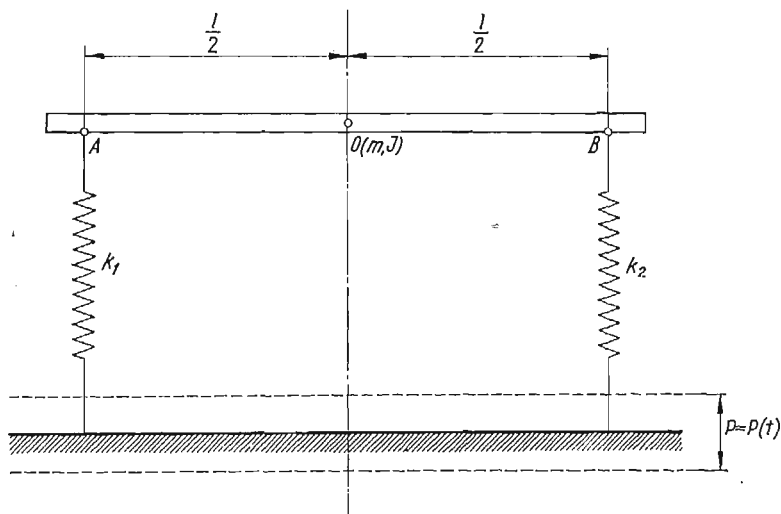


UKŁAD O DWÓCH STOPNIACH SWOBODY JAKO „DYNAMICZNY IZOLATOR” DRGAŃ

BOGUSŁAW RADZISZEWSKI, ANDRZEJ RÓŻYCKI (WARSZAWA)

1. Zagadnienie drgań układu o dwu stopniach swobody, przedstawionego na rys. 1, było wielokrotnie rozpatrywane w literaturze [1, 2], przy uwzględnieniu różnych wariantów wartości stałych parametrów układu takich jak:  $m$  — masa,  $J$  — moment bezwładności względem osi prostopadłej do płaszczyzny rysunku i przechodzącej przez środek masy,  $k_1$  i  $k_2$  — sztywności podpór itp. oraz rodzaju wymuszenia  $P = P(t)$  gdzie  $P$  oznacza amplitudę — i sprowadzane często do drgań układu o jednym stopniu swobody (rys. 2), jeśli  $k_1 = k_2$ . Jednakże w niektórych przypadkach nawet przyjęcie do rozważań teore-



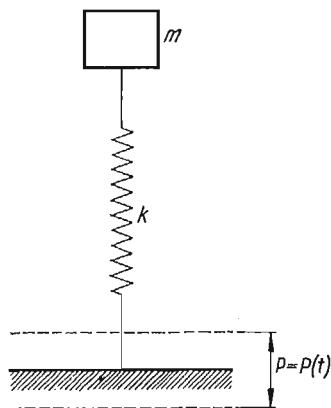
Rys. 1

tycznych pierwszego modelu (rys. 1) okazuje się zbyt dużym uproszczeniem i w efekcie prowadzi do niezamierzonych i kłopotliwych konsekwencji w postaci niespełniania przez konstrukcję, obliczoną według tego modelu, stawianych jej wymagań.

Dotyczy to szczególnie układów, w których zależy nam na nieprzenoszeniu się drgań podstawy określonych funkcją  $P = P(t)$  na element konstrukcyjny, przedstawiony na modelu pierwszym (rys. 1) jako belka o masie  $m$  i momencie bezwładności  $J$  względem osi prostopadłej do płaszczyzny rysunku i przechodzącej przez środek masy. Ma to miejsce

w przypadku np. wszelkiego rodzaju elektronowo-mechanicznych urządzeń pomiarowych ustawionych na elemencie konstrukcyjnym sprężysto podpartym, jeśli warunkiem poprawności ich pracy — z uwagi na wiarygodność i dokładność wskazań — jest zapewnienie odpowiedniego współczynnika tłumienia («izolacji») amplitudy wymuszeń  $P = P(t)$ .

Przyjęcie do rozważań modelu pierwszego (rys. 1) nie daje zadowalających wyników, gdyż konstruktor umieszczając na elemencie nośnym (belka na rys. 1) podzespoły mecha-



Rys. 2

niczne i elektryczne, przewody itp., nie jest w stanie określić w sposób analityczny dostatecznie dokładnie położenia środka masy.

Możliwe jest to dopiero po wykonaniu prototypu — i to jedynie metodą doświadczalną — lecz wtedy względy konstrukcyjne nie pozwalają przeważnie na dokonanie takich zmian w rozmieszczeniu poszczególnych elementów aparatury, aby część urządzenia podparta sprężysto była wyważona, tj. miała środek masy w połowie odległości między punktami podparcia.

Równocześnie różne podzespoły aparatury i ich elementy umieszczone na elemencie nośnym (belka — rys. 1) nie są prawie nigdy jednakowo wrażliwe na drgania, a z kolei nie wszystkie częstotliwości wymuszenia  $P = P(t)$  oddziałującego przez sprężyste łączniki na belkę, zakłócają pracę tych elementów w sposób istotny, tzn. nie wszystkie częstotliwości są jednakowo dla ich pracy szkodliwe. Ponadto w przypadku dość znacznego odstępstwa między punktami sprężystego podparcia belki wymuszenie o częstotliwości  $\omega$  ma w tych punktach przeważnie różną wartość, tzn.  $P_1(t) \neq P_2(t)$ .

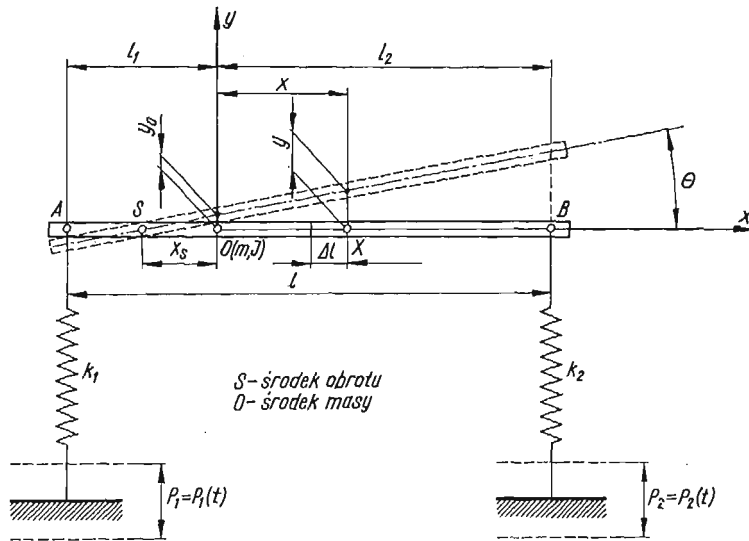
Powstaje zatem pytanie — decydujące z punktu widzenia konstrukcyjnego — czy określony punkt belki doznaje pionowych przemieszczeń i jaką mają one wartość przy określonej częstotliwości wymuszenia.

