MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
4, 6 (1968)

WYTRZYMAŁOŚĆ PŁYTY KOŁOWEJ JEDNOSTRONNIE UŻEBROWANEJ PODDANEJ ANTYSYMETRYCZNEMU ZGINANIU

ANDRZEJ MŁOTKOWSKI (ŁÓDZ)

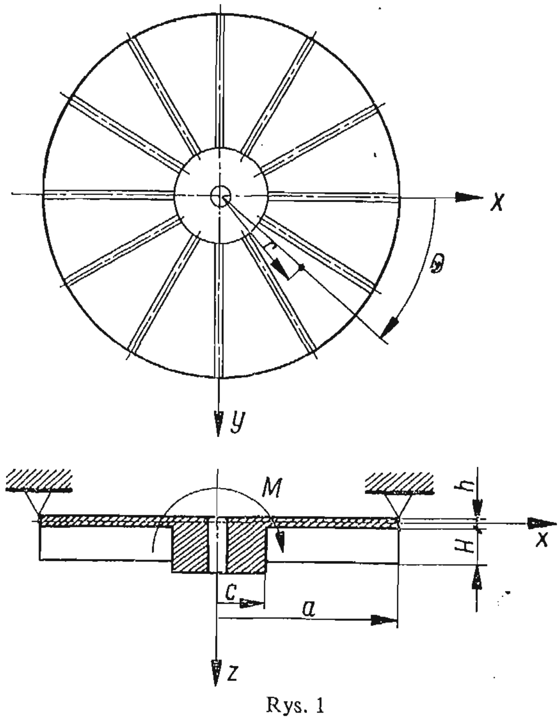
Ważniejsze oznaczenia

$A_1 \div A_8$ stałe,
a promień zewnętrzny płyty,
$B_1 \div B_8$ stałe,
b grubość żebra,
b_0 grubość żebra na promieniu zewnętrznym,
$C_1 \div C_8$ stałe,
c promień wewnętrzny płyty,
D_0 sztywność obwodowa płyty,
D_r sztywność promieniowa płyty,
E moduł Younga,
F powierzchnia przekroju poprzecznego żebra przypadająca na jednostkę obwodu płyty,
F_1 współczynnik,
G moduł sprężystości postaciowej,
H_c wysokość żebra na promieniu wewnętrznym,
h grubość płyty,
I moment bezwładności przekroju żebra przypadający na jednostkę obwodu płyty,
M moment obciążający,
M_r moment gnący promieniowy przypadający na jednostkę obwodu płyty,
M_θ moment gnący obwodowy przypadający na jednostkę promienia,
$M_{r\theta}$ moment skręcający,
N_r siła promieniowa przypadająca na jednostkę obwodu płyty,
N_θ siła obwodowa przypadająca na jednostkę promienia,
n liczba żeber,
Q_r, Q_θ siły tnące — promieniowe i obwodowe,
r promień bieżący płyty,
S iloczyn modułu Younga i momentu statycznego żebra względem płaszczyzny środkowej przypadający na jednostkę obwodu płyty,
T siła styczna (położona w płaszczyźnie środkowej płyty),
U_0 przemieszczenie promieniowe płaszczyzny środkowej płyty zależne od promienia,
u przemieszczenie promieniowe,
u_0 przemieszczenie promieniowe płaszczyzny środkowej płyty,
V_0 przemieszczenie obwodowe płaszczyzny środkowej płyty zależne od promienia,
v przemieszczenie obwodowe,
v_0 przemieszczenie obwodowe płaszczyzny środkowej płyty,
W ugięcie płyty zależne tylko od promienia,

w ugięcie płyty,
z współrzędna określająca odległość rozpatrywanego punktu od płaszczyzny środkowej,
$\alpha_1 \div \alpha_8$ stałe,
β współczynnik,
$\gamma_{r\theta}$ kąt odkształcenia postaciowego,
ε_r odkształcenie promieniowe,
ε_θ odkształcenie obwodowe,
Θ współrzędna kątowa rozpatrywanego punktu,
ν liczba Poissona,
$\varrho = r/a$ promień bezwymiarowy,
σ_r naprężenie promieniowe w płycie,
$\bar{\sigma}_r$ naprężenie w żebrze,
σ_θ naprężenie obwodowe w płycie,
$\tau_{r\theta}$ naprężenie styczne w płycie.

1. Wstęp

Rozpatrywane płyty kołowe wzmocnione żebrami promieniowymi i obciążone w sposób podany na rys. 1 spotykane są w szeregu konstrukcji maszynowych, jak np.: dna bębnów linowych, młynów kulowych czy bębnów suszarek.

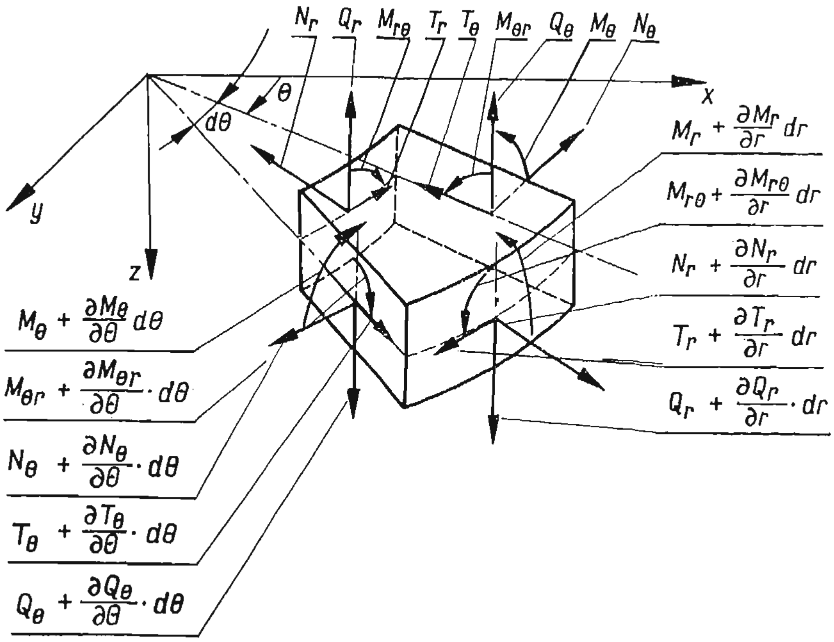


Rys. 1

Jeżeli płyta wzmocniona jest gęsto rozstawionymi żebrami, można traktować ją jako ortotropową (ortotropia konstrukcyjna). Promieniowa sztywność zginania płyty w ogólnym przypadku jest zmienna wzdłuż promienia i znacznie większa niż sztywność w kierunku obwodowym.

Kołowymi płytami użebrowanymi zajmowało się szereg autorów, między innymi: WAINBERG [1, 2], DOŁGOW [3], RUBAC [4, 5], DUCHOWNYJ [6, 7, 8]. Rozpatrywali oni płyty kołowe z żebrami promieniowymi obciążone symetrycznie. Rozpatrywane w niniejszej pracy obciążenie należy do klasy obciążeń antysymetrycznych. Płyty izotropowe obciążone parą sił przyłożoną, jak na rys. 1, były przedmiotem rozważań KOWALENKI [9] i TIMOSHENKI [10].

W pracy [11] obliczono odkształcenia i naprężenia w płycie użebrowanej symetrycznie po obu stronach płaszczyzny środkowej.



Rys. 2

Celem niniejszej pracy jest obliczenie naprężeń i odkształceń w płycie kołowej osiowo symetrycznej wzmocnionej żebrami po jednej stronie płaszczyzny środkowej i obciążonej, jak na rys. 1. Przy takim wzmocnieniu powierzchnia środkowa płyty nie jest powierzchnią obojętną. Przyjęto, iż żebro pracuje w jednokierunkowym stanie naprężenia. Jeżeli żebra są wysokie i cienkie, założenie takie jest słuszne, przy czym dodatkowo można pominąć wpływ skręcania żeber. Właściwa płyta znajduje się w dwukierunkowym stanie naprężenia.

