

## NOŚNOŚĆ GRANICZNA ROZCIĄGANYCH OSIOWO-SYMETRYCZNYCH PRĘTÓW OSŁABIONYCH SZEREGIEM KARBÓW KĄTOWYCH

LECH DIETRICH, KAROL TURSKI (WARSZAWA)

### 1. Wstęp

Jak wykazał HILL [1], przy założeniu warunku plastyczności Hubera-Misesa otrzymuje się dla osiowo-symetrycznego zagadnienia niehiperboliczny układ równań, którego nie udaje się rozwiązać.

Natomiast SHIELD [2] uzyskał efektywne rozwiązanie dla przypadku walcowego stempla wciskanego w półprzestrzeń przy założeniu warunku plastyczności Treski. W pracy [4] stwierdzono, że rozwiązanie to odpowiada liczbowo z przeciwnym znakiem przypadkowi rozciągania.

Następnie przy tych samych założeniach, jakie poczynił Shield, opublikowano [5] rozwiązania dla rozciąganych prętów osłabionych wycięciami o różnych kształtach zajmując się głównie oceną nośności granicznej.

W niniejszej pracy w oparciu o warunek Treski i stowarzyszone prawo płynięcia podano kompletne graficzne rozwiązanie dla osiowo-symetrycznego rozciąganego pręta osłabionego kątowym wycięciem oraz sposób oszacowania nośności granicznej dla pręta z wieloma kątowymi karami przy różnych odległościach między nimi i przeprowadzono doświadczalną weryfikację uzyskanych rozwiązań.

### 2. Zasadnicze równania

Rozwiązanie problemu osiowej symetrii jest określone przez cztery składowe tensora naprężenia i dwie składowe prędkości płynięcia. Przez wprowadzenie postulatu pełnej plastyczności Haara-Kármána, warunku plastyczności Treski i stowarzyszonego z nim prawa płynięcia dla materiału izotropowego i idealnie plastycznego można najpierw rozwiązać układ czterech równań określających naprężenia, a następnie z warunku izotropii i warunku nieściśliwości określić dwie składowe prędkości płynięcia.

W przypadku rozciągania, stan naprężenia będzie więc odpowiadał punktom leżącym na krawędzi pryzmy odwzorowującej warunek plastyczności Treski w przestrzeni naprężeń głównych, dla której prędkości odkształceń będą spełniały następujące nierówności:

$$(2.1) \quad \dot{\epsilon}_1 \geq 0, \quad \dot{\epsilon}_2 \leq 0, \quad \dot{\epsilon}_3 \leq 0.$$

Przy założeniu  $\sigma_1 > \sigma_2$  stan naprężenia będzie spełniał zależności:

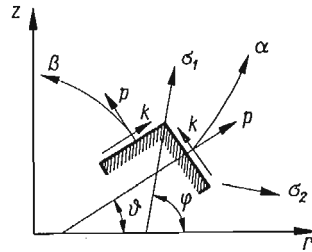
$$(2.2) \quad \sigma_1 - \sigma_2 = 2k, \quad \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_0.$$

Wprowadzając dwa parametry  $p, \vartheta$ , których znaczenie podane jest na rys. 1 otrzymuje się podane przez SHIELDA [2] równania charakterystyk i zależności, które muszą być wzdłuż nich spełnione

$$(2.3) \quad \frac{dz}{dr} = \operatorname{tg} \vartheta \quad dp - 2kd\vartheta - \frac{k}{r} (\sin \vartheta - \cos \vartheta) ds_\alpha = 0 \quad \text{dla rodziny } \alpha$$

$$\frac{dz}{dr} = -\operatorname{ctg} \vartheta \quad dp + 2kd\vartheta + \frac{k}{r} (-\sin \vartheta + \cos \vartheta) ds_\beta = 0 \quad \text{dla rodziny } \beta.$$

Po przekształceniu równań dla prędkości, można w prosty sposób wykazać, że ich linie charakterystyczne pokrywają się z charakterystykami dla naprężeń.



