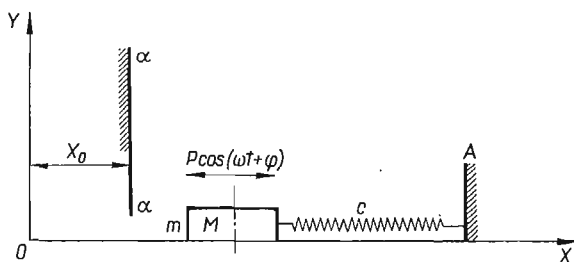


ANALIZA UKŁADU WIBRO-UDERZENIOWEGO Z TARCIEM SUCHYM

BOHDAN KOWALCZYK (GDAŃSK)

W pracy niniejszej przeprowadzono analizę ruchu i stabilności układu wibro-uderzeniowego przedstawionego na rys. 1

Na poziomej chropowatej suchej płaszczyźnie (współczynnik tarcia μ) porusza się pod działaniem siły okresowej $P \cos(\omega t + \varphi)$ ciało M o masie m . Ciało M jest przytwierdzone



Rys. 1

do nieruchomej ściany pionowej A za pomocą sprężyny o sztywności c . Podczas ruchu ciało M uderza o nieruchomy ogranicznik $\alpha-\alpha$ oddalony o X_0 od punktu O położenia, w którym sprężyna jest w stanie nienapiętym.

Przy analizie drgań rozważanego układu przyjęto następujące założenia:

- 1) uderzenie masy o ogranicznik $\alpha-\alpha$ odbywa się nagle na odcinku czasu bardzo małym w porównaniu z okresem ruchu;
- 2) prędkość masy po odbiciu od ogranicznika $\alpha-\alpha$ charakteryzuje się współczynnikiem restytucji $R(0 \leq R < 1)$, który zgodnie z hipotezą Newtona nie zależy od prędkości, lecz jedynie od materiałów zderzających się ciał;
- 3) masa ogranicznika jest nieskończenie duża i nie bierze udziału w drganiach układu;
- 4) możliwe są drgania masy m o okresie równym okresowi siły wymuszającej lub jego krótności.

Równanie ruchu przy $\dot{X} \neq 0$ ma postać:

$$(1.1) \quad m \frac{d^2 X_i}{dt^2} + c X_i = -\mu m g \operatorname{sign} \dot{X}_i + P \cos(\omega t + \varphi_i).$$

Rozpatrywać będziemy ruch masy m w dwóch przedziałach czasowych o «długości» t_1 i t_2 , gdzie t_1 jest czasem, który upłynie od chwili uderzenia do osiągnięcia przez masę

maksymalnej amplitudy L , t_2 zaś czasem, który upłynie od osiągnięcia maksymalnej amplitudy do następnego kolejnego uderzenia. Czas w każdym z tych przedziałów liczymy od zera.

1. Po uderzeniu — ruch w stronę dodatniej części osi X :

$$\dot{X} > 0, \quad \text{sign } \dot{X} = 1;$$

$$(1.2) \quad m \frac{d^2 X_1}{dt^2} + c X_1 = -\mu mg + P \cos(\omega t + \varphi_1).$$

Podstawmy

$$(1.3) \quad X_i = \frac{P}{m\omega^2} x_i; \quad \omega t = \tau; \quad k^2 = \frac{c}{m};$$

$$\lambda = \frac{k}{\omega}; \quad a = \frac{\mu mg}{P}.$$

Otrzymujemy po podstawieniu (1.3)

$$(1.4) \quad \ddot{x}_1 + \lambda^2 x_1 = -a + \cos(\tau + \varphi_1),$$

Całka ogólna równania różniczkowego (1.4) w przypadku $\lambda \neq 1$ ma postać:

$$(1.5) \quad x_1 = -\frac{a}{\lambda^2} + A_1 \cos \lambda \tau + B_1 \sin \lambda \tau + \frac{1}{\lambda^2 - 1} \cos(\tau + \varphi_1),$$

$$\dot{x}_1 = -\lambda A_1 \sin \lambda \tau + \lambda B_1 \cos \lambda \tau - \frac{1}{\lambda^2 - 1} \sin(\tau + \varphi_1).$$

Podstawiając warunki na krańcach rozpatrywanego przedziału

$$(1.6) \quad x_1(0) = x_0, \quad \dot{x}_1(0) = Rv, \quad x_1(\tau_1) = l, \quad \dot{x}_1(\tau_1) = 0,$$

gdzie

$$(1.7) \quad v = \frac{m\omega}{P} V, \quad V > 0$$

$$l = \frac{m\omega^2}{P} L, \quad x_0 = \frac{m\omega^2}{P} X_0, \quad X_0 < L < \infty,$$

V zaś jest modulem prędkości punktu M w chwili uderzenia masy o przegrodę.