2. Podstawowy układ równań różniczkowych

Wydzielmy z użebrowanej płyty element określony promieniem r i kątem Θ (rys. 2) Siły i momenty wewnętrzne działające na ten element sprowadźmy do środkowej powierzchni płyty. Jeśli pominąć sztywność zginania żeber w kierunku obwodowym oraz ich sztywność skręcania, wówczas $T_r = T_\theta = T$, $M_{r\theta} = M_{\theta r}$.

Równania równowagi dla tego elementu przyjmą postać

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial^2(M_r r)}{\partial r^2}-\frac{\partial M_\theta}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 M_\theta}{\partial \Theta^2}-\frac{2}{r}\frac{\partial^2(M_{r\theta}r)}{\partial r\,\partial\Theta}=0, \\
\frac{\partial(N_r r)}{\partial r}+\frac{\partial T}{\partial\Theta}-N_\theta=0, \qquad \frac{2T}{r}+\frac{\partial T}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial N_\theta}{\partial\Theta}=0.
\end{gathered}
\tag{2.1}
$$

Założmy, że proste normalne do powierzchni środkowej płyty po odkształceniu pozostają normalnymi do odkształconej powierzchni środkowej i ulegają jedynie obrotowi i przesunięciu. Ponadto przyjęto, że przemieszczenie w kierunku osi z wszystkich punktów leżących na normalnej do powierzchni środkowej płyty są jednakowe. Stąd przemieszczenia w kierunku promieniowym, obwodowym oraz ugięcia wyrażą się zależnościami

$$
u=u_0-z\frac{\partial w}{\partial r}, \qquad v=v_0-\frac{z}{r}\frac{\partial w}{\partial\Theta}, \qquad w=w_0,
\tag{2.2}
$$

gdzie u_0, v_0, w_0 — przemieszczenie w kierunku promieniowym, obwodowym i ugięcie środkowej powierzchni płyty.

Odkształcenia względne wyrażają się w sposób następujący:

$$
\begin{gathered}
\varepsilon_r=\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{\partial u_0}{\partial r}-z\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}, \\
\varepsilon_\theta=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\Theta}+\frac{u}{r}=\frac{1}{r}\left(u_0-z\frac{\partial w}{\partial r}-\frac{z}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{\partial v_0}{\partial r}\right), \\
\gamma_{r\theta}=\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{v}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\Theta}=2\frac{z}{r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial\Theta}-\frac{\partial^2 w}{\partial r\,\partial\Theta}\right)+\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_0}{\partial\Theta}-\frac{v_0}{r}+\frac{\partial v_2}{\partial r}\right).
\end{gathered}
\tag{2.3}
$$

Zgodnie z uogólnionym prawem Hooke'a dla dwukierunkowego stanu naprężenia zależności między odkształceniami i naprężeniami dla płyty mają postać

$$
\begin{gathered}
\sigma_r=\frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_r+\nu\varepsilon_\theta), \\
\sigma_\theta=\frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_\theta+\nu\varepsilon_r), \\
\tau_{r\theta}=G\gamma_{r\theta};
\end{gathered}
\tag{2.4}
$$

zaś dla żebra założono jednokierunkowy stan naprężenia

$$
\bar{\sigma}_r=\varepsilon_r E.
\tag{2.5}
$$

Przyjęto przy tym, że płyta i żebra są wykonane z tego samego materiału.

Po podstawieniu (2.3) do (2.4) otrzymano

$$
\begin{gathered}
\sigma_r=\frac{E}{1-\nu^2}\left[\nu\frac{u_0}{r}+\frac{\partial u_0}{\partial r}+\frac{\nu}{r}\frac{\partial v_0}{\partial\Theta}-z\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{\nu}{r}\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{\nu}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\Theta^2}\right)\right], \\
\sigma_\theta=\frac{E}{1-\nu^2}\left[\frac{u_0}{r}+\nu\frac{\partial u_0}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_0}{\partial\Theta}-z\left(\nu\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\Theta^2}\right)\right],
\end{gathered}
\tag{2.6}
$$

$$\tau_{r\theta} = G\gamma_{r\theta} = 2Gz\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial w}{\partial\Theta} - \frac{\partial^2 w}{\partial r\,\partial\Theta}\right) + G\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_0}{\partial\Theta} - \frac{v_0}{r} + \frac{\partial v_0}{\partial r}\right),$$

$$\bar{\sigma}_r = E\left(\frac{\partial u_0}{\partial r} - z\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}\right).$$

Momenty gnące i siły występujące w równaniach (2.1) otrzymujemy z zależności

$$M_r = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_r z\,dz + \int_F \bar{\sigma}_r z\,dF,$$

$$M_\theta = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_\theta z\,dz,$$

$$M_{r\theta} = -\int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{r\theta} z\,dz,$$

$$N_r = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_r\,dz + \int_F \bar{\sigma}_r\,dF, \tag{2.7}$$

$$N_\theta = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_\theta\,dz,$$

$$T = \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{r\theta}\,dz,$$

gdzie F oznacza powierzchnię przekroju poprzecznego żebra przypadającego na jednostkę długości przekroju $r = \text{const}$. Wyznaczone wyżej siły wewnętrzne i momenty odniesione są do jednostki długości odpowiednich przekrojów płyty.

Po podstawieniu zależności (2.6) do równań (2.7) otrzymano

$$M_r = -\left(D_r\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{D_0\nu}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{D_0\nu}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\Theta^2}\right) + S\frac{\partial u_0}{\partial r},$$

$$M_\theta = -D_0\left(\nu\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\Theta^2}\right),$$

$$M_{r\theta} = -(1-\nu)D_0\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial w}{\partial\Theta}-\frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial r\,\partial\Theta}\right),$$

(2.8)

$$N_r = 2\beta\frac{\nu}{r}\left(u_0+\frac{\partial v_0}{\partial\Theta}\right)+F_1\frac{\partial u_0}{\partial r}-S\frac{\partial^2 w}{\partial r^2},$$

$$N_\theta = 2\beta\left(\frac{u}{r}+\nu\frac{\partial u_0}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_0}{\partial\Theta}\right),$$

$$T = (1-\nu)\beta\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_0}{\partial\Theta}-\frac{v_0}{r}+\frac{\partial v_0}{\partial r}\right),$$

gdzie D_0 — sztywność płytowa w kierunku obwodowym, D_r — sztywność płytowa w kierunku promieniowym, $S = E\int_F z\,dF$ — iloczyn modułu Younga i momentu statycznego żebra względem płaszczyzny środkowej odniesionego do jednostki długości przekroju $r = \text{const}$, β, F_1 — współczynniki.

Powyższe wielkości określone są następującymi wzorami:

$$D_0 = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)},$$

(2.9)

$$D_r = D_0+EI = D_0+E\left[\frac{bH^3}{12}+bH\left(\frac{H+h}{2}\right)^2\right]\frac{n}{2\pi r},$$

$$S = EbH\left(\frac{H+h}{2}\right)\frac{n}{2\pi r},$$

$$F_1 = \frac{Eh}{1-\nu^2}+EF = \frac{Eh}{1-\nu^2}+EbH\frac{n}{2\pi r},$$

$$\beta = \frac{Eh}{2(1-\nu^2)}.$$

Wprowadzono ponadto oznaczenie na bezwymiarowy promień

$$\varrho = \frac{r}{a}. \tag{2.10}$$

Przemieszczenia w, u_0, v_0 będące funkcją promienia r i kąta Θ można w rozpatrywanym przypadku obciążenia antysymetrycznego przyjąć w postaci

$$\begin{aligned} w &= W\cos\Theta,\\ u_0 &= U_0\cos\Theta,\\ v_0 &= V_0\sin\Theta, \end{aligned} \tag{2.11}$$

przy czym W, U_0, V_0 są funkcjami tylko zmiennej r.