Rys. 1

Oznaczamy przez  $w$  prędkość w kierunku osi  $z$ , przez  $u$  prędkość w kierunku  $r$ , przez  $U$  i  $W$  oznaczmy odpowiednio prędkości wzdłuż linii  $\alpha$  i  $\beta$ .

Wówczas zależności między tymi prędkościami będą następujące

$$(2.4) \quad U = u \cos \vartheta + w \sin \vartheta; \quad W = w \cos \vartheta - u \sin \vartheta$$

i zależności odwrotne:

$$(2.5) \quad u = U \cos \vartheta - W \sin \vartheta; \quad w = U \sin \vartheta + W \cos \vartheta.$$

Analogicznie jak dla naprężeń uzyskuje się również związki dla prędkości wzdłuż charakterystyk

$$(2.6) \quad dU - Wd\vartheta = -\frac{u}{2r} ds_\alpha \quad \text{dla rodziny } \alpha,$$

$$dW + Ud\vartheta = -\frac{u}{2r} ds_\beta \quad \text{dla rodziny } \beta.$$

Układy równań różniczkowych dla naprężeń i prędkości [2.3]; [2.6] można rozwiązać przy konkretnych problemach brzegowych na drodze numerycznej.

W niniejszej pracy w obszarze płynięcia obliczenia wykonano za pomocą arytmometru elektrycznego, natomiast przedłużenie w obszar sztywny oraz hodograf wykonano metodą graficzną zaproponowaną przez MROZA [6].



pręta poza karbem zbudowano przedłużenie pola naprężeń, które spełnia równania równowagi, warunki brzegowe i nie przekracza warunku plastyczności.

Na linii  $\alpha$ - $BC$  mamy dane wartości  $p$  i  $\vartheta$ , natomiast z warunku symetrii mamy określony kąt  $\vartheta = \pi/4$  na osi  $z$ . Dane te pozwalają określić pole naprężeń w całym obszarze  $BCEG$ . W pobliżu osi symetrii zależności wzdłuż charakterystyk (2.3) po rozwinięciu upraszczają się do postaci:

$$(3.1) \quad \begin{aligned} dp - 4k d\vartheta &= 0 && \text{dla rodziny } \alpha, \\ dp + 4k d\vartheta &= 0 && \text{dla rodziny } \beta. \end{aligned}$$

Punkt  $G$  jest początkiem linii nieciągłości naprężeń i jest określony przez przecięcie się dwóch charakterystyk wychodzących z punktów  $B$  oraz  $3$ . Mając dane wartości  $p$  i  $\vartheta$  na linii  $BG$  oraz warunek, że na swobodnej powierzchni panuje stan jednoosiowego rozciągania, a więc  $p = k$ , możemy określić położenie linii  $BF$ . Wychodząc z punktu  $F$ , w którym styczna do linii  $BF$  jest równoległa do osi  $z$ , ograniczamy przedłużenie pola naprężeń powierzchnią nieciągłości  $FE$  budowaną w ten sposób, że ponad nią panuje stan jednoosiowego rozciągania lub ściskania. Wartości tych jednoosiowych naprężeń są podane na rys. 2 jako wielokrotności stałej materiałowej  $k$ . Linie nieciągłości są oznaczone liniami przerywanymi.

Na podstawie tak określonego pola naprężeń możemy wyznaczyć wartość współczynnika zwiększenia nośności granicznej, który jest zdefiniowany jako stosunek

$$(3.2) \quad f = \frac{1}{kR^2} \int_0^R \sigma_z r dr,$$

gdzie  $R$  jest promieniem najmniejszego przekroju.

Dla pręta z karbem o kącie wycięcia  $2\omega = 90^\circ$  współczynnik ten wynosi  $f_{45^\circ} = 1,953$ .

Obliczając wypadkowe siły w największym przekroju karbu oraz powierzchni nieciągłości  $EF$  możemy ocenić dokładność numerycznego określenia pola charakterystyk. W omawianym przypadku wielkość tych sił różniła się o 2%. W rozwiązaniach podanych przez SHIELDA [2] oraz EASONA i SHIELDA [3] wykonanych na maszynie liczącej analogiczna różnica wynosiła odpowiednio 1% i 3,5%.