Otrzymamy następujące związki dla stałych całkowania:

$$(1.8) \quad A_1 = x_0 + \frac{a}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2 - 1} \cos \varphi_1,$$

$$B_1 = \frac{\sin \varphi_1}{\lambda(\lambda^2 - 1)} + \frac{Rv}{\lambda}$$

oraz

$$(1.9) \quad l = \frac{a}{\lambda^2 \cos \lambda \tau_1} - \frac{a}{\lambda^2} + \frac{x_0}{\cos \lambda \tau_1} - \frac{\cos \varphi_1}{(\lambda^2 - 1) \cos \lambda \tau_1} + \frac{\cos(\tau_1 + \varphi_1)}{\lambda^2 - 1} + \frac{\sin(\tau_1 + \varphi_1)}{\lambda(\lambda^2 - 1)} \text{tg } \lambda \tau_1,$$

$$v = \frac{\lambda x_0}{R} \text{tg } \lambda \tau_1 + \frac{a}{R\lambda} \text{tg } \lambda \tau_1 - \frac{\lambda \cos \varphi_1}{R(\lambda^2 - 1)} \text{tg } \lambda \tau_1 - \frac{\sin \varphi_1}{R(\lambda^2 - 1)} + \frac{\sin(\tau_1 + \varphi_1)}{R(\lambda^2 - 1) \cos \lambda \tau_1}.$$

2. Na drugim odcinku — ruch w stronę ujemnej części osi X : $\dot{X} < 0$ — ruch układu dany jest równaniem różniczkowym:

$$(1.10) \quad m \frac{d^2 X_2}{dt^2} + c X_2 = \mu mg + P \cos(\omega t + \varphi_2)$$

lub po podstawieniach (1.3)

$$(1.11) \quad \ddot{x}_2 + \lambda^2 x_2 = a + \cos(\tau + \varphi_2).$$

Całka ogólna równania różniczkowego (1.11) w przypadku $\lambda \neq 1$ ma postać:

$$(1.12) \quad x_2 = \frac{a}{\lambda^2} + A_2 \cos \lambda \tau + B_2 \sin \lambda \tau + \frac{1}{\lambda^2 - 1} \cos(\tau + \varphi_2),$$

$$\dot{x}_2 = -\lambda A_2 \sin \lambda \tau + \lambda B_2 \cos \lambda \tau - \frac{1}{\lambda^2 - 1} \sin(\tau + \varphi_2).$$

Podstawiając warunki na krańcach drugiego przedziału:

$$(1.13) \quad x_2(0) = l, \quad \dot{x}_2(0) = 0, \quad x_2(\tau_2) = x_0, \quad \dot{x}_2(\tau_2) = -v,$$

gdzie

$$\tau_1 + \tau_2 = 2\pi n,$$

$n = 1, 2, 3 \dots$ zaś jest stosunkiem okresu ruchu masy m do okresu siły wymuszającej, otrzymamy:

$$(1.14) \quad A_2 = l - \frac{\cos \varphi_2}{\lambda^2 - 1} - \frac{a}{\lambda^2}, \quad B_2 = \frac{\sin \varphi_2}{\lambda(\lambda^2 - 1)},$$

gdzie

$$\varphi_2 = \varphi_1 + \tau_1$$

oraz

$$(1.15) \quad l = \frac{a}{\lambda^2} - \frac{a}{\lambda^2 \cos \lambda \tau_2} + \frac{\cos \varphi_2}{\lambda^2 - 1} - \frac{\sin \varphi_2}{\lambda(\lambda^2 - 1)} \operatorname{tg} \lambda \tau_2 - \frac{\cos \varphi_1}{(\lambda^2 - 1) \cos \lambda \tau_2} + \frac{x_0}{\cos \lambda \tau_2};$$

$$v = \lambda x_0 \operatorname{tg} \lambda \tau_2 - \frac{a}{\lambda} \operatorname{tg} \lambda \tau_2 - \frac{\sin \varphi_2}{(\lambda^2 - 1) \cos \lambda \tau_2} + \frac{\sin \varphi_1}{\lambda^2 - 1} - \frac{\lambda \cos \varphi_1}{\lambda^2 - 1} \operatorname{tg} \lambda \tau_2.$$