Po podstawieniu (2.11) do (2.8) otrzymujemy wyrażenia na momenty i siły wewnętrzne w postaci następującej:

$$M_r = -\frac{\cos\Theta}{a^2}\left[D_r\frac{d^2W}{d\varrho^2}+D_0\frac{\nu}{\varrho}\frac{dW}{d\varrho}-\frac{\nu D_0}{\varrho^2}W-Sa\frac{dU_0}{d\varrho}\right],$$

$$
(2.12)\qquad
\begin{aligned}
M_\theta &= -\frac{D_0\cos\Theta}{a^2}\left[\nu\frac{d^2W}{d\varrho^2}+\frac{1}{\varrho}\frac{dW}{d\varrho}-\frac{W}{\varrho^2}\right],\\
M_{r\theta} &= \frac{(1-\nu)D_0\sin\Theta}{a^2}\left[\frac{W}{\varrho^2}-\frac{1}{\varrho}\frac{dW}{d\varrho}\right],\\
N_r &= \frac{\cos\Theta}{a}\left[2\beta\nu\left(\frac{U_0}{\varrho}+\frac{V_0}{\varrho}\right)+F_1\frac{dU_0}{d\varrho}-\frac{S}{a}\frac{d^2W}{d\varrho^2}\right],\\
N_\theta &= 2\beta\frac{\cos\Theta}{a}\left(\frac{U_0}{\varrho}+\nu\frac{dU_0}{d\varrho}+\frac{V_0}{\varrho}\right),\\
T &= (1-\nu)\beta\frac{\sin\Theta}{a}\left(-\frac{U_0}{\varrho}-\frac{V_0}{\varrho}+\frac{dV}{d\varrho}\right).
\end{aligned}
$$

Na podstawie wzorów (2.6), (2.11) naprężenia określone są następująco:
naprężenia promieniowe w płycie

$$
(2.13.1)\qquad \sigma_r = \frac{E\cos\Theta}{(1-\nu^2)a}\left[\frac{\nu}{\varrho}(U_0+V_0)+\frac{dU_0}{d\varrho}-\frac{z}{a}\left(\frac{d^2W}{d\varrho^2}+\frac{\nu}{\varrho}\frac{dW}{d\varrho}-\frac{\nu}{\varrho^2}W\right)\right],
$$

naprężenie w żebrze

$$
(2.13.2)\qquad \sigma_r = E\cos\Theta\left[\frac{1}{a}\frac{dU_0}{d\varrho}-\frac{z}{a^2}\frac{d^2W}{d\varrho^2}\right],
$$

naprężenie obwodowe i styczne w płycie

$$
(2.13.3)\qquad
\begin{aligned}
\sigma_\theta &= \frac{E\cos\Theta}{(1-\nu^2)a}\left[\frac{1}{\varrho}(U_0+V_0)+\nu\frac{dU_0}{d\varrho}-\frac{z}{a}\left(\nu\frac{d^2W}{d\varrho^2}+\frac{1}{\varrho}\frac{dW}{d\varrho}-\frac{W}{\varrho^2}\right)\right],\\
\tau_{r\theta} &= \frac{E\sin\Theta}{2(1+\nu)a}\left[-\frac{2z}{a}\frac{W}{\varrho^2}+\frac{2z}{a\varrho}\frac{dW}{d\varrho}-\frac{(U_0+V_0)}{\varrho}+\frac{dV_0}{d\varrho}\right].
\end{aligned}
$$

Podstawiając wzory (2.12) do równań równowagi (2.1) otrzymujemy następujący układ równań różniczkowych dla niewiadowych funkcji W, U_0, V_0 zmiennej ϱ.

$$
\begin{aligned}
&D_r\varrho^4\frac{d^4W}{d\varrho^4}+2\left(D_r\varrho^3+\frac{dD_r}{d\varrho}\varrho^4\right)\frac{d^3W}{d\varrho^3}+\left(\frac{d^2D_r}{d\varrho^2}\varrho^4+2\varrho^3\frac{dD_r}{d\varrho}-3D_0\varrho^2\right)\frac{d^2W}{d\varrho^2}+\\
&+3D_0\varrho\frac{dW}{d\varrho}-3D_0W-Sa\varrho^4\frac{d^3U_0}{d\varrho^3}-2a\left(S\varrho^3+\frac{dS}{d\varrho}\varrho^4\right)\frac{d^2U_0}{d\varrho^2}-a\left(\frac{d^2S}{d\varrho^2}\varrho^4+2\varrho^3\frac{dS}{d\varrho}\right)\frac{dU_0}{d\varrho}=0,
\end{aligned}
$$

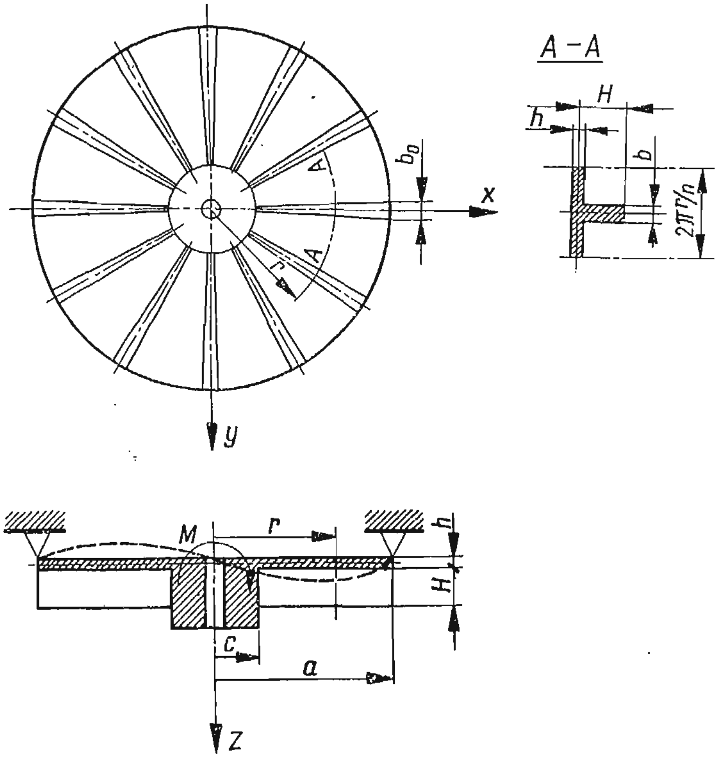
$$
(2.14)\qquad
\begin{aligned}
&F_1\varrho^3\frac{d^2U_0}{d\varrho^2}+\left(F_1\varrho^2+\varrho^3\frac{dF_1}{d\varrho}\right)\frac{dU_0}{d\varrho}-(3-\nu)\beta\varrho U_0+\\
&+(1+\nu)\beta\varrho^2\frac{dV_0}{d\varrho}-(3-\nu)\beta\varrho V_0-\frac{S}{a}\varrho^3\frac{d^3W}{d\varrho^3}-\frac{1}{a}\left(\frac{dS}{d\varrho}\varrho^3+S\varrho^2\right)\frac{d^2W}{d\varrho^2}=0,
\end{aligned}
$$

$$
(1+\nu)\varrho^2\frac{dU_0}{d\varrho}+(3-\nu)\varrho U_0-(1-\nu)\varrho^3\frac{d^2V_0}{d\varrho^2}-(1-\nu)\varrho^2\frac{dV_0}{d\varrho}+(3-\nu)\varrho^3V_0=0.
$$

Współczynniki występujące w tych równaniach różniczkowych w ogólnym przypadku są pewnymi funkcjami promienia ϱ.

