text{dla} \quad \sigma \geq \bar{P}. \end{aligned}$$

W ogólnym przypadku natomiast

$$(2.16) \quad l = 0 \quad \text{dla} \quad \sigma < Q, \quad l \geq 1 \quad \text{dla} \quad \sigma \geq Q.$$

Symbolem Q oznaczyliśmy granicę sprężystości. Rozgranicza ona stan doskonale spójny, liniowo sprężysty, od mikrozarysowania, czyli plastyczności destrukcyjnej materiału. Dla skończonej liczby L , ilość mikrorys l , a także granica sprężystości Q są zmiennymi losowymi. Medianę \bar{Q} oblicza się z równania

$$(2.17) \quad (1 - \bar{\lambda}_1)^L = \frac{1}{2},$$

gdzie $\bar{\lambda}_1$ wyraża się wzorem (2.14) dla $\sigma = \bar{Q}$, a modę \bar{Q} — metodami podanymi po raz pierwszy przez T. A. KONTOROWĄ i J. I. FRENKIELA [5]. Dla wielkiej liczby $L = M \cdot N$, wg (2.1) i (2.2), i ustalonej średniej ilości mikrorys $\bar{l} = \lambda \cdot L$ wyprowadzamy wzór asymptotyczny, z którego określimy kres górny Q' , realizowany z prawdopodobieństwem równym jedności,

$$(2.18) \quad 1 - (1 - \lambda'_1)^L \rightarrow 1, \quad \text{stąd} \quad \lambda'_1 \rightarrow \frac{1}{L}.$$

Nadmieniamy przy tym, że dla wielkiej liczby L wartość średnia $\bar{\lambda}_1$ dąży do tej samej granicy

$$(2.19) \quad \bar{\lambda}_1 = L \int_0^1 \lambda (1 - \lambda)^{L-1} d\lambda = \frac{1}{L+1} \approx \frac{1}{L}.$$

A więc teoretyczna granica liniowej sprężystości, czyli granica proporcjonalności, jest znikomo mała dla ciał dużej objętości, jak wynika z równań (2.14) i (2.18),

$$(2.20) \quad Q' \rightarrow 0 \quad \text{dla} \quad L \rightarrow \infty.$$

W praktyce określa się $Q'' > Q'$, jako naprężenie konwencjonalne, wywołujące umowną odchyłkę $\Delta \varepsilon$ od prawa Hooke'a (np. $\Delta \varepsilon = 0,0002$). Ponieważ przy plastyczności destrukcyjnej odkształcenie nieliniowe wywołane jest redukcją powierzchni przekroju spójnego (przenoszącego naprężenia) [9], więc praktycznie

$$(2.21) \quad \lambda_1'' = \frac{\Delta \varepsilon}{\varepsilon''}, \quad \text{gdzie} \quad \varepsilon'' = \frac{Q''}{E}.$$

Graniczny warunek proporcjonalności formułujemy jak następuje:

$$(2.22) \quad \lambda_1' = 1 - F(t') \quad \text{lub} \quad t' = \Psi(1 - \lambda_1'),$$

gdzie $t' = \frac{\bar{P}/Q' - 1}{v}$, a $\Psi(x)$ jest funkcją odwrotną do dystrybuanty Gaussa, tzn. $y = \Psi(x)$ gdy $x = F(y)$, (rys. 2).

Wartości x bliskie jedności, odpowiadające dużym, niestabelaryzowanym wartościom argumentu y , wyznacza się ze wzoru asymptotycznego [6, str. 595], rys. 2,

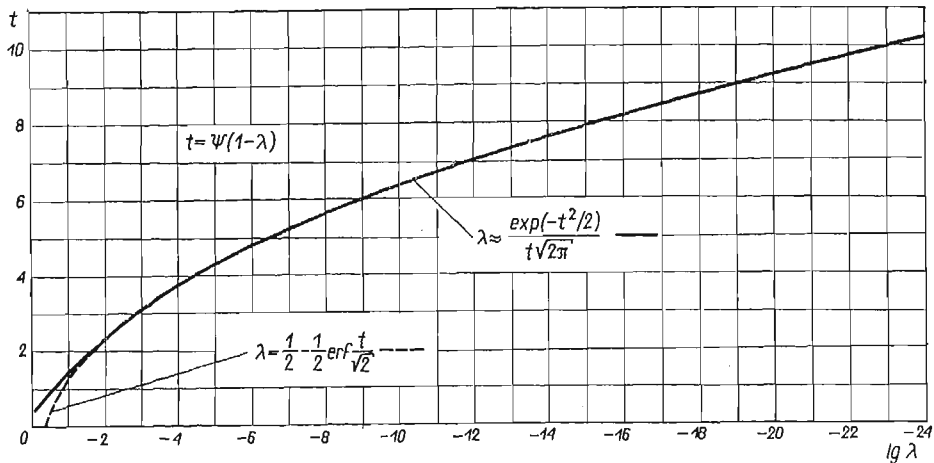
$$(2.23) \quad F(y) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{erf} \frac{y}{\sqrt{2}} = 1 - \frac{1}{2} e^{-\frac{y^2}{2}} \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y^3} + \frac{3}{y^5} - \dots \right).$$

Oznaczając symbolem Q'_0 granicę proporcjonalności próbki o objętości V_0 oraz

$$t'_0 = \frac{\bar{P}/Q'_0 - 1}{v} \quad \text{i} \quad \lambda'_0 = \frac{Q}{V_0},$$

przy czym $t'_0 = \Psi(1-\lambda'_0)$, dostajemy zależność granicy proporcjonalności Q' od objętości ciała V ,