Konstrukcja musi więc spełniać warunek, aby na pewnym odcinku belki o długości  $\Delta l$  przemieszczenie pionowe  $y$ , prędkość  $\dot{y}$  i przyspieszenie  $\ddot{y}$ , były zawsze mniejsze od pewnych stałych  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ , określonych jako dopuszczalne dla elementów konstrukcyjnych, umieszczonych na odcinku  $\Delta l$ . Warunek ten musi być spełniony w pewnym przedziale częstotliwości wymuszeń tj.  $\omega \in (\omega_1, \omega_2)$ .

Schematyczna ilustracja powyższego warunku zawarta jest na rys. 3 oraz opisana nierównościami:

$$(1.1) \quad \begin{aligned} |y_0 + x\vartheta| &\leq \varepsilon_1, \\ \left| \frac{d}{dt}(y_0 + x\vartheta) \right| &\leq \varepsilon_2, \\ \left| \frac{d^2}{dt^2}(y_0 + x\vartheta) \right| &\leq \varepsilon_3, \end{aligned}$$

gdzie  $y_0 + x\vartheta = y$  przyjęto przy tym, że przemieszczenia pionowe końców belki  $A$  i  $B$  są dostatecznie małe w porównaniu z jej długością, a więc  $\operatorname{tg} \vartheta = \vartheta$ .



Rys. 3

Określenie przemieszczenia  $y$  dowolnego punktu  $X$  belki jest możliwe, jeśli znamy położenie środka obrotu  $S$  (o współrzędnej  $x_s$ ) i wartość jaką przyjmuje  $\vartheta = \vartheta(t)$ .

W ten sposób możemy zawsze stwierdzić, czy konstrukcja spełnia wymagania jej stawiane, tj. dokonać jakościowej i ilościowej oceny użyteczności rozwiązania konstrukcyjnego.

2. W wyniku powyższych rozważań przyjęto i rozpatrzono zachowanie się układu przedstawionego na rys. 4. Początek nieruchomego układu współrzędnych przyjęto w punkcie  $O$ , z którym pokrywa się środek masy belki w położeniu równowagi.

Przy założeniu małych przemieszczeń pionowych w stosunku do długości belki  $l = l_1 + l_2$  i długości sprężyn w położeniu równowagi, równania ruchu układu można napisać w postaci

$$(2.1) \quad \begin{aligned} m\ddot{y} + k_1[y + l_1\vartheta - P_1(t)] + k_2[y - l_2\vartheta - P_2(t)] &= 0 \\ J\ddot{\vartheta} + k_1l_1[y + l_1\vartheta - P_1(t)] - k_2l_2[y - l_2\vartheta - P_2(t)] &= 0, \end{aligned}$$

gdzie  $m$  oznacza masę belki,  $J$  moment bezwładności względem osi prostopadłej do płaszczyzny rysunku i przechodzącej przez środek masy.

Rozpatrzmy najpierw przypadek szczególny taki, że

$$(2.2) \quad P_1(t) = P_2(t) = P_0 \sin \omega t,$$

oraz wprowadźmy następujące oznaczenia:

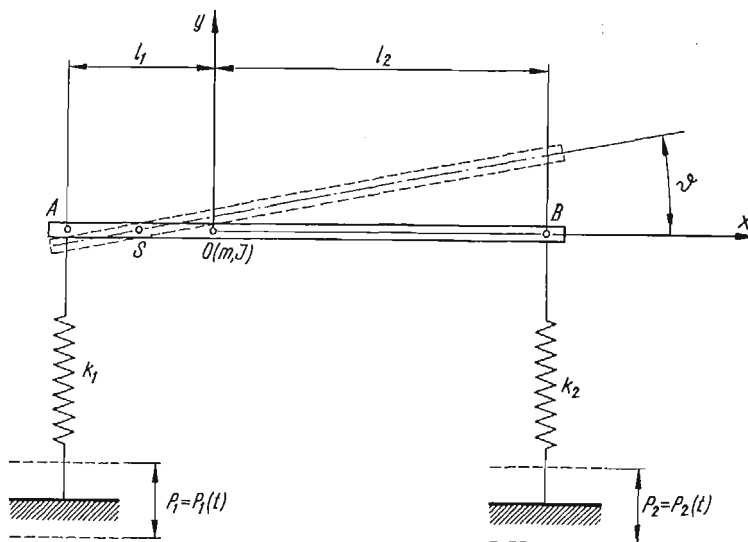
$J = mr^2$ , gdzie  $r$  jest promieniem bezwładności,

$$\omega_1^2 = \frac{k_1 + k_2}{m}, \quad \omega_2^2 = \frac{k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2}{mr^2},$$

$$(2.3) \quad b^2 = \frac{r^2}{(l_1 + l_2)^2}, \quad \omega_2^2 = a^2 \omega_1^2,$$

$$a^2 = \frac{k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2}{r^2(k_1 + k_2)}, \quad c = \frac{(k_1 l_1 - k_2 l_2)(l_1 + l_2)}{(k_1 + k_2)r^2};$$

$$(2.4) \quad v = P_0 y_1, \quad \vartheta = \frac{P_0}{l_1 + l_2} \vartheta_1, \quad \Omega = \frac{\omega}{\omega_1}, \quad \omega t = \tau.$$



Rys. 4

Wtedy układ równań (2.1) przyjmie postać

$$(2.5) \quad \Omega^2 y_1'' + y_1 + cb^2 \vartheta_1 = \sin \tau, \quad \Omega^2 \vartheta_1'' + cy_1 + a^2 \vartheta_1 = c \sin \tau,$$

gdzie  $' = d/dt$ .

Ruch badanego układu opisują więc teraz dwie bezwymiarowe współrzędne  $y_1$  i  $\vartheta_1$  oraz cztery bezwymiarowe parametry  $\Omega^2$ ,  $a^2$ ,  $b^2$ ,  $c$ .