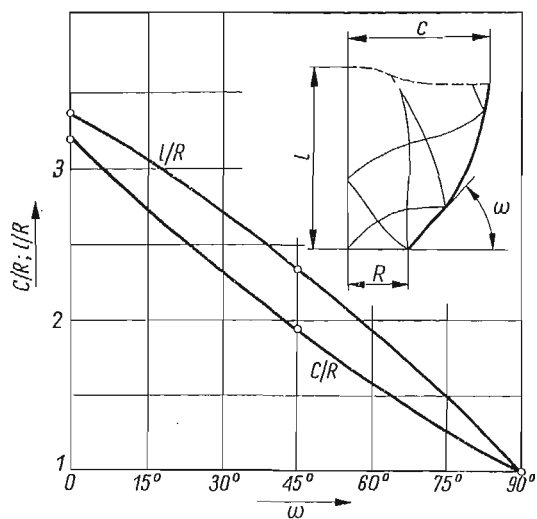
Na podstawie przedłużenia w obszar sztywny możemy określić minimalną wielkość dwu parametrów geometrycznych, niezbędną do realizacji rozwiązania ograniczonego charakterystyką  $B34C$ .

Są to:

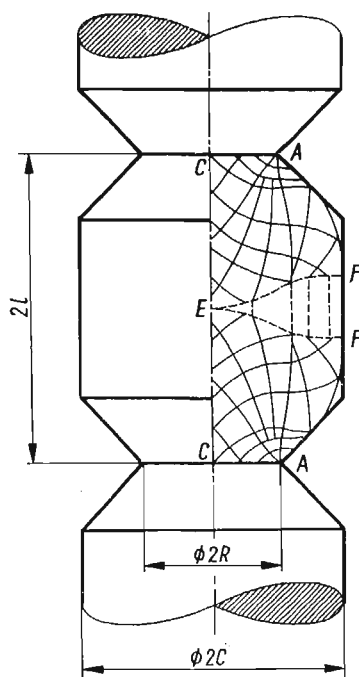
- średnica części cylindrycznej pręta,
- długość  $CE$ .

Dla obliczonego przypadku parametry te odniesione do promienia  $R$  wynoszą:  $(C/R)_{45^\circ} = 1,95$ ;  $(l/R)_{45^\circ} = 2,34$ . Wykorzystując wyniki uzyskane w pracy SHIELDA [2] dla karbu szczelinowego ( $\omega = 0$ ), możemy zbudować wykres zależności  $C/R$  oraz  $l/R$  w funkcji kąta  $\omega$  (rys. 3). Rzędne wykresu  $C/R$  są większe od analogicznego wykresu uzyskanego w sposób przybliżony w pracy [7]. Największa różnica występuje dla  $\omega = 0^\circ$  i wynosi 8,1%.

Mając rozwiązanie dla pręta osłabionego pojedynczym wycięciem możemy łatwo określić takie najmniejsze wymiary pręta z szeregiem analogicznych wycięć, żeby jego



Rys. 3



Rys. 4

nośność graniczna nie była mniejsza od nośności granicznej pręta z pojedynczym karbem. Zestawiając mianowicie dwa symetryczne rozwiązania (rys. 4) otrzymuje się tę niezbędną najmniejszą odległość między dwoma wycięziami. Między liniami nieciągłości  $EF$  panuje stan jednoosiowego rozciągania lub ściskania.