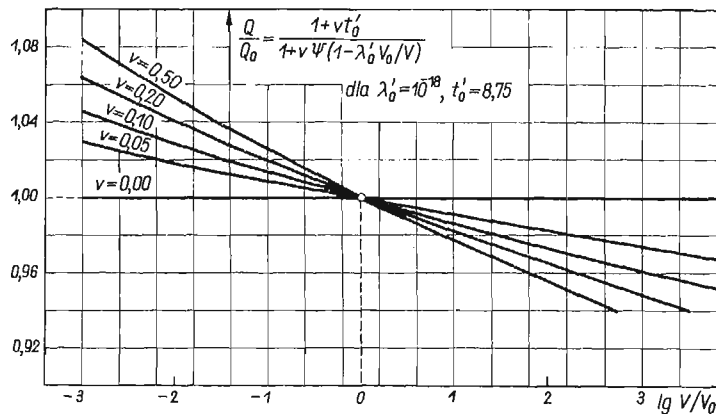
$$(2.24) \quad Q' = Q'_0 \frac{1 + vt'_0}{1 + vt'}.$$



Rys. 2

Zależność (2.24) dla różnych wartości parametru v i przykładowej wartości $\lambda'_0 = 1/L = 10^{-18}$ przedstawiono na rys. 3.

Natomiast konwencjonalna granica sprężystości Q'' , określona równaniami (2.21) i (2.14) dla $\sigma = Q''$, nie zależy od objętości ciała.



Rys. 3

Przyjmijmy teraz w drugim wariancie obliczeń, że materiał quasi-jednorodny charakteryzuje się zmienną losowo mikrowytrzymałością P , a mikronapężenie s_k mikroelementu O_k można w przybliżeniu zastępować w pełni określoną wartością,

$$(2.25) \quad s_k \approx \bar{s} \approx \sigma,$$

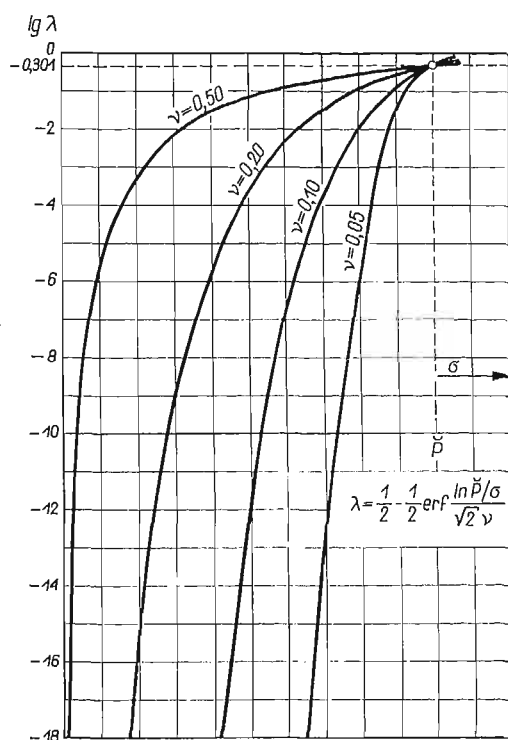
i załóżmy, tak jak to podano w p. 1, że rozkład zmiennej losowej P opisuje prawo logarytmicznonormalne

$$(2.26) \quad f(P) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \nu P} \exp \left[-\frac{\ln^2 P/\check{P}}{2\nu^2} \right],$$

gdzie \check{P} oznacza medianę mikrowytrzymałości, ν logarytmiczny wskaźnik zmienności, $P_0 = \nu\check{P} \approx \nu\check{P}$ jest odchyleniem standardowym.

Jeżeli uwzględnimy mikroskopowy warunek pęknięcia (1.3), to dystrybuanta określona wzorem,

$$(2.27) \quad \mathcal{P}(P \leq \sigma) = \frac{1}{2} \left(1 - \operatorname{erf} \frac{\ln \check{P}/\sigma}{\sqrt{2}\nu} \right),$$



Rys. 4

określa prawdopodobieństwo mikrorys dla naprężenia σ . Porównując ze sobą formuły (2.5) i (2.27) otrzymujemy zależność między naprężeniami σ i koncentracją mikrodefektów λ ,

$$(2.28) \quad \lambda = 1 - F(t),$$

przy czym standaryzowana zmienna losowa ma w tym przypadku postać,

$$t = \frac{\ln \check{P}/\sigma}{\nu}.$$

Zależność λ od σ dla kilku przykładowych wartości logarytmicznego współczynnika zmienności ν przedstawiono na rys. 4. Jeżeli $\nu \rightarrow 0$, czyli materiał jest idealnie jednorodny, to prawdopodobieństwo mikrozniszczenia wynosi, jak w przypadku poprzednim

$$(2.29) \quad \begin{cases} \lambda = 0 & \text{dla } \sigma < \check{P}. \\ \lambda = 1 & \text{dla } \sigma \geq \check{P}. \end{cases}$$

Makroskopową granicę proporcjonalności Q' określa warunek,

$$(2.30) \quad \frac{1}{2} \left(1 - \operatorname{erf} \frac{t'}{\sqrt{2}} \right) = \lambda',$$

gdzie $t' = \frac{\ln \check{P}/Q}{\nu}$, $\lambda' = \frac{O}{V}$.