Częstości drgań własnych układu obliczamy z równania

$$\begin{vmatrix} 1 & -\Omega^2 cb^2 \\ c & a^2 - \Omega^2 \end{vmatrix} = 0,$$

czyli

$$(2.6) \quad \Omega^4 - (1 + a^2)\Omega^2 + (a^2 - c^2 b^2) = 0.$$

Ponieważ  $a^2 - c^2 b^2 > 0$ , więc równanie (2.6) ma dwa pierwiastki rzeczywiste

$$(2.7) \quad \Omega_1^2 = \frac{1}{2} [(1+a^2) - \sqrt{(1+a^2)^2 - 4(a^2 - c^2 b^2)}],$$

$$\Omega_2^2 = \frac{1}{2} [(1+a^2) + \sqrt{(1+a^2)^2 - 4(a^2 - c^2 b^2)}].$$

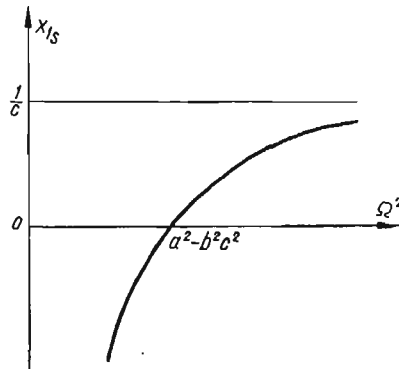
Rozwiązanie szczególne układu równości (2.5) otrzymujemy w postaci

$$(2.8) \quad y_1 = A_1 \sin \tau, \quad \vartheta_1 = A_2 \sin \tau,$$

gdzie

$$(2.9) \quad A_1 = \frac{a^2 - b^2 c^2 - \Omega^2}{\Omega^4 - (1+a^2)\Omega^2 + (a^2 - b^2 c^2)},$$

$$A_2 = \frac{-c\Omega^2}{\Omega^4 - (1+a^2)\Omega^2 + (a^2 - b^2 c^2)}.$$



Rys. 5

Zakładając, że ruch układu przedstawionego na rys. 4 można traktować jako ruch płaski bryły sztywnej, zbadamy położenie środka obrotu  $S$ . Jest to taki punkt, którego przemieszczenie pionowe  $y_s = 0$ . Ze związków geometrycznych na rys. 3 mamy

$$(2.10) \quad x_s = \frac{y_0}{\operatorname{tg} \vartheta},$$

gdzie  $x_s$  — odległość środka obrotu od początku układu  $O$ . Uwzględniając poprzednio wprowadzone oznaczenia otrzymujemy

$$(2.11) \quad x_{1s} = \frac{y_{10}}{\vartheta_1},$$

gdzie  $x_{1s} = x_s/l_1 + l_2$ .

Uwzględniając zależności (2.8) i (2.9) otrzymamy z (2.11)

$$(2.12) \quad x_{1s} = \frac{1}{c} \frac{\Omega^2 - (a^2 - b^2 c^2)}{\Omega^2}.$$

Zależność  $x_1 = f(\Omega^2)$  przedstawiona jest wykreślnie na rys. 5. Jeśli  $c = 0$ , wtedy

$$\vartheta_1(t) = 0$$

i z (2.8) i (2.9) otrzymamy

$$(2.13) \quad y_1(\tau) = \frac{1}{1-\Omega^2} \sin \tau, \quad \vartheta_1(\tau) = 0.$$

3. Rozpatrzmy teraz przypadek ogólny, gdy  $P_1(t) \neq P_2(t)$ . Załóżmy, że

$$(3.1) \quad P_1(t) = P_0 \sin \omega t, \quad P_2(t) = \kappa P_0 \sin \omega t,$$

gdzie  $\kappa$  oznacza bezwymiarowy współczynnik proporcjonalności. Wtedy z (2.1) otrzymamy

$$(3.2) \quad \begin{aligned} m\ddot{y} + (k_1 + k_2)y + (k_1 l_1 - k_2 l_2)\vartheta &= (k_1 + \kappa k_2)P_0 \sin \omega t, \\ m r^2 \ddot{\vartheta} + (k_1 l_1 - k_2 l_2)y + (k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2)\vartheta &= (k_1 l_1 - \kappa k_2 l_2)P_0 \sin \omega t. \end{aligned}$$

Przyjmując te same co poprzednio oznaczenia powyższy układ równań można doprowadzić do postaci:

$$(3.3) \quad \begin{aligned} \Omega^2 y_1'' + y_1 + c b^2 \vartheta_1 &= \frac{k_1 + \kappa k_2}{k_1 + k_2} \sin \tau, \\ \Omega^2 \vartheta_1'' + c y_1 + a^2 \vartheta_1 &= \frac{1}{b^2} \frac{k_1 l_1 - \kappa k_2 l_2}{(k_1 + k_2)(l_1 + l_2)} \sin \tau. \end{aligned}$$

Wprowadzimy teraz nowe parametry

$$(3.4) \quad \frac{k_2}{k_1} = \alpha \quad \text{i} \quad \frac{l_2}{l_1} = \beta,$$

wtedy

$$(3.5) \quad a^2 = \frac{1 + \alpha \beta^2}{b^2(1 + \alpha)(1 + \beta)^2}, \quad c = \frac{1 - \alpha \beta}{b^2(1 + \alpha)(1 + \beta)}$$

i ostatecznie z (3.3) otrzymamy

$$(3.6) \quad \begin{aligned} \Omega^2 y_1'' + y_1 + \frac{1 - \alpha \beta}{(1 + \alpha)(1 + \beta)} \vartheta_1 &= \frac{1 + \kappa \alpha}{1 + \alpha} \sin \tau, \\ \Omega^2 \vartheta_1'' + \frac{1 - \alpha \beta}{b^2(1 + \alpha)(1 + \beta)} y_1 + \frac{1 + \alpha \beta^2}{b^2(1 + \alpha)(1 + \beta)^2} \vartheta_1 &= \frac{1 - \kappa \alpha \beta^2}{b^2(1 + \alpha)(1 + \beta)} \sin \tau. \end{aligned}$$

Ten układ równań ma równanie charakterystyczne takie samo jak i poprzednio, rozwiązanie zaś szczególne jego będzie teraz w postaci

$$(3.7) \quad y_1 = A_1 \sin \tau, \quad \vartheta_1 = A_2 \sin \tau,$$

gdzie

$$(3.8) \quad A_1 = - \frac{\Omega^2 b^2 (1 + \alpha)(1 + \kappa \alpha)(1 + \beta) - \alpha(\beta + \kappa)}{b^2(1 + \alpha)^2(1 + \beta)[\Omega^4 - \Omega^2(1 + a^2) + (a^2 - b^2 c^2)]},$$

$$(3.9) \quad A_2 = - \frac{(1 + \alpha)(1 - \kappa \alpha \beta)\Omega^2 - \alpha(1 + \beta)(1 - \kappa)}{b^2(1 + \alpha)^2(1 + \beta)[\Omega^4 - \Omega^2(1 + a^2) + (a^2 - b^2 c^2)]}.$$

Podstawiając (3.7) do (2.11) i uwzględniając (3.8) i (3.9) otrzymamy

$$(3.10) \quad x_{1s} = \frac{\Omega^2 b^2 (1+\alpha)(1+\kappa\alpha)(1+\beta) - \alpha(\beta+\kappa)}{\Omega^2 (1+\alpha)(1-\kappa\alpha\beta) - \alpha(1+\beta)(1-\kappa)}$$