W związkach (1.9) i (1.15) niewiadomymi są τ_1 oraz φ_1 . Porównując związki (1.9)₁ i (1.15)₁ oraz (1.9)₂ i (1.15)₂ stronami otrzymujemy następujące równania:

$$(1.16) \quad a_1 \cos \varphi_1 + b_1 \sin \varphi_1 = c_1, \quad a_2 \cos \varphi_1 + b_2 \sin \varphi_1 = c_2,$$

gdzie

$$a_1 = \frac{\lambda^2}{\lambda^2 - 1} (\cos \lambda \tau_1 - \cos \lambda \tau_2) + \frac{\lambda}{\lambda^2 - 1} \sin 2\pi n \lambda \sin \tau_1,$$

$$b_1 = \frac{\lambda}{\lambda^2 - 1} \sin 2\pi n \lambda \cos \tau_1,$$

$$c_1 = \lambda^2 x_0 (\cos \lambda \tau_1 - \cos \lambda \tau_2) - a (\cos \lambda \tau_1 + \cos \lambda \tau_2 - 2 \cos \lambda \tau_1 \cos \lambda \tau_2),$$

$$a_2 = \frac{\lambda^2}{\lambda^2 - 1} (\sin \lambda \tau_1 \cos \lambda \tau_2 - R \cos \lambda \tau_1 \sin \lambda \tau_2) - \frac{\lambda}{\lambda^2 - 1} (\cos \lambda \tau_2 + R \cos \lambda \tau_1) \sin \tau_1;$$

$$b_2 = \frac{\lambda(1+R)}{\lambda^2 - 1} \cos \lambda \tau_1 \cos \lambda \tau_2 - \frac{\lambda}{\lambda^2 - 1} (\cos \lambda \tau_2 + R \cos \lambda \tau_1) \cos \tau_1$$

$$c_2 = \lambda^2 x_0 (\sin \lambda \tau_1 \cos \lambda \tau_2 - R \cos \lambda \tau_1 \sin \lambda \tau_2) + a (\sin \lambda \tau_1 \cos \lambda \tau_2 + R \cos \lambda \tau_1 \sin \lambda \tau_2).$$

Rugując z równań (1.16) parametr φ_1 dochodzimy do związku

$$(1.17)_1 \quad \left| \frac{a_1 c_1}{a_2 c_2} \right|^2 + \left| \frac{b_1 c_1}{b_2 c_2} \right|^2 - \left| \frac{a_1 b_1}{a_2 b_2} \right|^2 = 0.$$

Można wykazać, że rozwiązania układu (1.16) istnieją, jeżeli

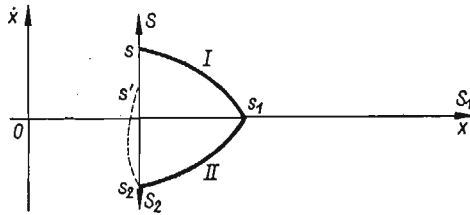
$$a_i^2 + b_i^2 - c_i^2 \geq 0, \quad i = 1, 2.$$

Równanie przestępne (1.17)₁ rozwiązujemy graficznie kreśląc wykres funkcji

$$(1.17)_2 \quad F(\tau_1) = \left| \frac{a_1 c_1}{a_2 c_2} \right|^2 + \left| \frac{b_1 c_1}{b_2 c_2} \right|^2 - \left| \frac{a_1 b_1}{a_2 b_2} \right|^2$$

w przedziale $[0; 2\pi n]$.

Przy analizie stabilności ruchu rozpatrywanego układu posłużymy się metodą przekształceń punktowych [1]. Dla rozpatrywanego układu dynamicznego płaszczyznę fazową (x, \dot{x}) dzielimy półprostymi S, S_1, S_2 na obszary I i II. W każdym z tych obszarów ruch układu opisany jest liniowym równaniem różniczkowym.



Rys. 2

Trajektorie fazowe rozpatrywanego układu określają przekształcenie punktowe półprostej

S w S_1 w obszarze I,

S_1 w S_2 w obszarze II,

związek zaś

$$s' = -R s_2$$

przekształca półprostą

$$S_2 \text{ w } S$$

prowadząc do wzajemnie-jednoznacznej i ciągłej odpowiedniości punktów tych półprostych.