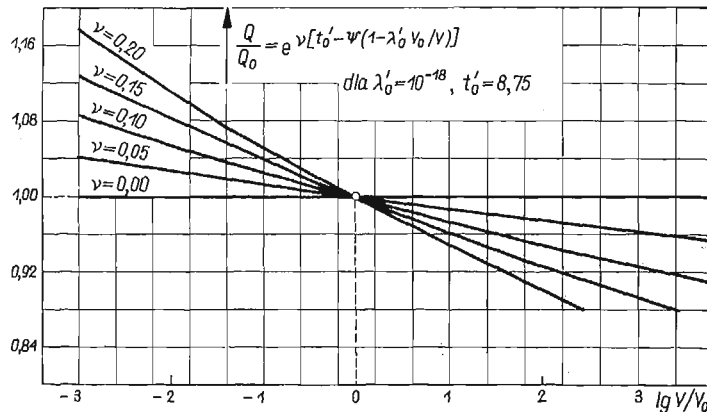
Efekt skali dla granicy proporcjonalności ilustrują wykresy, rys. 5, następującej funkcji,

$$(2.31) \quad Q' = Q'_0 \exp[\nu(t'_0 - t')],$$

gdzie

$$t' = \Psi \left(1 - \lambda'_0 \frac{V_0}{V} \right), \quad \lambda'_0 = 1 - F(t'_0),$$

przy czym parametry Q'_0 , ν , t'_0 niekoniecznie muszą być określone na podstawie doświadczalnego wyznaczenia granic proporcjonalności, bowiem można je określić na podstawie



Rys. 5

łatwiejszych do przeprowadzenia prób wytrzymałości rozdzielczej R , gdyż parametry te figurują (bezpośrednio lub ich funkcje) we wzorach następnego punktu.

Wzór (2.14) jest znany np. z pracy [14] jako statystyczne kryterium mikropęknięcia, a wzór (2.28) jest pewną jego modyfikacją. Nowym aspektem jest interpretacja tych wzorów jako makroskopowego warunku proporcjonalności i sformułowanie wpływu skali na granicę proporcjonalności Q' (2.24) i (2.31), odrębnie od tych formuł, które dotyczyć będą granicy wytrzymałości R .

3. Wpływ skali na granicę wytrzymałości

Analizujemy wytrzymałość elementów konstrukcyjnych o różnej objętości, ale posiadających jednakową mikrostrukturę, czyli wykonanych z tego samego materiału. Wówczas wielkości: r , Ω , O (a zatem i M) oraz \bar{P} , P_0 względnie E , E_0 — są stałe, tzn. nie zależą od rozmiarów ciała, układu odniesienia i obciążeń, a wielkość λ (a zatem i \bar{m}) zmienia się w zależności od naprężenia σ , zaś L (a zatem i N) zmienia się ze zmianą objętości ciała V .

Weźmy pod uwagę ciało o objętości V pozostające w quasi-jednorodnym, jednoosiowym stanie naprężenia i potraktujmy je jako zbiór elementów mikroskopowych O_k , $k = 1, 2, \dots, L$, które mogą mieć jedną z dwóch cech, mianowicie mogą być spójne lub pęknięte. Cechę pęknięcia ma $l = \lambda \cdot L$ elementów, cechę zaś spójności $L-l = L(1-\lambda)$ elementów. Ze zbioru L -elementowego (z objętości V) losujemy jednorazowo (a więc bez zwracania możliwego przy losowaniu kolejnym) próbę liczącą M mikroelementów O_j w postaci jednego makroelementu Ω_i , zawierającego m elementów O pękniętych i $M-m$ elementów spójnych, i pytamy się, jakie jest prawdopodobieństwo zdarzenia, że wylosowany element Ω_i zawiera dokładnie m mikrorys. Opisany powyżej schemat losowania zależnego [11] prowadzi do hipergeometrycznego rozkładu prawdopodobieństw, $\mathcal{P}(m; M, l, L)$. Ponieważ liczebność zbioru L jest bardzo duża w porównaniu z określoną liczebnością próby M :

$$\frac{M}{L} = \frac{1}{N} \ll 1$$

zgodnie ze wzorem (1.2), przeto możemy aproksymować rozkład hipergeometryczny rozkładem dwumianowym $\mathcal{P}(m; M, \lambda)$ przy zachowaniu ustalonej wartości średniej koncentracji mikrorys,

$$(3.1) \quad \lambda = \frac{l}{L}.$$

Z kolei rozkład dwumianowy, w warunkach gdy

$$1/M \ll 1$$

zgodnie ze wzorem (1.1), możemy aproksymować rozkładem Poissona $\mathcal{P}(m; \bar{m})$ przy zachowaniu średniej ilości mikrorys w makroelementie

$$(3.2) \quad \bar{m} = \lambda M.$$

Chcielibyśmy tutaj zwrócić uwagę na fakt, że dzięki poprawnie sformułowanemu schematowi losowania średnie charakterystyki spękania λ i \bar{m} zachowują swe skończone, ustalone wartości przy kolejnych przejściach granicznych. W monografii [14] w tym zagadnieniu zachodzą osobliwości: $\lambda \rightarrow 0$, a następnie $\bar{m} \rightarrow \infty$, i wyniki mimo dalszych korekt i adiustacji nie są wolne od sprzeczności.