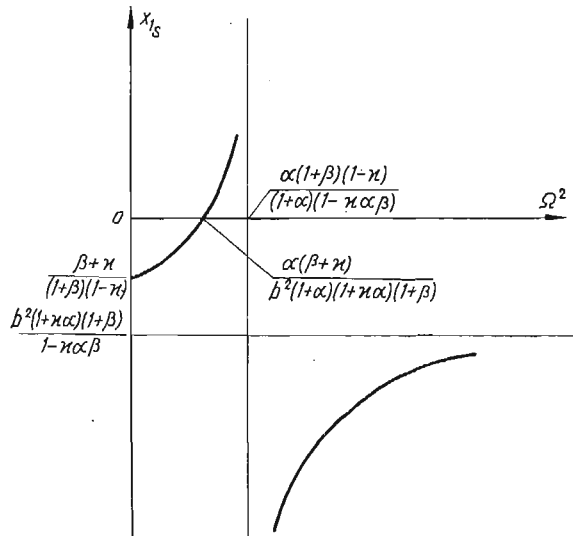
Niech teraz

$$(3.11) \quad \begin{aligned} R_1 &= b^2(1+\alpha)(1+\kappa\alpha)(1+\beta), & Q_1 &= \alpha(\beta+\kappa), \\ R_2 &= (1+\alpha)(1-\kappa\alpha\beta), & Q_2 &= \alpha(1+\beta)(1-\kappa). \end{aligned}$$

Wtedy zależność (3.10), określająca położenie na osi  $x$  środka obrotu  $S$  belki, przyjmie postać

$$(3.12) \quad x_{1s} = \frac{R_1 \Omega^2 - Q_1}{R_2 \Omega^2 - Q_2}$$

Zbadamy obecnie położenie punktu  $S$  w zależności od parametrów układu i częstości wymuszeń.



Rys. 6

Biorąc pod uwagę różne kombinacje parametrów układu ( $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\kappa$ ,  $b^2$ ) możemy wpływać na znak i wartość liczbową parametrów wtórnych opisanych zależnościami (3.11). Rozważania te w formie usystematyzowanej zawiera tablica 1, przy czym zawsze

$$\alpha > 0; \quad \beta > 0.$$

Wykresy zależności  $x_{1s} = f(\Omega^2)$  określone przez (3.12) przedstawiono na rysunkach 6—28, przy czym  $x_{1s}$  i  $\Omega^2$  są wielkościami bezwymiarowymi — zgodnie z (2.4) i (2.11).

Ogólnie na wykresach otrzymujemy jedną lub dwie gałęzie hiperboli, przy czym punkty charakterystyczne wykresu, jak położenie asymptot, punkty zerowe ( $\Omega^2 = 0$  i  $x_{1s} = 0$ ), a także znak pierwszej pochodnej (funkcja  $x_{1s} = f(\Omega^2)$  rosnąca lub malejąca) zależą od

parametrów (3.11). Mając więc cztery parametry pierwotne:  $b^2$  (2.3),  $\alpha$  i  $\beta$  (3.4) oraz  $\kappa$  (3.1) możemy zmieniając je wpływać w określony sposób na przebieg funkcji (3.12).

Poniżej omówiono dokładniej niektóre przypadki szczególne zależności (3.12) z uwagi na ich bardzo duże znaczenie, jeśli chodzi o zastosowania konstrukcyjne.

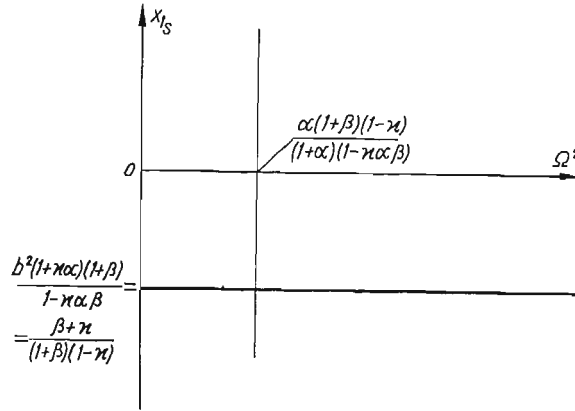
Tablica 1

Lp.	Wartości parametrów (3.11)				Wykresy funkcji $x_{1s} = f(\Omega^2)$ przedstawia Rysunek Nr:
$\kappa < 0 \Rightarrow R > 0, Q > 0$					
1	$-\infty < \kappa < 0$	$Q_1 < 0$	$R_1 < 0$	$R_1 Q_2 < R_2 Q_1$	6
2				$R_1 Q_2 = R_2 Q_1$	7
3				$R_1 Q_2 > R_2 Q_1$	8
4		$Q_1 = 0$	$R_1 = 0$	$R_1 = 0$	9
5				$R_1 > 0$	10
6				$R_1 < 0$	11
7		$Q_1 > 0$	$R_1 = 0$	$R_1 = 0$	12
8				$R_1 > 0$	13
9				$R_1 < 0$	14
10				$R_1 = 0$	15
$\kappa > 0 \Rightarrow R > 0, Q_1 > 0$					
11	$0 < \kappa \leq \infty$	$Q_2 < 0$	$R_2 < 0$	$R_1 Q_2 < R_2 Q_1$	16
12				$R_1 Q_2 = R_2 Q_1$	17
13				$R_1 Q_2 > R_2 Q_1$	18
14	$0 < \kappa < \infty$	$Q_2 < 0$	$R_2 = 0$	19	
15			$R_2 > 0$	20	
16		$Q_2 = 0$	$R_2 < 0$	21	
17			$R_2 = 0$	22	
18		$Q_2 > 0$	$R_2 > 0$	23	
19			$R_2 < 0$	24	
20			$R_2 = 0$	25	
21	$-\infty < \kappa < \infty$	$R_1 > 0$ $R_2 > 0$	$Q_1 > 0$ $Q_2 > 0$	$R_1 Q_2 < R_2 Q_1$	26
22				$R_1 Q_2 = R_2 Q_1$	27
23				$R_1 Q_2 > R_2 Q_1$	28

Następujące pozycje z tablicy 1 i odpowiadające im rysunki: poz. 2 (rys. 7), poz. 12 (rys. 17) i poz. 22 (rys. 27) stanowią przypadek, gdy położenie środka obrotu  $S$  nie zależy od wartości, jaką przybiera wymuszenie  $\Omega^2$  i jest wartością stałą ( $x_{1s} = \text{const}$ ). Zachodzi to wówczas, gdy  $R_1 Q_2 = R_2 Q_1$ .