3. Przypadek płyty o stałej sztywności zginania w kierunku promieniowym

Rozwiązanie układu równań różniczkowych (2.14) jest prostsze jeśli przyjąć płytę wzmocnioną żebrami o specjalnym kształcie takim, by sztywność w kierunku promieniowym D_r oraz wielkości S i F_1 były stałe.



Rys. 3

Rozpatrzmy płytę o stałej grubości h wzmocnioną żebrami o stałej wysokości H i grubości zwiększającej się proporcjonalnie do promienia $r = a\varrho$.

Grubość żebra zmienia się wówczas wg zależności

$$b = b_0\frac{r}{a} = b_0\varrho. \tag{3.1}$$

Pole, moment statyczny oraz moment bezwładności przekroju poprzecznego żebra odniesione do jednostki długości obwodu określają następujące wzory:

$$\begin{aligned} F &= \frac{bHn}{2\pi r} = \frac{b_0Hn}{2\pi a} = \text{const}, \\ S &= EF\frac{H+h}{2} = \frac{Eb_0Hn}{4\pi a}(H+h) = \text{const}, \\ I &= \left[\frac{bH^3}{12}+bH\left(\frac{H+h}{2}\right)^2\right]\frac{n}{2\pi r} = \frac{b_0Hn}{8\pi a}\left[\frac{H^2}{3}+(H+h)^2\right] = \text{const}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Sztywności płytowe w kierunku promieniowym i obwodowym wynoszą

$$D_r = D_0 + \frac{Eb_0 Hn}{8\pi a}\frac{H^2}{3} + (H+h)^2 = \text{const}, \tag{3.3}$$

Po podstawieniu tych zależności do równań różniczkowych (2.14) otrzymujemy

$$\begin{gathered}
D_r\varrho^4\frac{d^4W}{d\varrho^4} + 2D_r\varrho^3\frac{d^3W}{d\varrho^3} - 3D_0\varrho^2\frac{d^2W}{d\varrho^2} + 3D_0\varrho\frac{dW}{d\varrho} - 3D_0W + \\
-Sa\varrho^4\frac{d^3U_0}{d\varrho^3} - 2Sa\varrho^3\frac{d^2U_0}{d\varrho^2} = 0, \\
-\frac{S}{a}\varrho^3\frac{d^3W}{d\varrho^3} - \frac{S}{a}\varrho^2\frac{d^2W}{d\varrho^2} + F_1\varrho^3\frac{d^2U_0}{d\varrho^2} + F_1\varrho^2\frac{dU_0}{d\varrho} + \\
-(3-\nu)\beta\varrho U_0 + (1+\nu)\beta\varrho^2\frac{dV_0}{d\varrho} - (3-\nu)\beta\varrho V_0 = 0, \\
(1+\nu)\varrho^2\frac{dU_0}{d\varrho^2} + (3-\nu)\varrho U_0 - (1-\nu)\varrho^3\frac{d^2V_0}{d\varrho^2} - (1-\nu)\varrho^2\frac{dV_0}{d\varrho} - (3-\nu)\varrho V_0 = 0,
\end{gathered} \tag{3.4}$$

gdzie

$$F_1 = \frac{Eh}{1-\nu^2} + \frac{Eb_0Hn}{2\pi a}. \tag{3.5}$$

Rozwiązań powyższych równań różniczkowych będziemy poszukiwali w postaci

$$\begin{aligned}
W &= A\varrho^{\alpha+1}, \\
U_0 &= B\varrho^{\alpha}, \\
V_0 &= C\varrho^{\alpha},
\end{aligned} \tag{3.6}$$

gdzie A, B, C oraz α oznaczają pewne stałe.

Po wstawieniu tych rozwiązań do równań różniczkowych (3.4) otrzymano:

$$\begin{gathered}
[D_r\alpha^2(\alpha^2-1) - 3D_0\alpha^2]A - Sa\alpha^2(\alpha-1)B = 0, \\
-\frac{S}{a}\alpha^2(\alpha+1)A + [(1+\nu)\alpha + (3-\nu)]B + [(1+\nu)\beta\alpha - (3-\nu)\beta]C = 0, \\
[(1+\nu)\alpha + (3-\nu)]B - [(1-\nu)\alpha^2 - (3-\nu)]C = 0.
\end{gathered} \tag{3.7}$$

Aby powyższe równania miały dla A, B i C rozwiązania niezerowe, wyznacznik charakterystyczny musi równać się zeru. Stąd wynika następujące równanie służące do wyznaczenia parametru α

$$\begin{gathered}
\alpha^4\{(1-\nu)(S^2 - F_1D_r)\alpha^4 + [(1-\nu)(F_1D_r + 3D_0F) + (3-\nu)(1-\nu)\beta D_r + \\
-(1+\nu)^2\beta D_r + (3-\nu)F_1D_r - 2(2-\nu)S^2]\alpha^2 - [(3-\nu)(1-\nu) - (1+\nu)^2](\beta D_r + \\
+3\beta D_0) - (3-\nu)(F_1D_r + 3F_1D_0 - S^2)\} = 0.
\end{gathered} \tag{3.8}$$

Otrzymaliśmy więc równanie ósmego stopnia. Cztery pierwiastki tego równania wynoszą

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0, \tag{3.9}$$

zaś pozostałe pierwiastki $\alpha_5 \div \alpha_8$ wynikają z rozwiązania równania dwukwadratowego znajdującego się wewnątrz nawiasu klamrowego w równaniu (3.8). Istnieje zatem pięć różnych rozwiązań typu (3.6). Między stałymi A_i, B_i, C_i istnieją związki wynikające z równań (3.7). Gdy α_i jest równe jednemu z pierwiastków równania (3.8), wówczas związki (3.7) są liniowo zależne.

Podstawiając do pierwszego i trzeciego równania (3.7) $\alpha = \alpha_i$ znajdujemy

$$\begin{aligned} B_i &= p_i A_i, \\ C_i &= q_i B_i = p_i q_i A_i, \end{aligned} \tag{3.10}$$

gdzie

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{\alpha_i^2\,[D_r(\alpha_i^2-1)-3D_0]}{\alpha_i^2\,[Sa\,(\alpha_i-1)]}, \\ q_i &= \frac{(1+\nu)\alpha_i+(3-\nu)}{(1-\nu)\alpha_i^2-(3-\nu)}. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Drugie równanie układu (3.7) jest spełnione tożsamościowo. Ponieważ dla pierwszego z równań (3.7) $\alpha_i = 0$ jest rozwiązaniem trywialnym, przeto zależności (3.10), (3.11) między stałymi A_i, B_i, C_i dla tego przypadku nie obowiązują.

Dla przypadku, gdy $\alpha_i = 0$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ przyjęto następujące rozwiązania:

$$\begin{aligned} W &= A_1\varrho+A_2\varrho\ln\varrho+A_3\varrho\ln^2\varrho+A_4\varrho\ln^3\varrho, \\ U_0 &= B_1+B_2\ln\varrho+B_3\varrho+B_4\ln^2\varrho, \\ V_0 &= C_1+C_2\ln\varrho+C_3\varrho+C_4\ln^2\varrho. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Po podstawieniu powyższych rozwiązań do układu równań (2.4) stwierdzono, że układ spełniony będzie wówczas gdy

$$\begin{aligned} B_3 &= C_3 = B_4 = C_4 = 0, \\ C_1 &= -B_1+\left(\frac{1+\nu}{3-\nu}\right)B_2, \\ C_2 &= -B_2. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Stałe B_1 i B_2 zależą od C_1 i C_2, natomiast są niezależne od stałych A_1 i A_2. Poczwórnemu pierwiastkowi $\alpha_i = 0$ równania (3.8) odpowiada więc rozwiązanie, w którym występują cztery niezależne stałe A_1, A_2, B_1, B_2.