Poissonowski rozkład asymptotyczny zastosujemy do oszacowania prawdopodobieństwa pęknięcia makroelementu,

$$(3.3) \quad \mathcal{P}(m \geq r) = 1 - e^{-\bar{m}} \sum_{i=0}^{r-1} \frac{\bar{m}^i}{i!}.$$

Wzór (3.3) podaje kombinatoryczne prawdopodobieństwo pęknięcia, natomiast geometryczne prawdopodobieństwo makrorysu równa się średniej koncentracji zniszczonych elementów Ω w objętości ciała V ,

$$(3.4) \quad p = \frac{n}{N}.$$

Porównując ze sobą wzory (3.3) i (3.4) otrzymujemy związek

$$(3.5) \quad \frac{n}{N} = e^{-\bar{m}} \sum_{i=r}^{\infty} \frac{\bar{m}^i}{i!},$$

który po uwzględnieniu uogólnionej koncepcji najsłabszego ogniwa w łańcuchu (stosowanej w myśl założeń tylko do makroelementów),

$$(3.6) \quad n = 1,$$

daje statystyczne kryterium makropęknięcia, czyli warunek graniczny zniszczenia całego ciała. Oznaczmy symbolem λ_r graniczną wartość spękania, spełniającą równania (3.5) i (3.6). Warunek wytrzymałości ma wówczas następującą postać:

$$(3.7) \quad 1 - \mathcal{P}(r-1, \lambda_r M) = \frac{\Omega}{V},$$

gdzie $\mathcal{P}(m; \bar{m})$ jest dystrybuantą Poissona.

Wartość graniczna λ_r jest uzależniona od granicznego naprężenia R , czyli wytrzymałość makroskopowej przez statystyczny warunek mikrozniszczenia (2.14) lub (2.28), który zapiszemy w ogólnej postaci

$$(3.8) \quad 1 - F(t_r) = \lambda_r \quad \text{lub} \quad t_r = \Psi(1 - \lambda_r),$$

gdzie $F(x)$ jest standaryzowaną dystrybuantą Gaussa, a $\Psi(y)$ jak poprzednio (2.16) funkcją do niej odwrotną, zaś

$$t_r = \begin{cases} \frac{\bar{P}/R - 1}{v} & \text{dla losowych mikronaprężeń,} \\ \frac{\ln \check{P}/R}{v} & \text{dla losowych mikrowytrzymałości.} \end{cases}$$

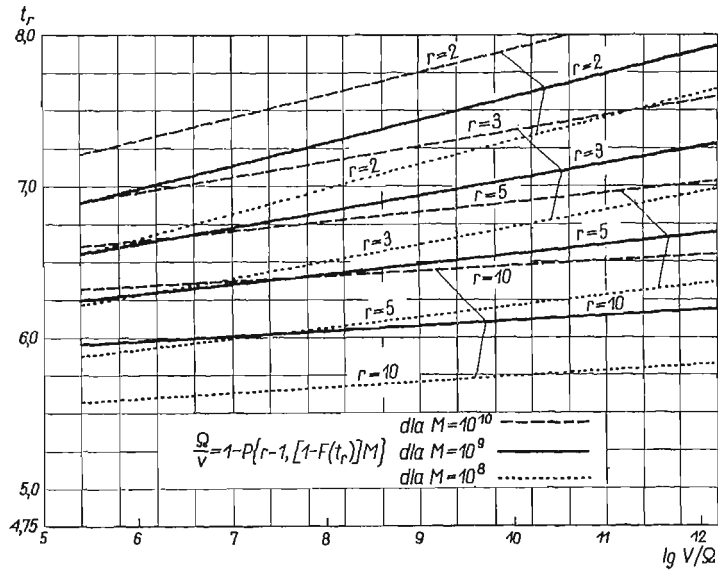
Układ równań (3.7) i (3.8) można łatwo rozwiązać ze względu na zmienną V , mianowicie

$$(3.9) \quad V = \frac{\Omega}{1 - \mathcal{P}\{r-1, [1 - F(t_r)]M\}},$$

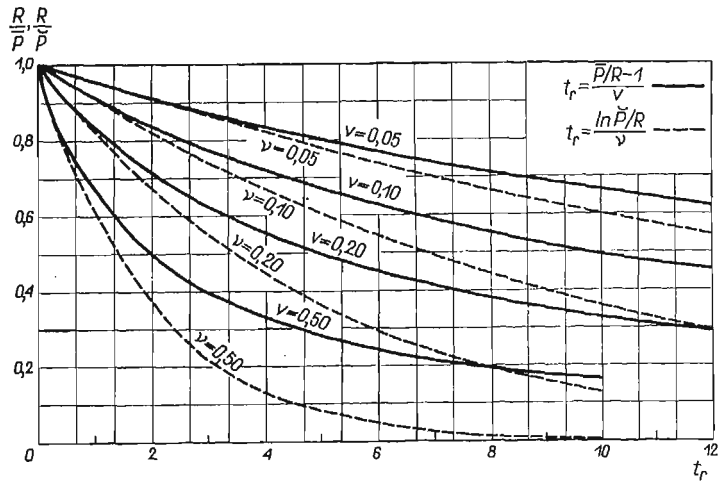
gdzie t_r znaczy jak wyżej.

Wzór (3.9) podaje zależność między objętością V i wytrzymałością R i jest nowym, ścisłym rozwiązaniem zagadnienia wpływu skali na granicę wytrzymałości dla przyjętych założeń. Przy korzystaniu z tego wzoru należy rozporządzać dostatecznie obszernymi (kilkunastocyfrowymi) tablicami dystrybuanty Poissona i Gaussa [16].