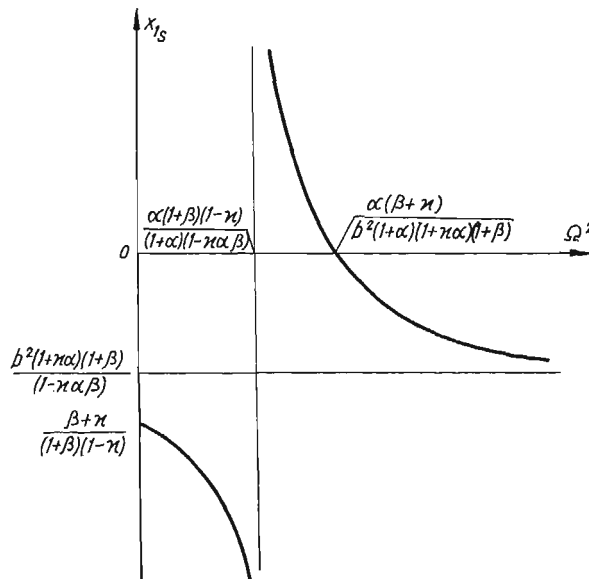


Pozycje 6, 7 i 8 (tablica 1) dotyczą przypadku, gdy  $\kappa = -\beta$ , a jeśli ponadto zachodzi  $\kappa = -1/\alpha$ , czyli  $\alpha\beta = 1$ , otrzymujemy przypadek 7 (rys. 12), kiedy belka wykonuje ruch obrotowy wokół stałego punktu  $x_{1s} \equiv 0$ . Widzimy, że mamy tu znaną sytuację, gdy



Rys. 7

$k_2 l_2 = k_1 l_1$  — uwzględniając (3.4). Oznacza to, że jeśli chcemy, aby środek masy pozostawał w spoczynku niezależnie od częstości wymuszenia, należy wartości  $k_1$  i  $k_2$  dobrać odwrotnie proporcjonalnie do odległości punktów  $A$  i  $B$  ( $l_1$  i  $l_2$ ) od środka masy (układu).

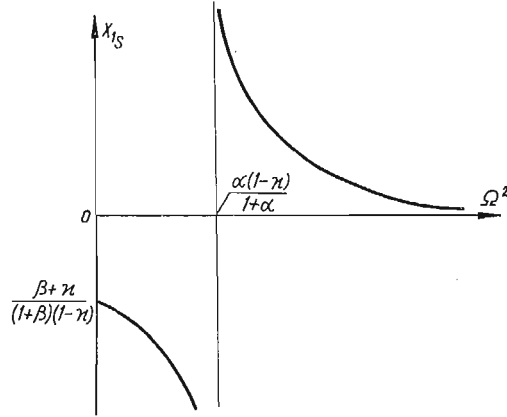


Rys. 8

Pozycja 4 (rys. 9) i 10 (rys. 15) opisują przypadek, gdy  $\kappa = -1/a$ , tj.  $\kappa = -k_1/k_2$ ; asymptota pozioma pokrywa się wtedy z osią  $\Omega^2$ , a odcięta asymptoty pionowej wynosi  $\alpha(1-\kappa)/(1+\alpha)$ . Widzimy więc, że przy  $\Omega^2$  rosnącym nieograniczenie środek obrotu  $S$

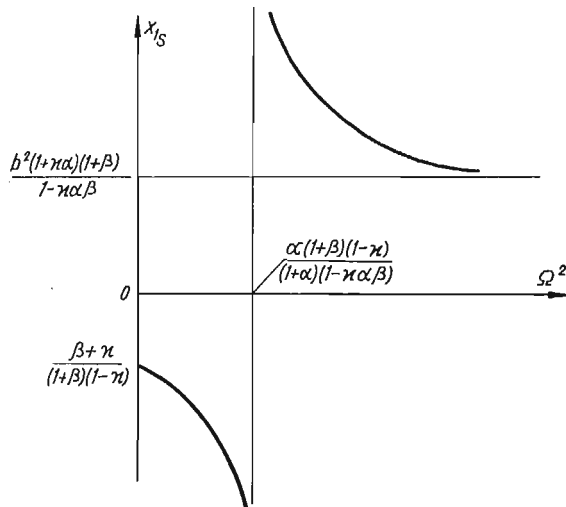
zbliża się asymptotycznie do środka masy. Rosnący lub malejący przebieg funkcji zależy od wartości  $\beta$ .

Pozycja 17 (rys. 22) opisuje przypadek szczególnie ważny z punktu widzenia konstrukcyjnego, mianowicie  $Q_2 = 0$ ,  $R_2 = 0$ , czyli  $\kappa = 1$ ,  $[(P_1(t) = P_2(t)]$  i ponadto  $\alpha = 1/\beta$ ,



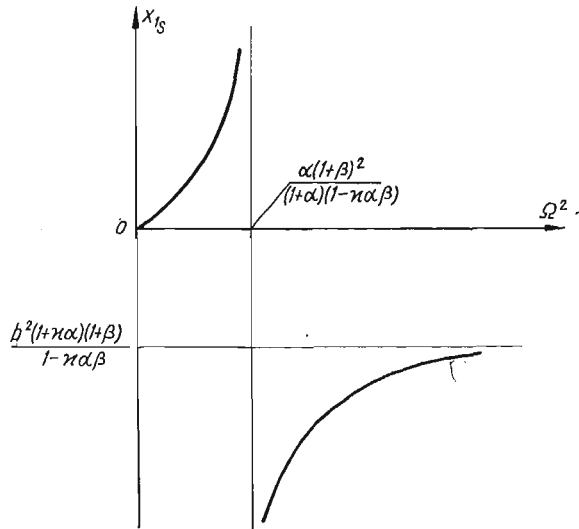
Rys. 9

tj.  $k_2/k_1 = l_1/l_2$ . Oznacza to, że wszystkie punkty belki będą doznawały jednakowych przemieszczeń pionowych (punkt  $S$  jest punktem niewłaściwym) tylko wtedy (niezależnie od  $\Omega^2$ ), jeśli wymuszenia w punktach podparcia będą takie same, a sztywności łączników odwrotnie proporcjonalne do odległości punktów  $A$  i  $B$  ( $l_1$  i  $l_2$ ) od środka masy.