W rozwiązaniu ogólnym (3.6) układu równań różniczkowych (3.4) występuje więc ogółem osiem stałych dowolnych A_1, A_2, B_1, B_2, A_5, A_6, A_7, A_8. Wspomniane rozwiązanie ogólne ma następującą postać:

$$\begin{aligned} W &= A_1\varrho+A_2\varrho\ln\varrho+\sum_{i=5}^{8}A_i\varrho^{\alpha_i+1}, \\ U_0 &= B_1+B_2\ln\varrho+\sum_{i=5}^{8}p_iA_i\varrho^{\alpha_i}, \\ V_0 &= -B_1-\left(\frac{1+\nu}{3-\nu}+\ln\varrho\right)B_2+\sum_{i=5}^{8}p_iq_iA_i\varrho^{\alpha_i}. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Przemieszczenia poszczególnych punktów powierzchni środkowej płyty obliczamy uwzględniając (2.11), wówczas:

$$
\begin{aligned}
w &= \left[A_1\varrho+A_2\varrho\ln\varrho+\sum_{i=5}^{8}A_i\varrho^{\alpha_i+1}\right]\cos\Theta,\\
u_0 &= \left[B_1+B_2\ln\varrho+\sum_{i=5}^{8}p_iA_i\varrho^{\alpha_i}\right]\cos\Theta,\\
v_0 &= \left[-B_1-\left(\frac{1+\nu}{1-\nu}+\ln\varrho\right)B+\sum_{i=5}^{8}p_iq_iA_i\varrho^{\alpha_i}\right]\sin\Theta.
\end{aligned}
\tag{3.15}
$$

Stałe występujące w powyższych wzorach możemy wyznaczyć z warunków brzegowych.

Po uwzględnieniu (3.14) wzory (2.12) przyjmą postać

$$
M_r = -\frac{\cos\Theta}{\varrho a^2}\left\{(D_r+D_0\nu)A_2-SaB_2+\sum_{i=5}^{8}[D_r\alpha_i^2+(D_r+D_0\nu-Sap_i)\alpha_i]\varrho^{\alpha_i}A_i\right\},
$$

$$
M_\theta = -\frac{D_0\cos\Theta}{\varrho a^2}\left\{(1+\nu)A_2+\sum_{i=5}^{8}[\nu\alpha_i^2+(1+\nu)\alpha_i]\varrho^{\alpha_i}A_i\right\},
$$

$$
M_{r\theta} = \frac{(1-\nu)D_0}{\varrho a^2}\sin\Theta\left\{-A_2-\sum_{i=5}^{8}\alpha_i\varrho^{\alpha_i}A_i\right\},
$$

$$
\begin{aligned}
N_r = \frac{\cos\Theta}{\varrho a}\Bigg\{&-\frac{S}{a}A_2+\left(F_1-2\beta\nu\frac{1+\nu}{3-\nu}\right)B+\\
&+\sum_{i=5}^{8}\left[2\beta\nu p_i(1+q_i)+\left(F_1p_i-\frac{S}{a}(\alpha_i+1)\right)\alpha_i\right]\varrho^{\alpha_i}A_i\Bigg\},
\end{aligned}
\tag{3.16}
$$

$$
N_\theta = \frac{2\beta\cos\Theta}{\varrho a}\left\{-\frac{(1-\nu)^2}{3-\nu}A_4+\sum_{i=5}^{8}p_i(1+\nu\alpha_i+q_i)\varrho^{\alpha_i}A_i\right\},
$$

$$
T = \frac{(1-\nu)\beta}{\varrho a}\sin\Theta\left\{-\frac{2(1-\nu)}{3-\nu}B_2+\sum_{i=5}^{8}p_i[-(1+q_i)+q_ia_i]\varrho^{\alpha_i}A_i\right\}.
$$

4. Warunki brzegowe dla płyty podpartej przegubowo na obwodzie zewnętrznym i mającej sztywną piastę w środku

Dla płyty podpartej przegubowo na obwodzie zewnętrznym ugięcie, moment gnący promieniowy, siły normalne i styczne dla $r = a$, czyli $\varrho = 1$ muszą równać się zeru. Stąd warunki

$$(w)_{\varrho=1} = 0, \tag{4.1.1}$$

$$(M_r)_{\varrho=1} = 0, \tag{4.1.2}$$

$$(N_r)_{\varrho=1} = 0, \tag{4.1.3}$$

$$(T)_{\varrho=1} = 0. \tag{4.1.4}$$

Z kolei na obwodzie wewnętrznym $\varrho = \varrho_0 = a/c$ przy założeniu, że piasta jest nieodkształcalna, a ugięcie małe

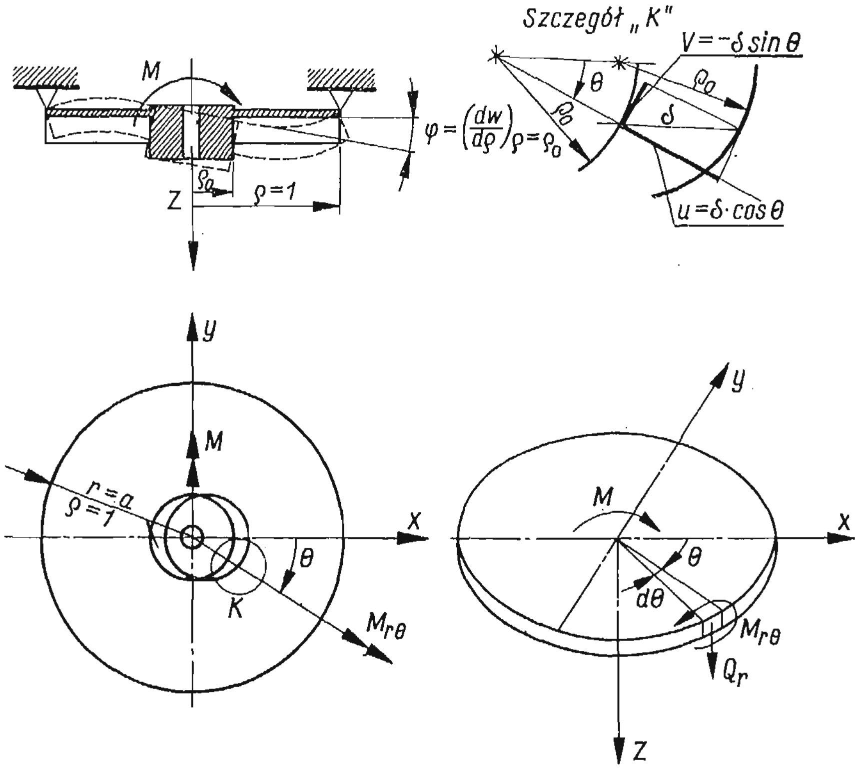
$$(w)_{\varrho=\varrho_0} = \varrho_0 \left(\frac{dw}{d\varrho}\right)_{\varrho=\varrho_0}. \tag{4.1.5}$$

Przy tym samym założeniu punkty położone przy piaście przemieszczają się równolegle do osi x. Z rys. 4 wynika

$$(u)_{\varrho=\varrho_0} = \delta \cos\Theta,$$
$$(-v)_{\varrho=\varrho_0} = \delta \sin\Theta;$$

stąd kolejny warunek

$$(u)_{\varrho=\varrho_0} \sin\Theta = (-v)_{\varrho=\varrho_0} \cos\Theta. \tag{4.1.6}$$



Rys. 4

Oprócz tego suma momentów względem osi y (rys. 4) sił przyłożonych do zewnętrznego brzegu płyty musi równać się danemu momentowi M przyłożonemu w środku płyty.