Dla bezpośrednich obliczeń granicy wytrzymałości z uwzględnieniem współczynnika skali najwygodniej byłoby korzystać z tablic lub wykresów funkcji (3.9), rys. 6 i 7, albo wzór (3.9) odwrócić i przedstawić wytrzymałość R jako funkcję zmiennej V , co jednak nie



Rys. 6



Rys. 7

jest możliwe w wyraźnej i ściślej formie analitycznej. Dlatego przedstawimy uproszczone formy przybliżone tego wzoru, które częściowo sprowadzają się do zależności znanych już z literatury przedmiotu. Zapiszmy najpierw, że

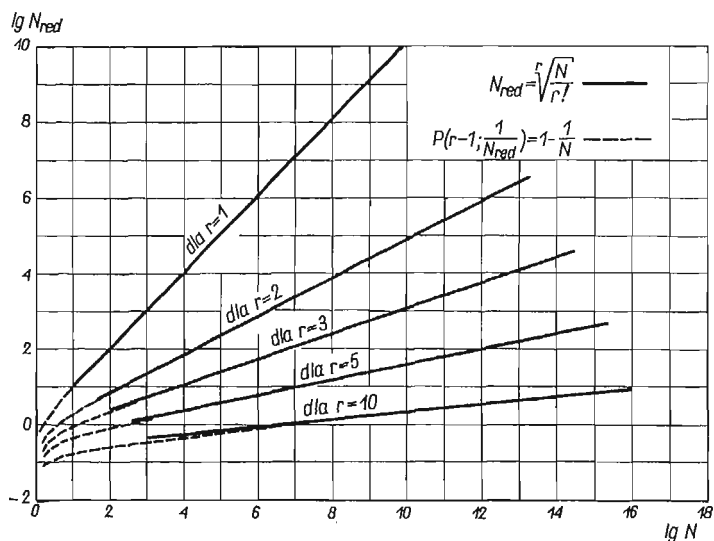
$$(3.10) \quad R = \begin{cases} \frac{\bar{P}}{1+vt_r} & \text{dla losowych mikronaprężeń,} \\ \check{P} \exp(-vt_r) & \text{dla losowych mikrowytrzymałości.} \end{cases}$$

Zagadnienie polega obecnie na znalezieniu odpowiedniej, uproszczonej zależności t_r od objętości V . W tym celu rozwijamy dystrybuantę Poissona w szereg potęgowy

$$(3.11) \quad \mathcal{P}(r-1, \bar{m}) = 1 - \frac{\bar{m}^r}{r!} + \frac{r\bar{m}^{r+1}}{(r+1)!} - \frac{r(r+1)\bar{m}^{r+2}}{2(r+2)!} + \dots$$

Okazuje się, że dla $\bar{m} \ll 1$ (czyli $1/N \ll 1$) bez zbytej szkody dla dokładności (por. rys. 8) wystarczy zachować formę liniową we wzorze (3.11). A więc

$$(3.12) \quad \mathcal{P}(r-1, \bar{m}) \approx 1 - \frac{(M\lambda_r)^r}{r!}.$$



Rys. 8

Stąd przy uwzględnieniu równania (3.7) otrzymujemy wzór, który pokrywa się z relacją wyprowadzoną z prostszych założeń przez N. N. AFANASJEWĄ i S. D. WOŁKOWĄ [14, str. 95],

$$(3.13) \quad \lambda_r \approx \frac{1}{M} \sqrt[r]{\frac{r!\Omega}{V}} = \sqrt[r]{\frac{O_r}{V}}.$$

Wprowadziwszy oznaczenie $O_r = r!\Omega/M^r$, zredukowaliśmy liczbę parametrów z pięciu $(r, v, M, \bar{P}, \Omega)$ do czterech (r, v, \bar{P}, O_r) ; jest to niewątpliwie korzystne z praktycznego punktu widzenia. Graniczna czyli nieprzekraczalna dla średniej koncentracji mikrorys λ wartość λ_r jest dla skończonej ilości mikroelementów L zmienną losową. Dla wielkiej liczby L , zmienna λ_r jest zbieżna stochastycznie do ustalonej wzorem (3.13) wartości granicznej (przy matematycznym pojęciu słowa «graniczny»). Wzór (3.13) spełnia wyrażony w pracy [9] wniosek o zależności specyficznego, krytycznego prawdopodobieństwa spekania λ_{crit} od objętości ciała. W dyskusji wzoru (3.13) rozpatrzmy najpierw przypadek $r = 1$. Jest to przypadek, w którym podział na elementy I i II rzędu traci znaczenie i po-