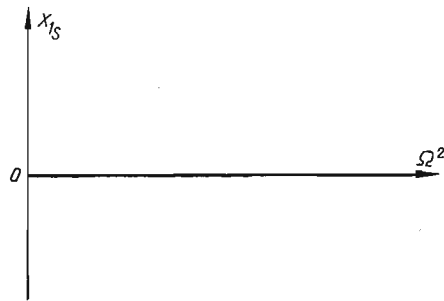


Rys. 10

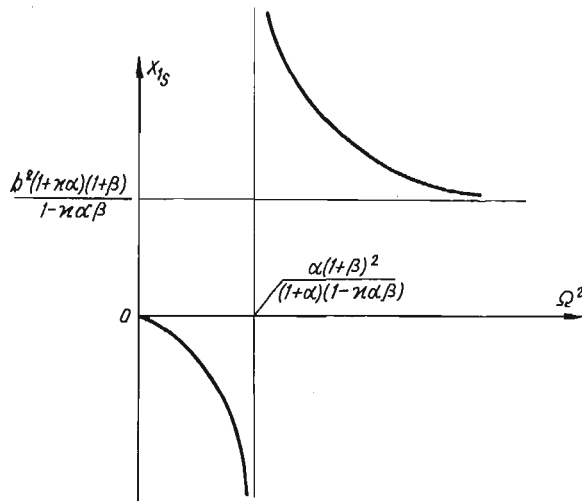
Jeśli zachodzi jedynie warunek, że  $R_2 = 0$  (pozycja 14 (rys. 19) i 20 (rys. 25)), czyli  $\kappa\alpha\beta = 1$ , to otrzymujemy liniowy charakter  $x_{1S} = f(\Omega^2)$ , przy czym jeśli  $\Omega^2 \rightarrow \infty$ , to również  $x_{1S} \rightarrow \pm \infty$ .



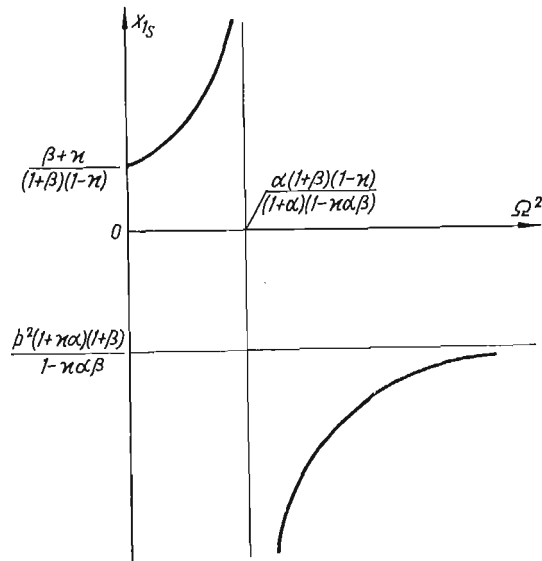
Rys. 11



Rys. 12

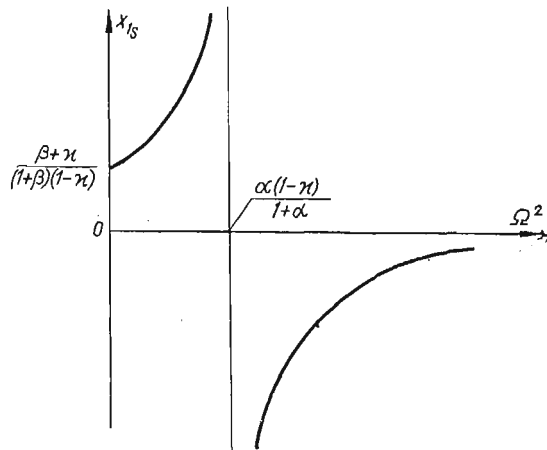


Rys. 13



Rys. 14

Pozycja 15 (Rys. 20) i 19 (Rys. 24) w Tablicy I zawiera przypadek, gdy zależność (3.12) nie posiada asymptoty pionowej, a asymptota pozioma ma wartość skończoną. Oznacza to, że powyżej pewnej umownej wartości  $\Omega^2$  można traktować środek obrotu  $S$  jako ustalony na osi  $x$ .

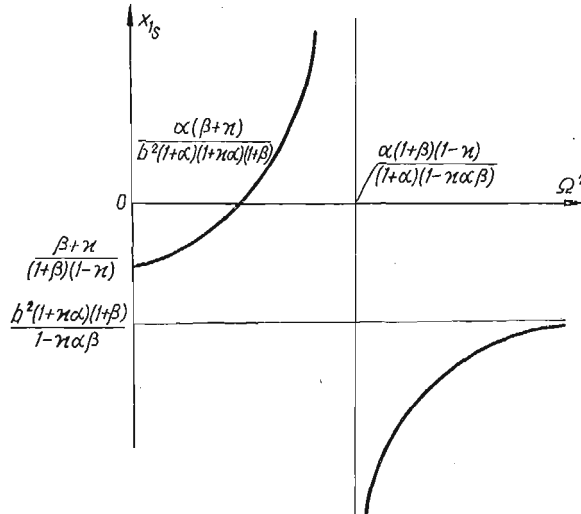


Rys. 15

Pozycja 16 (rys. 21) i 18 (rys. 23) zawiera przypadek, gdy istnieje — analogicznie jak wyżej — asymptota pozioma, natomiast asymptota pionowa istnieje i pokrywa się z osią  $x_{1S}$  (przechodzi przez  $O$ ), czyli  $\kappa = 1$ ,  $\alpha\beta \neq 1$ , ( $Q_2 = 0$ ,  $R_2 \neq 0$ ). Przy małej wartości  $\Omega^2$  belka

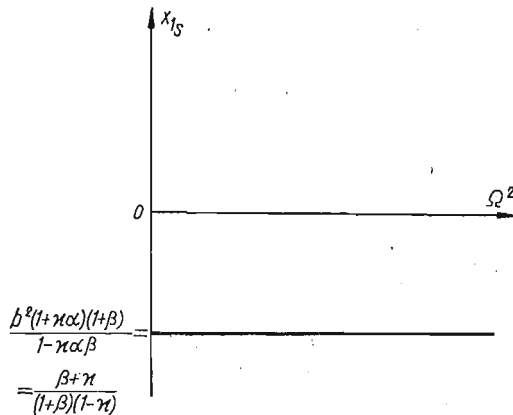
nie ma ruchu obrotowego, następnie wartość odciętej  $x_{1s}$  maleje bardzo szybko, przechodzi przez  $O$  i gdy  $\Omega^2 \rightarrow +\infty$ , to

$$x_{1s} \rightarrow \frac{R_1}{R_2} = \frac{b^2(1+\alpha)(1+\beta)}{1-\alpha\beta}$$