Oznaczmy te przekształcenia punktowe odpowiednio przez π_1, π_2, π_3 a przez s, s_1, s_2 i s' punkty przesunięcia fazowych trajektorii z odpowiednimi półprostymi. Znajdziemy obecnie funkcje przyporządkowania, które określają omówione przekształcenia punktowe. W tym celu do rozwiązania równania różniczkowego (1.14) podstawiamy warunki:

$$(1.18) \quad \text{przekształcenie } \pi_1 \begin{cases} x_1(0) = x_0, & \dot{x}_1(0) = s, \\ x_1(\tau_1) = s_1, & \dot{x}_1(\tau_1) = 0. \end{cases}$$

Po prostych operacjach matematycznych otrzymamy układ równań, po rozwiązaniu którego względem s i s_1 znajdziemy funkcję przyporządkowania w postaci parametrycznej. Dla przekształcenia π_1

$$(1.19) \quad s = \left[\frac{\lambda^2 x_0 + a}{\lambda} - \frac{\lambda}{\lambda^2 - 1} \cos \varphi_1 \right] \operatorname{tg} \lambda \tau_1 - \frac{\sin \varphi_1}{\lambda^2 - 1} + \frac{\sin(\tau_1 + \varphi_1)}{(\lambda^2 - 1) \cos \lambda \tau_1},$$

$$s_1 = \frac{a}{\lambda^2} \frac{1 - \cos \lambda \tau_1}{\cos \lambda \tau_1} + \frac{x_0}{\cos \lambda \tau_1} - \frac{\cos \varphi_1}{(\lambda^2 - 1) \cos \lambda \tau_1} +$$

$$+ \frac{1}{\lambda^2 - 1} \cos(\tau_1 + \varphi_1) + \frac{1}{\lambda(\lambda^2 - 1)} \operatorname{tg} \lambda \tau_1 \sin(\tau_1 + \varphi_1).$$

Następnie podstawiając do rozwiązania równania różniczkowego (1.11) warunki:

$$(1.20) \quad \text{przekształcenie } \pi_2 \begin{cases} x_2(0) = s_1, & \dot{x}_2(0) = 0, \\ x_2(\tau_2) = x_0, & \dot{x}_2(\tau_2) = s_2 \end{cases}$$

i rozwiązując otrzymany układ równań względem s_2 i s_1 znajdujemy funkcję przyporządkowania (w postaci parametrycznej) dla przekształcenia π_2 :

$$(1.21) \quad s_1 = \frac{\lambda^2 x_0 - a}{\lambda^2} \frac{1}{\cos \lambda \tau_2} + \frac{a}{\lambda^2} + \frac{\cos \varphi_2}{\lambda^2 - 1} - \frac{1}{\lambda(\lambda^2 - 1)} \operatorname{tg} \lambda \tau_2 \sin \varphi_2 - \frac{\cos \varphi_1}{(\lambda^2 - 1) \cos \lambda \tau_2},$$

$$s_2 = \left[\frac{a - \lambda^2 x_0}{\lambda} + \frac{\lambda}{\lambda^2 - 1} \cos \varphi_1 \right] \operatorname{tg} \lambda \tau_2 + \frac{\sin(\varphi_1 - \tau_2)}{(\lambda^2 - 1) \cos \lambda \tau_2} - \frac{\sin \varphi_1}{\lambda^2 - 1}.$$

Punkt nieruchomy s^* omawianego przekształcenia punktowego znajdujemy z warunku

$$s = s'.$$

Stabilność punktu nieruchomego i odpowiadającego mu ruchu okresowego znajdujemy z twierdzenia Koeniga [1], a więc ruch jest stabilny, jeżeli

$$\left| \frac{ds'}{ds} \right|_{s=s^*} < 1$$

i niestabilny, gdy

$$\left| \frac{ds'}{ds} \right|_{s=s^*} > 1$$

Dla omawianego układu analityczny warunek stabilności ma postać:

$$\left| \frac{ds'}{ds} \right| = \left| R \frac{\sin \lambda \tau_1}{\sin \lambda \tau_2} \right| < 1,$$

ponieważ

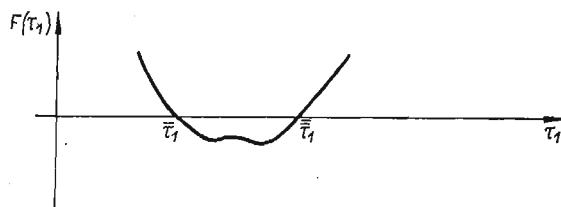
$$\frac{ds'}{ds} = \frac{(ds_1/d\tau_1)(ds_2/d\tau_2)}{(ds/d\tau_1)(ds_1/d\tau_2)} \frac{ds'}{ds_2}$$