## 4. Rozwiązanie dla prędkości

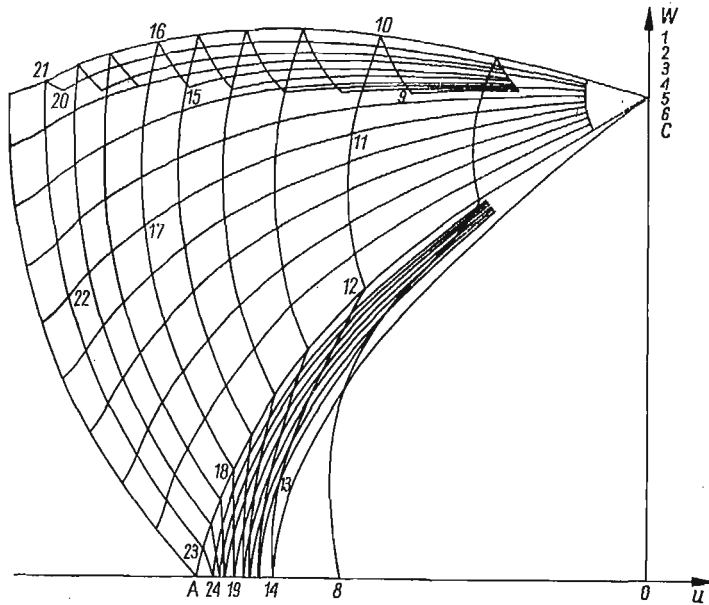
Przyjmujemy, że płynięcie materiału odbywa się w polu ograniczonym liniami  $AC43B$  (rys. 2). Punktem wyjścia do określenia prędkości płynięcia są warunki brzegowe, jakie muszą być spełnione w otoczeniu punktu  $C$ . Zagadnienie to było szczegółowo dyskutowane przez SHIELDA [2].

Przyjmijmy, że część sztywna nad linią  $B34C$  porusza się z prędkością o składowych równych  $u = 0$ ,  $w = 1$ . Wykorzystując warunek ciągłości jaki musi być spełniony na linii  $B34C$  otrzymujemy z równania (2.4), że prędkość normalna do tej linii będzie równa  $W = \cos\vartheta$ . Wstawiając to do związku (2.6), który musi być spełniony wzdłuż linii oraz wykorzystując (2.5) i zależność  $ds_\alpha = dr/\cos\vartheta$  otrzymujemy równanie różniczkowe:

$$(4.1) \quad \frac{d(U - \sin\vartheta)}{U - \sin\vartheta} = -\frac{dr}{2r},$$

którego rozwiązaniem jest

$$(4.2) \quad U - \sin\vartheta = \frac{A}{\sqrt{r}}.$$



Rys. 5

Ażeby prędkość  $U$  była skończona dla  $r = 0$  stała  $A$  musi być równa zero. Wzdłuż linii  $B34C$  otrzymujemy więc:

$$(4.3) \quad U = \sin\vartheta, \quad W = \cos\vartheta.$$

W pobliżu osi symetrii charakterystyki nachylone są pod kątem  $45^\circ$ , a więc panują tam warunki podobne jak w przypadku rozciąganego gładkiego pręta, dla którego istnieje

rozwiązanie w postaci zamkniętej [2]. Korzystając z tych zależności otrzymujemy dla punktu 8 prędkości:

$$u = 2/\pi, \quad w = 0.$$

Mając wartości prędkości na linii  $B34C$  możemy wykreślić metodą hodografu [6] wyznaczyć prędkości w całym polu płynięcia.

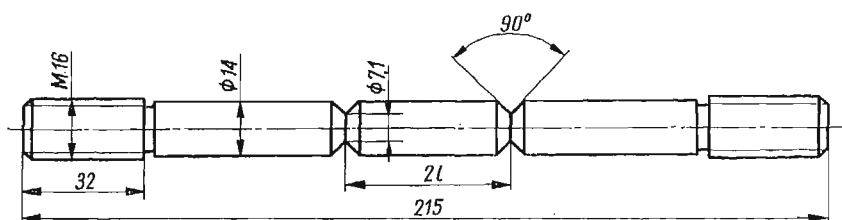
Prędkości danego punktu siatki linii poślizgu są odwzorowane na rys. 5 przez wektory łączące biegun 0 z odpowiednim punktem hodografu. Mając określone pole prędkości możemy obliczyć prędkości odkształcenia wzdłuż kierunków głównych i sprawdzić nierówności (2.1). Stwierdzono, że nierówności te są spełnione w całym obszarze.