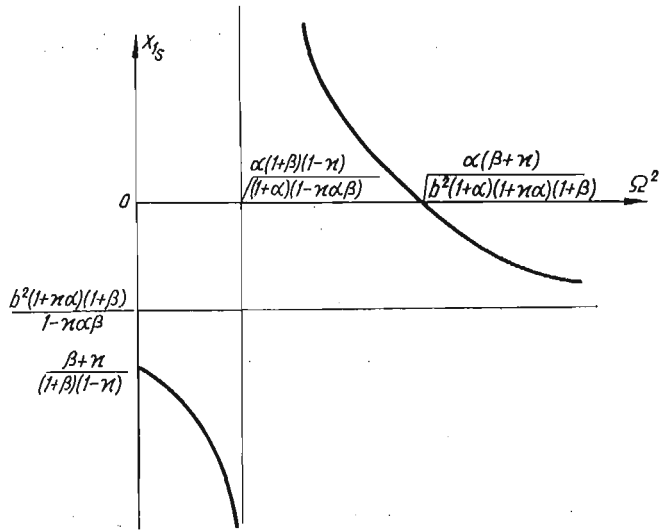
Rys. 16

Należy jeszcze podkreślić, że jedynie w dwóch wypadkach pozycja 6 (rys. 11) i pozycja 8 (rys. 13) przy  $x_{1s} = f(\Omega^2) \neq \text{const}$  wartość  $x_{1s}(0) = 0$ . Ponadto w żadnym z możliwych przypadków  $x_{1s}(0) \neq 0$ , co widać wyraźnie z usytuowania poziomych asymptot funkcji (3.12).

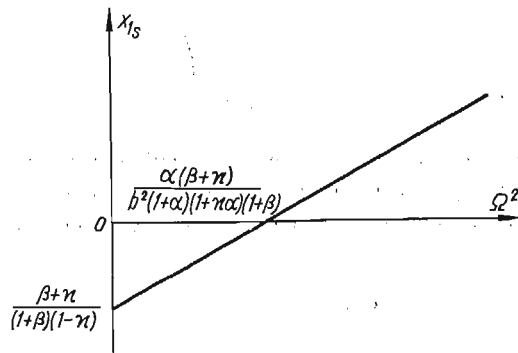


Rys. 17

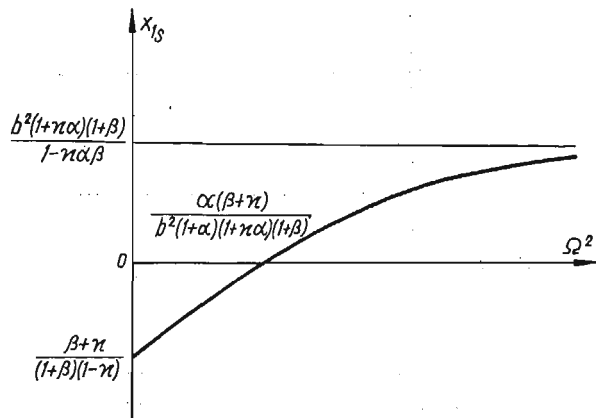
4. W przypadku projektowania układu sprężysto podpartego, który może być zmodelowany zgodnie z rys. 4 przy założonym środku masy, możemy posługiwać się zależnościami (3.11) i (3.12) dla wyznaczenia  $x_{1s}$  przy danej częstotliwości wymuszeń  $\Omega^2$  i  $\kappa$  (3.1). Otrzymujemy to, zakładając wartości  $k_1$  i  $k_2$  (określamy  $\alpha$ ), znając lub przyjmując  $l_1$  i  $l_2$  (okreś-