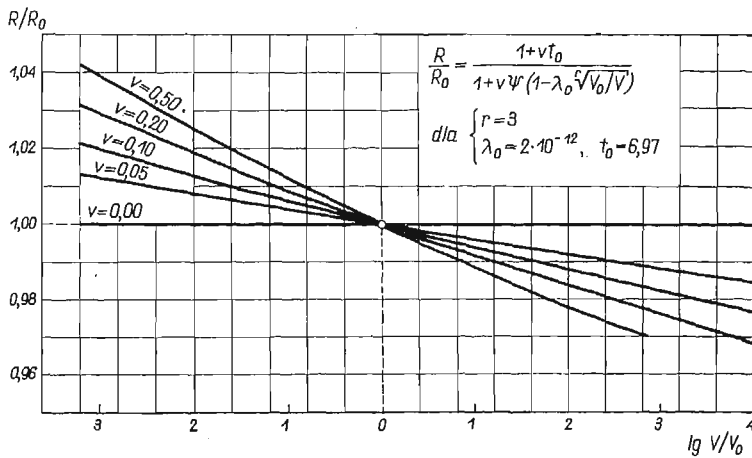
winna zachodzić ściśle reguła o decydującej roli najstabszego mikroelementu w ośrodku. W istocie w tym przypadku mamy

$$(3.14) \quad \lambda_r = \frac{1}{MN} = \frac{1}{L} = \frac{O}{V}, \quad O_r = \frac{\Omega}{M} = O$$

i rozwiązanie pokrywa się z rozwiązaniem klasycznym, które w rozdziale poprzednim przyjęliśmy jako właściwe dla granicy sprężystości. Dla $r > 1$ objętość ciała V wchodząca do wzoru (3.14) podlega redukcji w tym sensie, że zamiast liczby N figuruje N_{red} , rys. 8,

$$(3.15) \quad \lambda_r = \frac{1}{MN_{\text{red}}},$$

gdzie $N_{\text{red}} \approx \sqrt[3]{N/r!} < N$. Stąd wniosek, że przyjęcie złożonej struktury ośrodka i granicznej liczby mikrorys $r > 1$ pozwoli zastosować otrzymane wyniki do materiałów, które



Rys. 9

charakteryzują się bardziej łagodnym wpływem skali na granicę wytrzymałości. Ostateczne wzory zapisujemy biorąc pod uwagę (3.8), (3.10) i (3.13) w następującej postaci

$$(3.16) \quad R \approx \begin{cases} \frac{\bar{P}}{1 + \nu\Psi \left(1 - \sqrt[3]{\frac{O_r}{V}}\right)} & \text{dla losowych mikronaprężeń} \\ \check{P} \exp \left[-\nu\Psi \left(1 - \sqrt[3]{\frac{O_r}{V}}\right) \right] & \text{dla losowych mikrowytrzymałości} \end{cases}$$

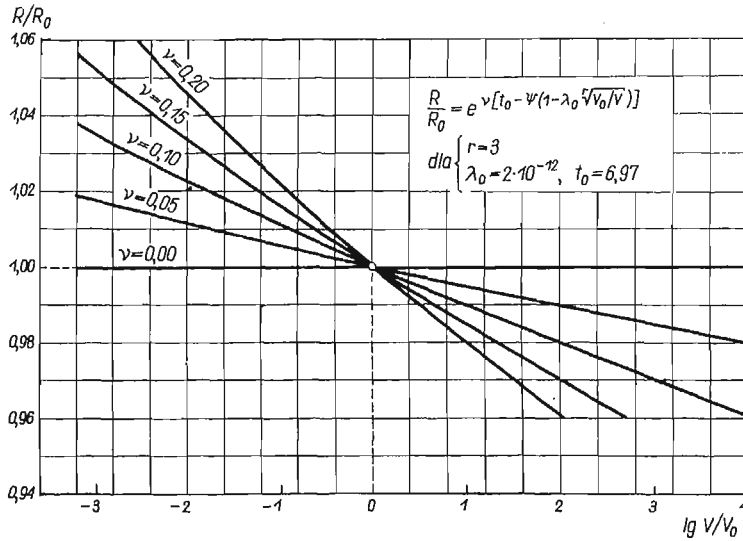
albo w innej postaci przy oznaczeniach: R_0 jest wytrzymałością próbki normowej o objętości V_0 ,

$$t_0 = \Psi(1 - \lambda_0), \quad \lambda_0 = \sqrt[3]{\frac{O_r}{V_0}},$$

i po wyrugowaniu parametru \bar{P} lub \check{P} , a także parametru O_r ,

$$(3.17) \quad R \approx \begin{cases} \frac{R_0 (1 + vt_0)}{1 + v\Psi \left(1 - \lambda_0 \sqrt[r]{\frac{V_0}{V}} \right)}, \\ R_0 \exp \left[-v\Psi \left(1 - \lambda_0 \sqrt[r]{\frac{V_0}{V}} \right) + vt_0 \right]. \end{cases}$$

Zależność R/R_0 od V/V_0 dla przykładowych wartości parametrów r , λ_0 i kilku wartości współczynnika zmienności mikronaprężeń v , lub mikrowytrzymałości ν przedstawiają wykresy na rys. 9 i rys. 10. Ważność powyższych wzorów i wykresów ograniczona jest do ciał niezbyt małej objętości ($V \gg \Omega$) i do małej koncentracji mikrorys ($\lambda_r \ll 1$). Dla



Rys. 10

wyznaczenia parametrów R_0 , λ_0 , r , v lub ν potrzeba czterech doświadczeń polegających np. na określeniu wytrzymałości czterech próbek o różnych objętościach.