Z prędkości odkształceń i naprężeń głównych obliczono ze wzoru  $D = \sigma_i \varepsilon_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) moc dysypacji dla kilku punktów pola płynięcia i stwierdzono, że jest wszędzie dodatnia. Miejsca te, zakreśkowane na rys. 2, tak wybrano, aby dokonać sprawdzenia w każdym, jakościowo różnym obszarze pola płynięcia.

### 5. Wyniki doświadczeń

Doświadczenia miały na celu weryfikację podanych rozwiązań i oszacowań nośności granicznej dla prętów z dwoma kątowymi wycięciami o zmiennej odległości między nimi. Zbadano 17 próbek podzielonych na dwie serie<sup>(1)</sup>, wykonanych ze stopu aluminium (PA6 w stanie półtwardym). Na rys. 6 przedstawiono zasadnicze wymiary próbek w milimetrach. Dla wszystkich prętów średnica dna karbu była stała, stosunek  $C/R$  wahał się w granicach 1,95-1,97.

Próbki mocowano za pomocą przegubów kulowych na uniwersalnej hydraulicznej maszynie wytrzymałościowej. Do pomiaru odkształceń użyto mechanicznego ekstensometru typu AMSLER o najmniejszej podziałce 0,01 mm i mocowanego do próbki na bazie pomiarowej 120 mm.



Rys. 6

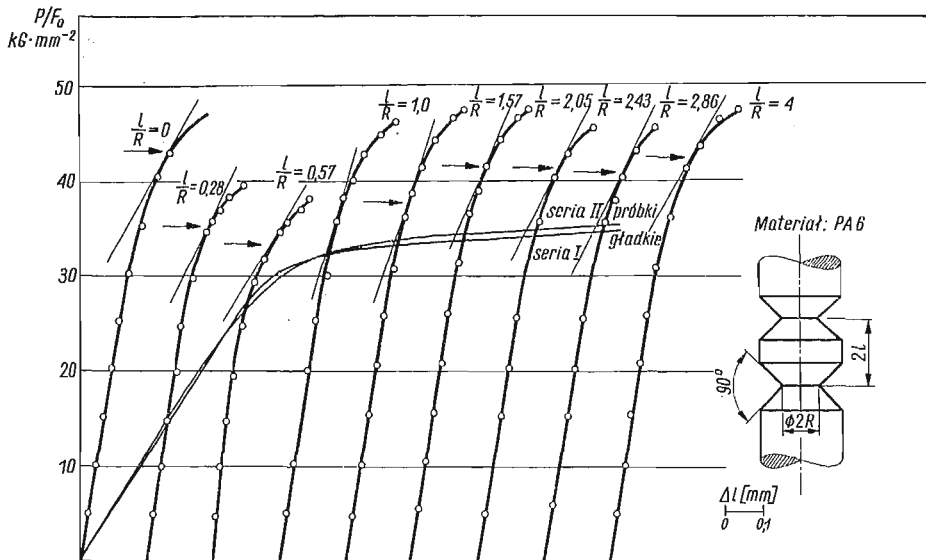
Na wykresie (rys. 7) podano przykładowo początkowe części krzywych rozciągania dla jednej serii próbek. Strzałkami oznaczono wartość naprężeń gdzie tangens nachylenia stycznej do krzywej rozciągania wynosi 0,275<sup>(2)</sup> wartości tangensa pochylenia krzywej

<sup>(1)</sup> Poszczególne serie wykonane były z innych prętów, których własności mechaniczne różniły się nieznacznie (rys. 7).