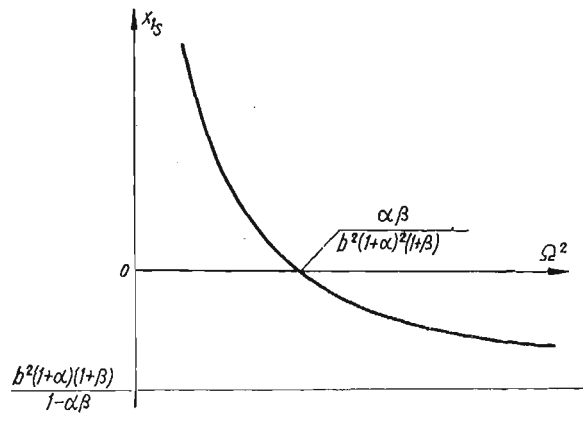
Rys. 18



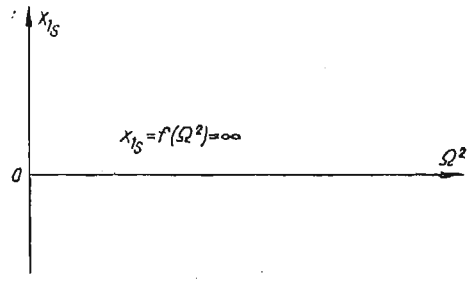
Rys. 19



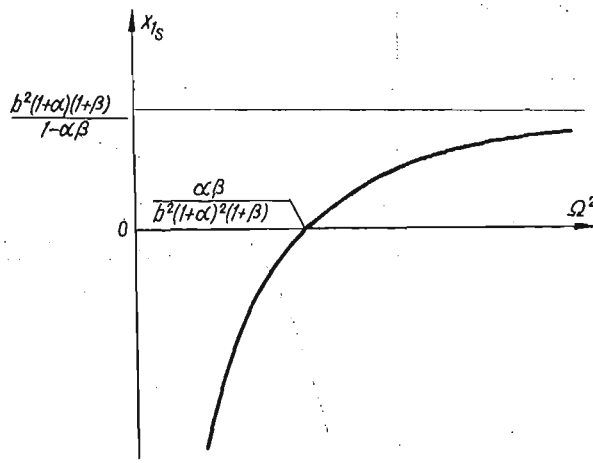
Rys. 20



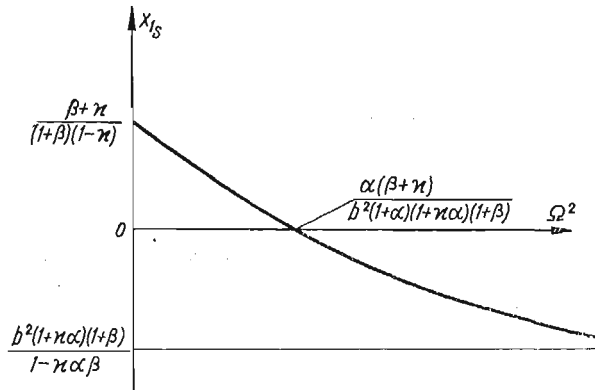
Rys. 21



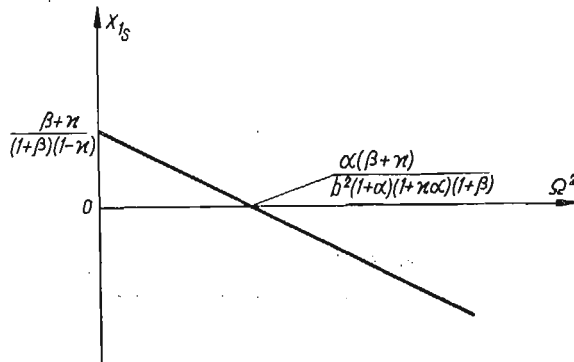
Rys. 22



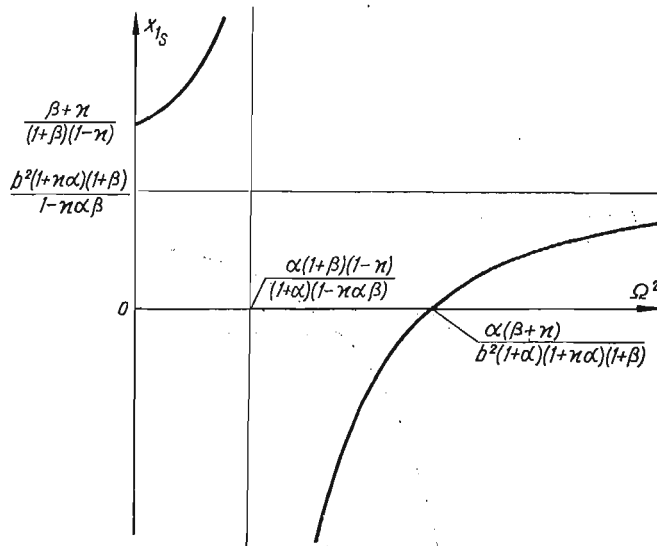
Rys. 23



Rys. 24



Rys. 25



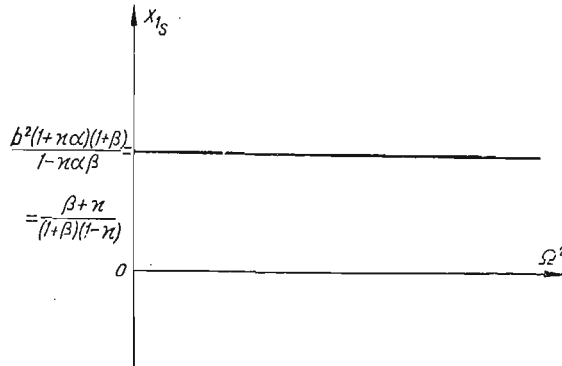
Rys. 26



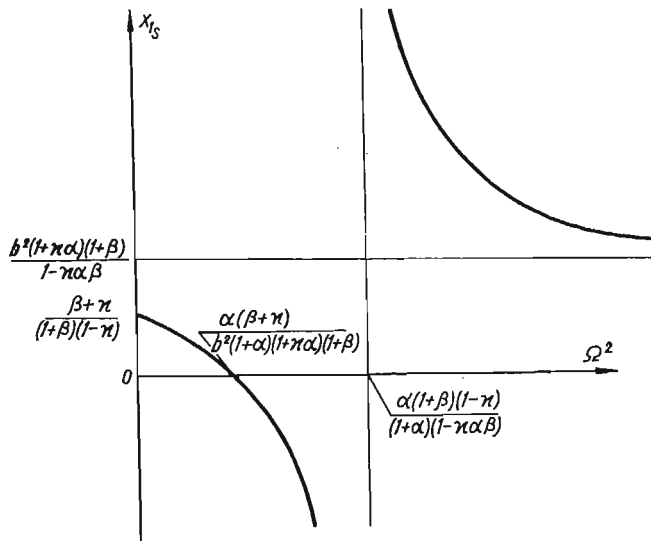
lamy  $\beta$ ), oraz promień bezwładności  $r$  (2.3) — mając wartość masy  $m$ . Znając  $x_{1s}$  na podstawie (2.11) i (2.4) określamy  $x_s$  — odległość środka obrotu  $S$  od środka masy (początku układu) i przemieszczenie dowolnego punktu  $X$  belki w kierunku pionowym z zależności (4.1)

$$y_X = (x_s + x_x)\vartheta.$$

W sytuacji, gdy prototyp konstrukcji wykaże znaczne odstępstwa, jeśli chodzi o przyjęte do obliczeń analitycznych wartości: masy  $m$ , położenia środka masy  $O$  (zmiana  $l_1$  i  $l_2$ ),



Rys. 27



Rys. 28

wartość momentu bezwładności  $J = mr^2$  — co powoduje zmianę współczynników  $\beta$  i  $b^2$  — należy w miarę możliwości dążyć do korekty konstrukcyjnej, (korekta  $\beta$  i  $b^2$ ), aby zapewnić spełnienie warunków (1.1) dla określonego punktu belki. O ile nie można dostatecznie polepszyć sytuacji drogą zmian konstrukcyjnych, gdyż często wymagałoby to wykonania nowego prototypu, należy operować współczynnikiem  $\alpha$  (czyli wartościami

$k_1$  i  $k_2$ ) tak, aby zależności (3.11) miały takie same wartości co przy obliczeniach teoretycznych, które zakładały spełnienie warunków (1.1). Tą drogą uzyskamy zachowanie się rzeczywistej konstrukcji zgodne z jej modelem obliczeniowym bez konieczności ponownego jego projektowania.

#### Literatura cytowana w tekście

1. E. MARQUARD, *Schwingungsdynamik des schnellen Strassenfahrzeugs*, Verlag W. Girardet, Essen 1952
2. W. T. THOMSON, *Vibration Theory and Applications*, Prentice — Hall, Inc, N. J., 1965.

#### Резюме

#### СИСТЕМА С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ КАК „ДИНАМИЧЕСКИЙ ИЗОЛЯТОР” КОЛЕБАНИЙ

Проводится анализ поведения механической системы, моделью которой служит недеформируемая балка, с асимметрически расположенным центром массы опертая на двух упругих опорах различной жесткости. Система подвергается кинематическим вынуждениям гармонической силой, а амплитуда вынуждений является разной для обеих подпор.

В рассуждениях определяется положение центра поворота балки, в зависимости от параметров и частоты вынуждающей силы.

#### Summary

#### THE SYSTEM WITH TWO DEGREES OF FREEDOM AS A "DYNAMIC VIBRATOR ABSORBER"

Investigated is the behaviour of a mechanical system containing a rigid beam with asymmetrically located central point of mass supported on two elastic springs with different rigidities. The system is kinematically extorted to vibrate by an external harmonic force. The amplitude of vibration is different for both supports.

The location of the central point of rotation of the beam is analysed for various parameters of the system and frequency of extorting force.

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI  
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

*Praca została złożona w Redakcji dnia 19 lipca 1967 r.*