Przykład. Rozpatrzono ruch i stabilność układu w przypadku gdy

$$\lambda = 0,4, \quad a = 0,1, \quad x_0 = 1,0, \quad R = 0,5, \quad n = 1.$$

Dla tych danych wykreślono wykres funkcji $F(\tau_1)$ (1.17)₂, rys. 3. Punkty przecięcia się krzywej z osią odciętych wyznaczają te wartości dla których $F(\tau_1) = 0$. W danym przypadku uzyskano dwa rozwiązania:

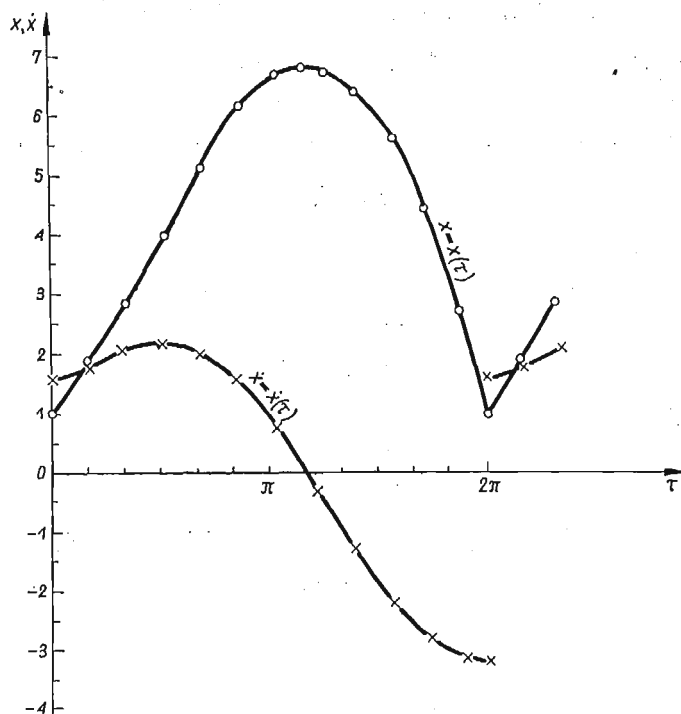
$$\bar{\tau}_1 = 3,20, \quad \bar{\bar{\tau}}_1 = 3,56.$$



Rys. 3

W przypadku $\bar{\tau}_1$ nie istnieje okresowe rozwiązanie rozpatrywanego układu. W przypadku $\bar{\bar{\tau}}_1 = 3,56$ ruch układu jest stabilny, gdyż

$$\left| \frac{ds'}{ds} \right| = 0,557 < 1$$



Rys. 4

Zależność przemieszczenia bezwymiarowego i bezwymiarowej prędkości od czasu podana jest na wykresach (rys. 4).

Literatura cytowana w tekście

А. А. Андронов, А. А. Витт, Ц. Э. Найкин, *Теория колебаний*, Москва 1959.

Резюме**АНАЛИЗ ВИБРОУДАРНОЙ СИСТЕМЫ ПРИ НАЛИЧИИ СУХОГО ТРЕНИЯ**

В работе рассматривается движение одномассовой виброударной системы с линейной упругой характеристикой. Предполагается, что колебания системы затухают за счет сухого трения. Выведены формулы для перемещений и скорости колеблющейся массы соответствующие случаю периодических колебаний, с периодом равным периоду возмущающей силы или его кратности.

Явление удара массы о преграду учитывается при помощи коэффициента восстановления скорости. Анализ устойчивости периодического движения рассматриваемой системы проведен при помощи метода точечных преобразований.

Summary**ANALYSIS OF A VIBRATORY-IMPACT SYSTEM WITH SOLID FRICTION**

The paper deals with investigation of a vibratory-impact system with one degree of freedom assuming that the vibrations of the system are damped. The equations describing displacement and velocity of vibrating mass are given in the case when the frequency of vibration is equal or multiple of exciting force frequency.

The effect of impact is described by means of the coefficient of restitution of velocity.

The stability of periodic motion was investigated by means of point-transformation method.

POLITECHNIKA GDAŃSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 21 czerwca 1967 r.