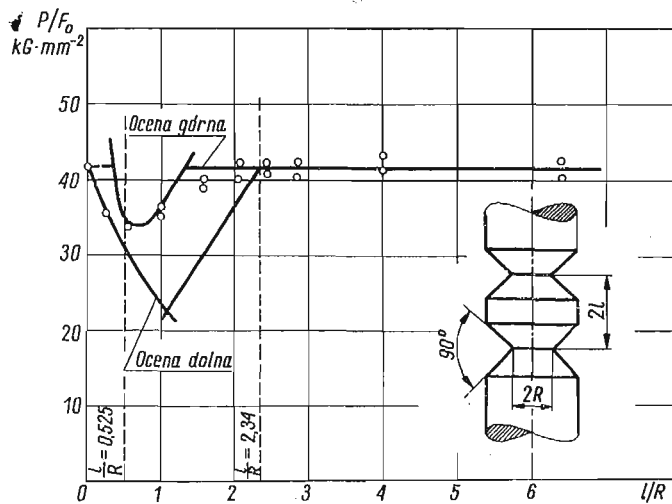
<sup>(2)</sup> Jako kryterium wyboru wartości 0,275 przyjęto najlepszą zgodność wyników dla obu serii.

w zakresie sprężystym. Wielkości tych naprężeń naniesiono, jako małe kółeczka na rys. 8 w funkcji stosunku  $l/R$ .

Przy zmniejszeniu odległości  $2l$  po przekroczeniu wartości teoretycznej  $l/R = 2,34$  zaznacza się wyraźny spadek nośności granicznej próbek. Przy dalszym natomiast zmniejsz-



Rys. 7



Rys. 8

zeniu wymiaru  $2l$  dla wartości  $l/R < \sim 0,5$  następuje zwiększenie nośności granicznej. Zauważono przy tym zmianę mechanizmu zniszczenia. Dla próbek  $l/R > 1$  zniszczenie następowało przez rozdzielenie wzdłuż najmniejszej średnicy jednego z wycięć, a dla



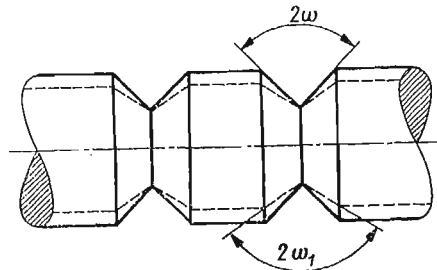
próbek o stosunku  $0 < l/R < 1$  przez rozdzielenie na powierzchni stożkowej leżącej między karbami.

Na rys. 8 liniami ciągłymi określono wartości teoretycznych oszacowań nośności granicznej uzyskanych w tej pracy.

## 6. Ocena nośności granicznej

Posługując się otrzymanym rozwiązaniem dla karbu pojedynczego można uzyskać kompletne rozwiązanie dla pręta z szeregiem kątowych wycięć, o ile stosunek  $l/R$  i  $C/R$  nie jest mniejszy od pewnej wielkości zależnej od kąta wycięcia  $\omega$ . Wpływ wielkości  $C/R$  na nośność graniczną dla pręta z pojedynczym kątowym wycięciem był badany w pracach [5, 7] gdzie podano sposób oszacowania nośności granicznej. Wnioski wysnute tam są oczywiście prawdziwe również dla pręta z szeregiem wycięć w przypadku zbyt małych wartości  $C/R$ .

Obecnie zajmiemy się określeniem górnej i dolnej oceny nośności granicznej prętów z kilkoma wycięciami o kącie  $90^\circ$  umieszczonymi blisko siebie ( $0 < l/R < 2,34$ ) przy założeniu, że wartość  $C/R$  jest wystarczająca. Oceny te odnoszono do nośności próbki z pojedynczym karbem (na rys. 7 krzywa  $l/R = 0$ ). Dla danej wartości  $l/R$  w granicach  $1,1 < l/R < 2,34$  jako dolną ocenę nośności granicznej dla pręta z wycięciami o kącie  $2\omega$  przyjęto nośność graniczną pręta z wycięciami o takim największym możliwym kącie  $2\omega_1$ , dla którego udaje się jeszcze zbudować kompletne rozwiązanie (rys. 9).