Na zakończenie wprowadzimy dalsze uproszczenia przybliżając funkcję (3.9), rys. 6, funkcją liniową w skali półlogarytmicznej,

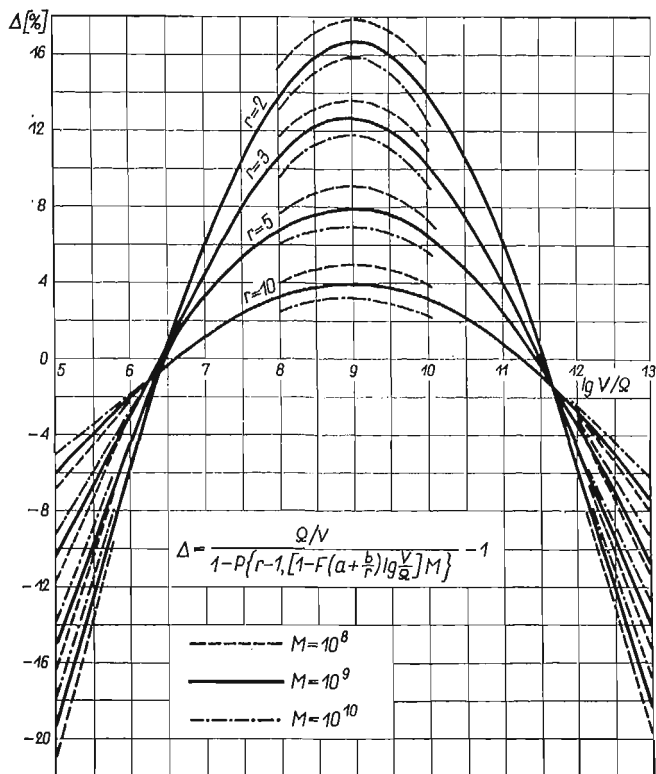
$$(3.18) \quad t_r = a + \frac{b}{r} \lg \frac{V}{\Omega}.$$

Tego rodzaju przybliżenie jest celowe dla przypadku losowych mikrowytrzymałości, wtedy bowiem końcowy wzór (3.16) upraszcza się do postaci

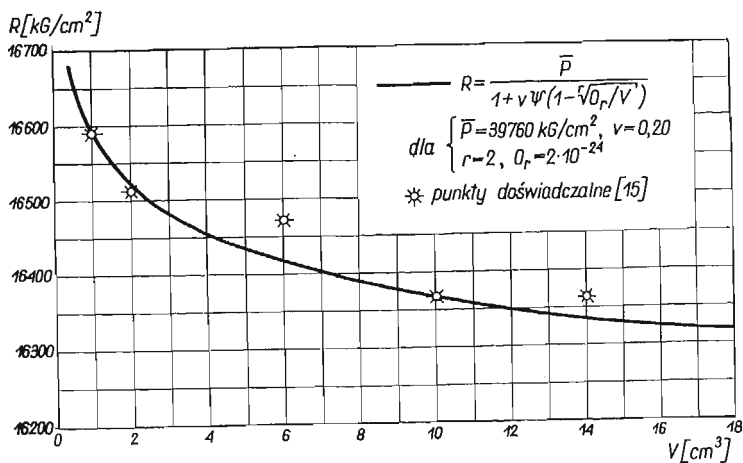
$$(3.19) \quad R \approx \check{P} \left(10^{-\frac{a}{b}} \sqrt[r]{\frac{\Omega}{V}} \right)^{bv \ln 10} = \frac{R_0}{V^\beta},$$

gdzie

$$R_0 = \check{P} (\Omega^{\frac{b}{r}} 10^{-a})^{v \ln 10}, \quad \beta = \frac{vb \ln 10}{r}.$$



Rys. 11



Rys. 12

Wzór (3.19) jest taki sam jak wzór Weibulla [12], ponieważ ani R_0 , ani wykładnik potęgowy β nie zależy od objętości ciała V . Stałe a i b zależą od dwóch parametrów r i M , a wartości ich można w przybliżeniu odczytywać z powiększonego rys. 6 lub obliczać np. metodą najmniejszych kwadratów tak, jak to zrobiono dla zestawienia tablicy 1. Błąd, jaki się

попелня стосуюч wzór uproszczony (3.10) zamiast wzoru dokładnego (3.14), przedstawiono na rys. 11.

Dla przykładu, porównano rezultaty uzyskane w tej pracy na drodze teoretycznej wg wzoru (3.16) z wynikami badań doświadczalnych wysokowęglowej stali kablowej [15] i przedstawiono na rys. 12.

Literatura cytowana w tekście

1. В. В. БОЛОТИН, *Статистические методы в строительной механике*, Изд. II, Госстройиздат, Москва 1965.
2. Б. Б. ЧЕЧУЛИН, *К статистической теории хрупкой прочности*, Журн. тех. физ., 2, 24 (1954), 292–298.
3. Б. Б. ЧЕЧУЛИН, *Масштабный фактор и статистическая природа прочности металлов*, Металлургияиздат, Москва 1963.
4. А. ЕСИН, W. J. D. JONES, *A statistical approach to micro-plastic strain in metals*, J. Strain Anal., 5, 1 (1966), 115–421.
5. Т. А. КОНТОРОВА и Я. И. ФРЕНКЕЛЬ, *Статистическая теория хрупкой прочности реальных кристаллов*, Журн. тех. физ., 3, 11 (1944), 173.
6. К. КНОПП, *Szeregi nieskończone*, PWN, Warszawa 1956.
7. J. MURZEWSKI, *O statystycznej teorii prawie jednorodnego ośrodka kruchego*, Czas. Techn., 5, 63 (1958), 1–3.
8. J. MURZEWSKI, *Elastic-plastic stochastically non-homogeneous bodies*, Non-homogeneity in Elasticity and Plasticity, Proceedings of IUTAM Symposium in Warsaw 1958, Pergamon Press 1959, 479–489.
9. J. MURZEWSKI, *Plastyczność i wytrzymałość mikroskopowa niejednorodnych ośrodków stałych*, Arch. Bud., Politechnika Krakowska, Zeszyt specjalny nr 1, PWN, Kraków 1966, 257–308.
10. W. SADOWSKI (red.), *Tablice statystyczne*, PWN, Warszawa 1957.
11. N. W. SMIRNOW, J. W. DUNIN-BARKOWSKI, *Krótki kurs statystyki matematycznej dla zastosowań technicznych*, PWN, Warszawa 1966.
12. W. WEIBULL, *A statistical theory of strength of materials*, Proc. Roy. Swedish Inst. Res., nr 151, Stockholm 1939.
13. W. WEIBULL, *A statistical distribution function of wide applicability*, J. Appl. Mech. 3, 18 (1951), 293–297.
14. С. Д. ВОЛКОВ, *Статистическая теория прочности*, Машгиз., Москва 1960.
15. W. ZIOBROŃ, *Statystyczna ocena nośności cięgien sprężających w konstrukcjach kablowych*, Rozprawa doktorska, Kraków 1964.
16. Mathematical Tables Project of the Work Projects Administration for the City of New York, Tables of probability functions, 1 (1941), 2 (1942).