Stąd otrzymujemy następny warunek

$$a \int_{-\pi}^{+\pi} (M_{r\theta})_{\varrho=1} \sin\Theta d\Theta - a^2 \int_{-\pi}^{+\pi} (Q_r)_{\varrho=1} \cos\Theta d\Theta = M, \tag{4.1.7}$$

gdzie

$$Q_r = \frac{1}{a\varrho}\left(M_r - M_0 + \varrho\frac{dM_r}{d\varrho} - \frac{dM_{r\theta}}{d\Theta}\right)\cos\Theta,$$

przy czym siła tnąca została otrzymana z równania sumy momentów sił działających na element przedstawiony na rys. 2, względem osi prostopadłej do promienia r. We wzorze (4.1.8) uwzględniono (2.11).

W równaniach (3.14) stała B_1 określa przemieszczenie płyty jak ciała sztywnego w płaszczyźnie xy. Jeśli przyjąć, że płyta przemieści się o wielkość B_1 [cm] w kierunku osi x wówczas składowe w kierunku promieniowym i obwodowym wynoszą

$$u_0 = B_1\cos\Theta,$$
$$v_0 = -B_1\sin\Theta.$$

Powyższe wyrażenia odpowiadają pierwszym członom rozwiązań ogólnych (3.15) dla u_0 i v_0. Stąd wynika, że stałą B_1 można przyjąć dowolnie, np.

$$B_1 = 0. \tag{4.1.8}$$

Od wartości tej stałej nie zależą wartości ugięcia oraz siły wewnętrzne. Łącznie mamy do dyspozycji osiem warunków brzegowych (4.1).

Po podstawieniu rozwiązań ogólnych (3.15) do warunków brzegowych (4.1) otrzymujemy następujący układ równań liniowych:

$$A_1 + \sum_{i=5}^{8} A_i = 0, \tag{4.2.1}$$

$$D_0\nu A_1 + (D_0\nu + D_r)A_2 - SaB_2 + \sum_{i=5}^{8}[D_r\alpha_i^2 + (D_r + D_0\nu - p_iSa)\alpha_i + D_0\nu]A_i = 0, \tag{4.2.2}$$

$$-\frac{S}{a}A_2 + \left(F_1 - 2\beta\nu\frac{1+\nu}{3-\nu}\right)B_2 + \sum_{i=5}^{8}\left\{2\beta\nu p_i(1+q_i) + \left[F_1p_i - \frac{S}{a}(\alpha_i+1)\right]\alpha_i\right\}A_i = 0, \tag{4.2.3}$$

$$+\frac{2(1-\nu)}{3-\nu}B_2 + \sum_{i=5}^{8} p_i[1+q_i(1-\alpha_i)]A_i = 0, \tag{4.2.4}$$

$$A_2\varrho_0 + \sum_{i=5}^{8}\alpha_i\varrho_0^{\alpha_i+1}A_i = 0, \tag{4.2.5}$$

$$-\frac{1+\nu}{3-\nu}B_2 + \sum_{i=5}^{8} p_i(1+q_i)\varrho_0^{\alpha_i}A_i = 0, \tag{4.2.6}$$

$$\begin{aligned} &-(3-\nu)D_0A_1 - (3-\nu)D_0A_2 + \\ &+\sum_{i=5}^{8}[D_r\alpha_i^2(\alpha_i+1) - (3-\nu)D_0(\alpha_i+1) - Sap_i\alpha_i^2]A_i = \frac{Ma}{\pi\cos\Theta}, \end{aligned} \tag{4.2.7}$$

$$B_1 = 0. \tag{4.2.8}$$

5. Warunki brzegowe dla płyty utwierdzonej na obwodzie zewnętrznym i mającej sztywną piastę w środku

Dla płyty utwierdzonej na obwodzie zewnętrznym ugięcie, kąt ugięcia oraz przemieszczenia w kierunku promieniowym i obwodowym dla $r = a$, czyli $\varrho = 1$, muszą równać się zeru. Stąd warunki

$$(w)_{\varrho=1} = 0, \tag{5.1.1}$$

$$\left(\frac{dw}{d\varrho}\right)_{\varrho=1} = 0, \tag{5.1.2}$$

$$(u)_{\varrho=1} = 0, \tag{5.1.3}$$

$$(v)_{\varrho=1} = 0. \tag{5.1.4}$$

Na obwodzie wewnętrznym muszą zachodzić związki (4.1.5) i (4.1.6), jak w p. 4, a mianowicie

$$(w)_{\varrho=\varrho_0} = \varrho_0 \left(\frac{dw}{d\varrho}\right)_{\varrho=\varrho_0}, \tag{5.1.5}$$

$$(u)_{\varrho=\varrho_0} \sin\Theta = (-v)_{\varrho=\varrho_0} \cos\Theta. \tag{5.1.6}$$

Oprócz powyższych warunków muszą być spełnione równania równowagi dla całej płyty (suma momentów względem osi y i suma rzutów sił na oś x)

$$a \int\limits_{-\pi}^{+\pi} (M_r)_{\varrho=1} \cos\Theta \, d\Theta + a \int\limits_{-\pi}^{+\pi} (M_{r\Theta})_{\varrho=1} \sin\Theta \, d\Theta - a^2 \int\limits_{-\pi}^{+\pi} (Q_r)_{\varrho=1} \cos\Theta \, d\Theta = M, \tag{5.1.7}$$

$$\int\limits_{-\pi}^{+\pi} (N_r)_{\varrho=1} \cos\Theta \, d\Theta - \int\limits_{-\pi}^{+\pi} (T)_{\varrho=1} \sin\Theta \, d\Theta = 0. \tag{5.1.8}$$

Na podstawie tych warunków otrzymujemy następujący układ równań liniowych:

$$A_1 + \sum_{i=5}^{8} A_i = 0, \tag{5.2.1}$$

$$A_1 + A_2 + \sum_{i=1}^{8} (\alpha_i + 1) A_i = 0, \tag{5.2.2}$$

$$B_1 + \sum_{i=5}^{8} p A_i = 0, \tag{5.2.3}$$

$$-B_1 - \frac{1+\nu}{3-\nu} B_2 + \sum_{i=5}^{8} p_i q_i A_i = 0, \tag{5.2.4}$$

$$A_2 \varrho_0 + \sum_{i=5}^{8} \alpha_i \varrho_0^{\alpha_i + 1} A_i = 0, \tag{5.2.5}$$

(5.2.6) $$-\frac{1+\nu}{3-\nu}B_2+\sum_{i=5}^{8}p_i(1+q_i)\varrho_0^{\alpha_i}A_i=0,$$

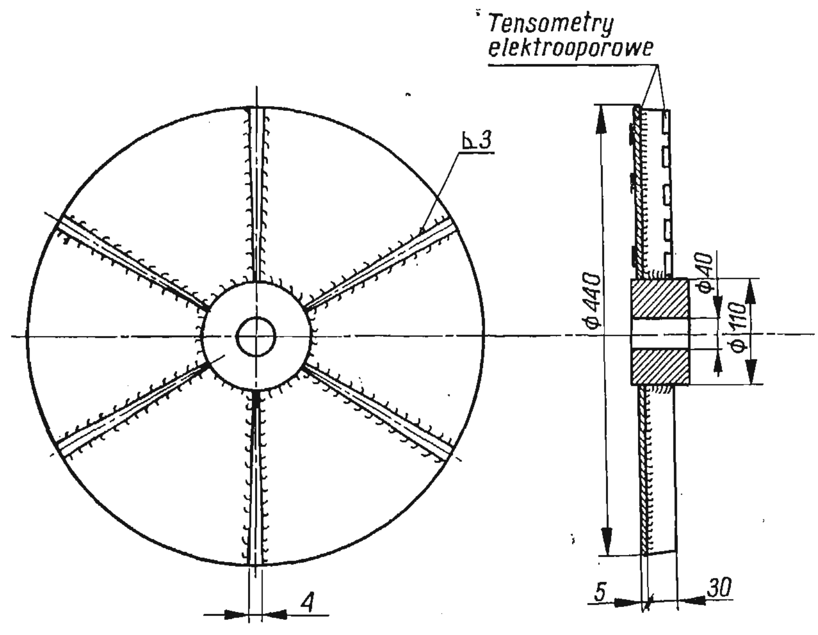
(5.2.7) $$-(D_r+3D_0)A_2+SaB_2=\frac{Ma}{\pi\cos\Theta},$$