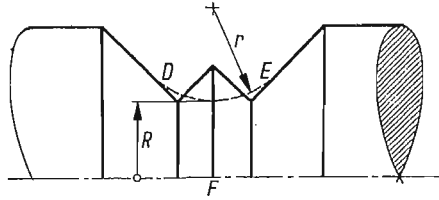
Rys. 9

Gdy odległość między karbami jest bardzo mała, można uzyskać dolną ocenę nośności granicznej przez wpisanie między zewnętrzne tworzące wycięcia takiego najmniejszego promienia  $r$ , żeby łuk  $DE$  obejmował łuk wpływu dla punktu  $F$  (rys. 10, 11). W tym przypadku nośność graniczna dla pręta z pojedynczym kołowym wycięciem o promieniu  $r$  będzie dolną oceną nośności granicznej dla pręta z dwoma blisko umieszczonymi karbami kątowymi.

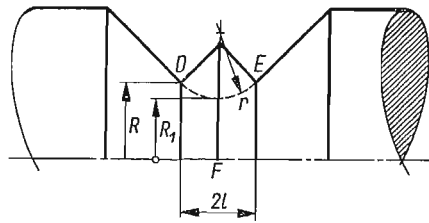
Uzyskano praktycznie jednakowe dolne oceny otrzymane w oparciu o rysunki 10 i 11, przy czym w tym ostatnim przypadku współczynnik zwiększenia nośności granicznej  $f$  odnoszono do średnicy  $2R$  dla karbu kąтового.

Za pomocą wykresu z rys. 12 możemy łatwo określić zarówno promień  $r$  spełniający podany wyżej warunek, jak i współczynnik  $f$  zwiększenia nośności granicznej dla pręta z kołowym wytoczeniem.

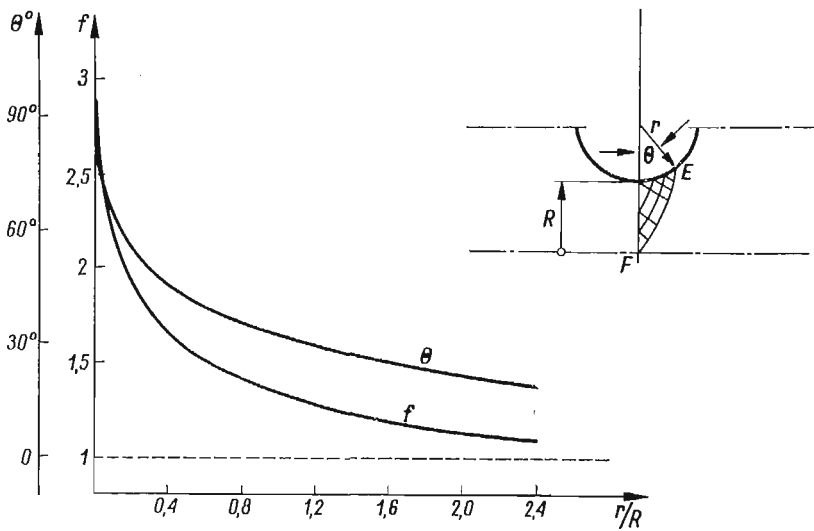
Górną ocenę nośności granicznej dla zbyt małych wartości  $l/R$  można uzyskać z rozwiązania ograniczonego linią  $B34C$  (rys. 2), które jest przecież kinematycznie dopuszczalne o ile stosunek  $l/R$  nie jest mniejszy od 0,525, kiedy to rozwiązanie dla jednego wycięcia nakłada się na rozwiązanie dla wycięcia sąsiedniego. Dla wartości  $0,35 < l/R < 1,3$



Rys. 10

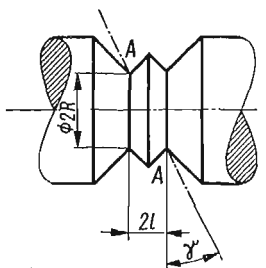


Rys. 11



Rys. 12

lepsze górne graniczne obciążenie można otrzymać zakładając, że zniszczenie pręta nastąpi przez poślizg w płaszczyźnie  $A-A$  (rys. 13), której kąt nachylenia do osi  $r$  jest określony jako  $\gamma = \text{arctg } l/R$ .