Резюме

О МАСШТАБНОМ ЭФФЕКТЕ ДЛЯ ХРУПКОГО ТЕЛА, ВЫДЕРЖИВАЮЩЕГО УСТАНОВЛЕННУЮ КОНЦЕНТРАЦИЮ МИКРО-ПОВРЕЖДЕНИЙ

Единичный предел пропорциональности и предел прочности хрупкого тела, микроскопически неоднородного анализируется от его объема, при использовании теории вероятности.

Используется модель среды с микроструктурой описанная и в работах Е. МУЖЕВСКОГО [9] и С. Д. ВОЛКОВА [14] и состоящая в разделении среды на макро-элементы Ω , которые в свою очередь делятся на микроэлементы O . Повреждение одного микроэлемента вызывает только

превышение предела пропорциональности между напряжениями и деформациями. Для достижения предела прочности тела V , требуется повреждение r микро-элементов в одном макро-элементе Ω .

В работе рассматривается только среда в одноосном напряженном состоянии σ . Распределение вероятностей приняты в двух вариантах: нормальное распределение (2.12) для микро-напряжений s , при установленной микро-прочности $P = \bar{P}$, или же логарифмически-нормальное распределение (2.26) для микро-прочности P , при установленном микро-напряжении $s \approx \sigma$.

Для этих двух случаев определяется статистический критерий микро-трещины, т. е. границы пропорциональности соответственно в виде формул (2.24) и (2.31). Эти формулы иллюстрируются диаграммами на рис. 3 и рис. 5.

При определении статистического критерия макро-трещин, использовалась схема зависимой выборки поврежденных микро-элементов, приводящая к гипергеометрическому распределению. Далее, это распределение аппроксимируется биномиальным распределением, которое, в свою очередь, асимптотически стремится к распределению Пуассона (3.3). В конце концов зависимость объема тела V и предела прочности R выражается формулой (3.9), рис. 6 и 7. Этот результат отличается от результата С. Д. ВОЛКОВА [14], который ошибочно применял асимптотическое распределение Гаусса при аналогических предположениях.

Вводя некоторые упрощения принято обратную формулу (3.12), представляя ее в виде (3.16) или (3.17), рис. 9 и 10. Оспуждается возможность дальнейшего упрощения и применения наиболее простой формулы (3.19) для эффекта масштаба.

Summary

ON THE SIZE EFFECT IN BRITTLE BODIES CAPABLE TO SUSTAIN A CERTAIN CONCENTRATION OF MICRO-DAMAGE

The limit of proportionality and the strength of micro-non-homogeneous brittle bodies is considered as a function of the volume and analysed on the basis of the probability theory.

The model assumed of the medium with microstructure is similar to that introduced in the papers by J. MURZEWSKI (9) and S. D. VOLKOV (14) and consists in dividing the body into macro-elements Ω , and subdividing them into micro-elements O . A single micro-element damaged, the limit of proportionality between the stresses and strains is exceeded; to reach the ultimate strenght of the body V , a number r of micro-elements O belonging to the same macro-element Ω has to be damaged.

One-dimensional states of stress σ are considered in the paper. Two probability distributions are taken into account: the normal distribution (2.12) for micro-stresses s at the given micro-strength $P = \bar{P}$, and the logarithmic normal distribution (2.26) for the micro-strength P at the fixed micro-stress $s = \sigma$.

Statistical criteria of micro-cracking (exceeding the proportionality limit) are then developed for these two cases, Eqs. (2.24) and (3.1), respectively; they are illustrated by Figs. 3 and 5.

In deducing the statistical criteria for macro-cracks forming, the hypergeometric probability distribution was used. This distribution is then approximated by the binomial distribution which tends asymptotically to the Poisson distribution (3.3). The relationship between the volume V and the strength limit R is finally expressed by Eq. (3.9), Fig. 6 and 7. The result differs from that found by S. D. Volkov [14] who — having made similar assumptions — erroneously introduced the Gauss asymptotic distribution.

Certain simplifications make it possible to invert formula (3.12) and to represent it in the form of (3.16) or (3.17), Figs. 9 and 10. The discussion concerning the possibility of further simplifications and application of the simplest formula expressing the size effect (3.18) conclude the paper.