(5.2.8) $$-\frac{S}{a}A_2+(F_1-2\nu\beta)B_2+\sum_{i=5}^{8}\Big[F_1\alpha_ip_i-\frac{S}{a}\alpha_i(\alpha_i+1)+$$
$$+(3-\nu)\beta(1+q_i)p_i-(1-\nu)\beta p_iq_i\alpha_i\Big]A_i=0.$$

Po wyznaczeniu stałych, odkształcenia można obliczyć ze wzorów (3.15), zaś naprężenia po znalezieniu odpowiednich pochodnych ze wzorów (2.13).

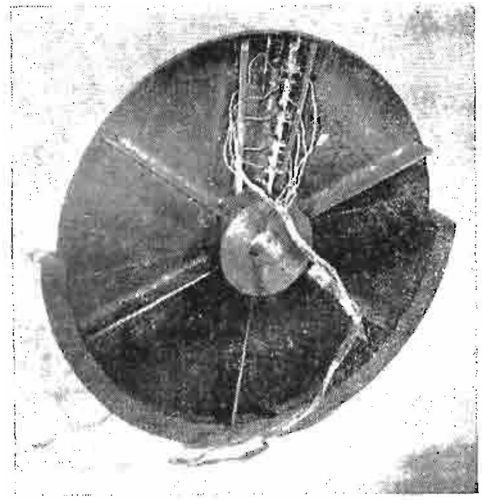
6. Przykład liczbowy obliczenia płyty kołowej o stałej sztywności zginania w kierunku promienia obciążonej parą sił przyłożoną w środku

Obliczono płytę o sztywnej piaście w środku i podpartą przegubowo na obwodzie zewnętrznym (rys. 5). Obliczenia powyższe wykonano na maszynie elektronowej ZAM-2 Beta, przy czym wyniki obliczeń dotyczą kąta $\Theta=0°$ (jedynie v i $\tau_{r\theta}$ obliczono dla $\Theta=$ $=\pi/2$).

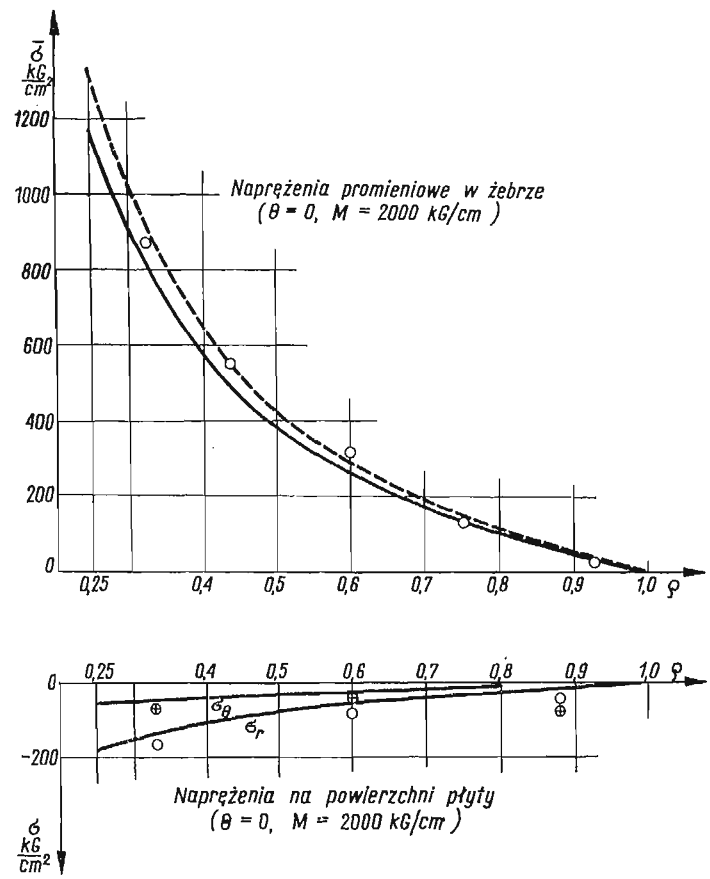


Rys. 5

Wyniki obliczeń przedstawiono w tablicy 1B i 1C oraz na rys. 7. Przeprowadzono pomiary naprężeń w żebrach i płycie za pomocą elektrycznych tensometrów oporowych naklejonych, jak na rys. 5. Płyta umieszczona była w stanowisku badawczym umożli-



Rys. 6



Rys. 7. Naprężenia w płycie wzmocnionej $n = 6$ żebrami podpartej przegubowo na obwodzie zewnętrznym

Naprężenia teoretyczne na zewnętrznej krawędzi żebra — linia przerywana; na wysokości naklejenia tensometrów — linia ciągła

Wyniki pomiarów naprężeń promieniowych (○) i obwodowych (⊕)

Tablica 1. Wyniki obliczeń przemieszczeń i napr żeń dla płyty o stałej sztywności zginania podpartej przegubowo na obwodzie zewnętrznym

A) Dane:

$a = 22{,}0$ cm, $c = 5{,}5$ cm, $h = 0{,}5$ cm, $H = 3{,}0$ cm

$b_0 = 0{,}4$ cm, $\nu = 0{,}29$, $n = 6$

B) Wartości przemieszczeń:

Promień ϱ	Przemieszczenia		
	$\frac{W}{M/E}$ 1/cm²	$\frac{U_0}{M/E}$ 1/cm²	$\frac{V_0}{M/E}$ 1/cm²
+0,25	+3,06997	+0,42047	−0,42047
+0,3	+3,56651	+0,39001	−0,35275
+0,4	+3,99744	+0,33627	−0,25709
+0,5	+3,90140	+0,29416	−0,18594
+0,6	+3,45200	+0,26177	−0,12512
+0,7	+2,76442	+0,23696	−0,06828
+0,8	+1,92095	+0,21813	−0,01202
+0,9	+0,98338	+0,20409	+0,04567
+1,0	+0,00000	+0,19396	+0,10616

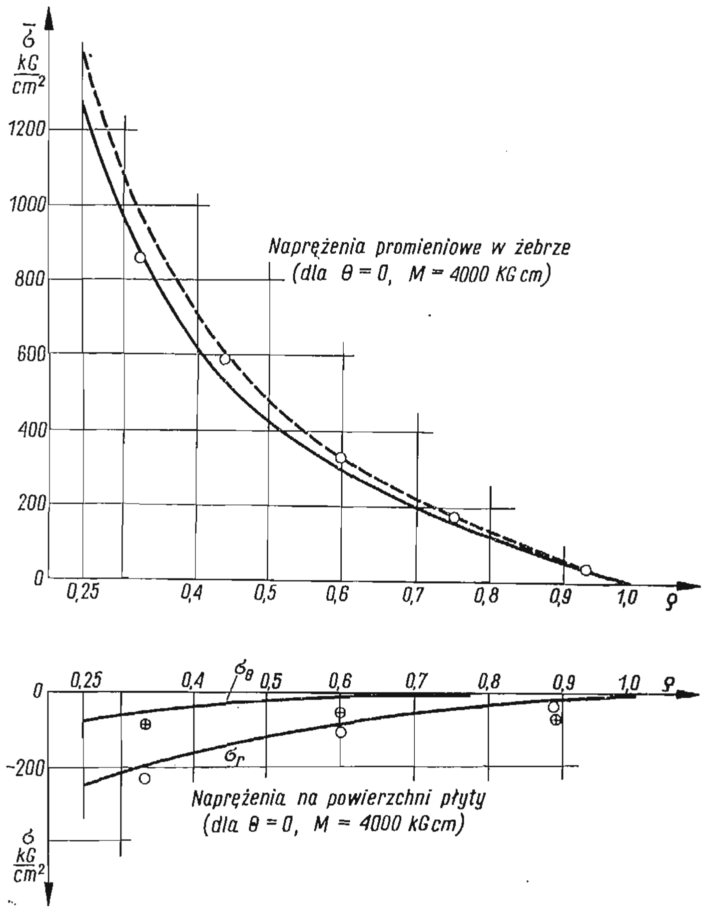
C) Wartości naprężeń:

Promień ϱ	Naprężenia w płycie			Naprężenia w żebrach dla $\Theta = 0°$	
	promien. $\frac{\sigma_r}{M}$ 1/cm³	obwodowe $\frac{\sigma_\Theta}{M}$ 1/cm³	styczne $\frac{\tau_{r\Theta}}{M}$ 1/cm³	na kraw. zewn. $\frac{\sigma_r}{M}$ 1/cm³	na wysok. śr. tens. $\frac{\bar{\sigma}'_r}{M}$ 1/cm³
+0,25	−0,08800	−0,02552	+0,02774	+0,65725	+0,58346
+0,3	−0,07494	−0,02318	+0,02398	+0,50908	+0,45135
+0,4	−0,05360	−0,01775	+0,01927	+0,32615	+0,28869
+0,5	−0,03837	−0,01240	+0,01617	+0,21747	+0,19225
+0,6	−0,02720	−0,00752	+0,01396	+0,14530	+0,12827
+0,7	−0,01868	−0,00311	+0,01234	+0,09376	+0,08261
+0,8	−0,01194	+0,00088	+0,01115	+0,05504	+0,04831
+0,9	−0,00643	+0,00456	+0,01028	+0,02481	+0,02155
+1,0	−0,00183	+0,00798	+0,00964	+0,0052	+0,00005

wiającym realizację warunków brzegowych oraz obciążenia. Na rys. 6 płyta umieszczona jest w jednym z półpierścieni, w którym wykonano rowek obwodowy (podparcie przegubowe).

W ten sam sposób wykonano obliczenia teoretyczne i pomiary dla płyty z liczbą żeber $n = 12$. Wyniki obliczeń i pomiarów przedstawiono na rys. 8.

Moment obciążający M dobierano tak, by największe naprężenia w żebrach nie przekroczyły naprężeń dopuszczalnych dla materiału płyt.



Rys. 8. Naprężenia w płycie wzmocnionej $n = 12$ żebrami, podpartej przegubowo na obwodzie zewnętrznym

Naprężenia teoretyczne na zewnętrznej krawędzi żebra — linia przerywana; na wysokości naklejenia tensometrów — linia ciągła
Wyniki pomiarów naprężeń promieniowych (○) i obwodowych (⊕)

7. Wnioski

Przeprowadzone badania tensometryczne naprężeń w żebrach płyt podpartych przegubowo na obwodzie zewnętrznym wykazują dobrą zgodność z wynikami teoretycznymi. Rozbieżności między naprężeniami obliczonymi teoretycznie a wynikami pomiarów dla powierzchni płyt są procentowo większe niż dla żeber. Naprężenia te są jednak kilkakrotnie mniejsze od naprężeń maksymalnych w żebrach w związku z czym błędy pomiarów mogą być znaczne.

Stwierdzono stosunkowo mały wpływ zmiany liczby żeber z $n = 6$ do $n = 12$ na różnice między obliczeniami teoretycznymi i wynikami badań. Ma to duże znaczenie praktyczne ze względu na stosowane w praktyce płyty (dna bębnów) wzmocnione małą liczbą żeber.

Literatura cytowana w tekście

1. Д. В. Вайнберг, О. М. Рубач, *Круглые конструктивно ортотропные пластины. Напряженное состояние колес прокатных станов и шахтных механизмов*, Изд. АН УССР, 1959.
2. Д. В. Вайнберг, *Методу расчета круглых ребристых пластин.* Расчет пространственных конструцкии, Вып. 5.
3. Н. И. Долгов, *О расчете круглых пластин подкрепленных радиальными ребрами. Теория пластин и оболочек*, Изд. АН УССР, 1962.
4. О. М. Рубач, *Изгиб круглых пластин усиленных радиальными ребрами*, Сборник трудов Инст. Строительной Механики, № 20, 1955, Изд. АН УССР.
5. О. М. Рубач, В. М. Агранович, *К вопросу о напряженном состоянии круглых пластин усиленных радиальными ребрами*, Прикладна механика, вып. 1, 1957, Изд. АН УССР.
6. А. Н. Духовный, *Расчет на прочность упругих и кольцевых пластин подкрепленных радиальными ребрами*, Труды ВНИИ Гидромащиностроении, 1961, вып. 29.
7. А. Н. Духовный, *Приближенный метод определения напряжений при изгибе круглых и кольцевых пластин усиленных радиальными ребрами*, Труды ВНИИ Гидромашиностроении, 1962, вып. 30.
8. А. Н. Духовный, *Приближенные решение задачи о прогибе круглых и кольцевых пластин усиленных радиальными ребрами*, Труды ВНИИ Гидромащиностроении, 1962, вып. 30.
9. А. Д. Коваленко, *Круглые пластины переменной толщины*, Москва 1959.
10. S. Timoshenko, S. Wojnowsky-Krieger, *Teoria płyt i powłok*, wyd. Arkady, 1962.
11. J. Leyko, A. Młotkowski, *Zginanie osiowo-symetrycznej ortotropowej płyty kołowej o zmiennej sztywności zginania, obciążonej parą sił przyłożoną w środku*, Archiwum Budowy Maszyn nr 3, (1962).

Резюме

ПРОЧНОСТЬ КРУГОВОЙ ПЛАСТИНКИ УСИЛЕННОЙ ОДНОСТОРОННЫМИ РАДИАЛЬНЫМИ РЕБРАМИ, ПОДВЕРЖЕННОЙ АНТИСИММЕТРИЧНОМУ ИЗГИБУ

В настоящей работе решена задача об определении напряжений и деформаций в круговой пластинке усиленной радиальными ребрами расположенными осесимметрично по одной стороне срединной поверхности. Пластинка подвергнута антисимметрическому изгибу парой сил приложенной в центре. Пластинка рассматривается как конструктивно-ортотропная. Задача решена в перемещениях. Решение имеет вид степенной функции. Рассмотрены случаи опертого и жестко заделанного края пластинки. Для случая пластинок с 6 и 12 ребрами жесткости специальной формы выполнены вычисления и произведены тензометрические измерения.

Summary

STRENGTH OF CIRCULAR PLATE WITH ONE-SIDED RIBS SUBJECTED TO ANTISYMMETRIC BENDING

The paper solves the problem of elastic strain and stress in a circular plate which has radial ribs on one side of the middle surface. The plate is bended skew-symmetrically by a couple aching at the centre.

The problem is solved in displacements using the theory of orthotropic plates.

The system of three differential equations with respect to radial circumferential and transversal displacements have been obtained.

The solution has the form of a polynomial. The plate can be simply supported or built in. As a numerical example this paper shows the plate with 6 and 12 ribs of special shape.

POLITECHNIKA ŁÓDZKA

Pracę złożono w Redakcji dnia 10 stycznia 1968 r.