Rys. 13

Dla  $0 < l/R < 0,35$  jako górną ocenę przyjęto rozwiązanie dla karbu z pojedynczym wycięciem o takim samym kącie  $\omega$ . Wartości uzyskane z tego rozwiązania są w tym zakresie na pewno większe od rozwiązania ścisłego dla pręta osłabionego dwoma karbami.

### 7. Wnioski

Przeprowadzone w ramach niniejszej pracy badania dla prętów z karbami kątowymi wykazały, że proponowane rozwiązania teoretycznie odpowiadają pod względem jakościowym i ilościowym wynikom doświadczalnym.

Podane wykresy parametrów geometrycznych  $C/R$  oraz  $l/R$  (rys. 3) wraz z wykresem współczynnika  $f$  charakteryzującym nośność pręta [7] pozwalają na szybką ocenę optymalnych wymiarów konstrukcji tego typu.

Dla określenia nośności granicznej w zakresie  $0 < l/R < (l/R)_{\min}$  (gdzie  $(l/R)_{\min}$  oznacza wartość z rys. 3) należy znaleźć podanymi tu metodami ocenę górną i dolną.

Zastosowany w niniejszej pracy sposób postępowania może być wykorzystany przy określaniu nośności granicznej pręta z wieloma jednakowymi wycięciami o dowolnym kształcie. Praca pozwoliła stwierdzić, w porównaniu do analogicznego zadania wykonywanego za pomocą maszyn liczących [2,3], przydatność i wystarczającą dokładność metody wykreślnej [6].

Autorzy dziękują doc. dr W. SZCZEPIŃSKIEMU za zasugerowanie tematu i dyskusje w toku pracy.

### Literatura cytowana w tekście

1. R. HILL, *The mathematical theory of plasticity*, Oxford 1950.
2. R. T. SHIELD, *On the plastic flow of metals under conditions of axial-symmetry*, Proc. Roy. Soc., 233A, No 1193 (1955), 267-287.
3. G. EASON, R. T. SHIELD, *The plastic indentation of a semi-infinite solid by a perfectly rough circular punch*, ZAMP **11** (1960), 33-43.
4. F. A. MCCLINTOCK, *On notch sensitivity*, Welding Journal Research Supplement, May 1961.
5. L. DIETRICH, W. SZCZEPIŃSKI, *Plastic yielding of axially-symmetric bars with non-symmetric v-notch*, Acta Mechanica, **4** (1967), 230-240.
6. Z. MRÓZ, *Grafical solution of axially symmetric problems of plastic flow*, ZAMP, **18** (1967), 219-236.
7. W. SZCZEPIŃSKI, L. DIETRICH, E. DRESCHER, J. MIASKOWSKI, *Plastic flow of axially-symmetric notched bars pulled in tension*, Int. J. Solid, Struct., **2** (1966), 525-541.

## Р е з ю м е

ПРЕДЕЛЬНАЯ НЕСУЩАЯ СПОСОБНОСТЬ РАСТЯГИВАЕМЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ  
СТЕРЖНЕЙ ОСЛАБЛЕННЫХ РЯДОМ НАДРЕЗОВ

Дается полное решение задачи о растяжении цилиндрического стержня ослабленного рядом угловых надрезов. Путем продолжения линий скольжения в жёсткую зону найдено оптимальное расстояние между надрезами. Для расстояний меньших чем оптимальные даны нижняя и верхняя оценки несущей способности. Произведена экспериментальная проверка влияния расстояния между надрезами на несущую способность стержня.

## S u m m a r y

LOAD-CARRYING CAPACITY OF TENSILE AXIALLY-SYMMETRIC BARS  
WEAKENED BY SERIES OF V-NOTCHES

A complete solution of axially-symmetric bar with the series of V-notches subjected to tension is presented. The optimum distance between notches has been obtained by means of extension of slip lines into the rigid region. For shorter distances than the extreme ones the upper and lower bound of the load carrying capacity is determined.

The influence of distance between two equal notches on the load-carrying capacity has been verified experimentally.

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW  
TECHNIKI PAN

*Praca została złożona w Redakcji dnia 20 grudnia 1967 r.*