

## O OPORZE PRZY TOCZENIU SZTYWNEJ KULI PO PODŁOŻU LEPKOSPĘŻYSTYM

J. HALAUNBRENNER, A. KUBISZ (KRAKÓW)

### Wstęp

Ze względu na coraz szersze zastosowanie tworzyw sztucznych jako materiałów na elementy maszyn oraz jako materiałów dźwiękochłonnych i tłumiących drgania zachodzi potrzeba zbadania ich zachowania się w połączeniach tarciovych. Poniższa praca rozpatruje związek, jaki zachodzi pomiędzy oporem przy toczeniu sztywnej kuli po podłożu lepkospężystym a własnościami mechanicznymi podłoża. Ograniczono się do niewielkich nacisków normalnych, aby rezultaty pomiarów można było porównać z wynikami przybliżonych teorii, opracowanych dla liniowych związków między naprężeniami a odkształceniami oraz ich pochodnymi względem czasu.

Przez długi czas przyczynę oporu przy toczeniu upatrywano w poślizgach ciała toczącego się, zachodzących w obszarze styku [1–7]. Fakt, że smarowanie niemal nie zmienia oporu przy toczeniu, chociaż współczynnik tarcia powierzchni smarowanych znacznie maleje, wskazuje, że mikropoślizgi biorą nieznaczny udział w oporze. Nowy, podstawowy krok w tej dziedzinie, uczynił D. TABOR [8], który powiązał opór przy toczeniu stalowej kuli po różnych gatunkach gumy ze stratami na histerezę sprężystą w podłożu.

Niewątpliwie, na opór przy toczeniu składają się trzy czynniki: 1) pochodzący od strat energii wywołanych lepkością podłoża, 2) pochodzący od oddziaływań powierzchniowych wywołanych adhezją, elektryzowaniem się obu ciał itd., 3) spowodowany mikropoślizgami w obszarze styku.

Dla ciał o dużej histerezie sprężystej, a małej adhezji, czynnik pierwszy zdecydowanie przeważa. Dla takich warunków uzyskał D. TABOR [8] wzór teoretyczny, podający zależność oporu przy toczeniu kuli od nacisku normalnego, promienia kuli i strat spowodowanych histerezą dla niewielkich prędkości toczenia. Zależność oporu od prędkości ruchu, wielkość i kształt obszaru styku nie były w tej pracy rozpatrywane.

Dalsze prace [9–18] rozpatrują, przeważnie teoretycznie, opór przy toczeniu sztywnej kuli lub walca po podłożu lepkospężystym, przy czym własności podłoża są reprezentowane prostymi modelami reologicznymi. Nieliczne prace doświadczalne [12, 17, 18] zajmują się zależnością tego oporu od prędkości toczenia. W pracy [9] autorzy podają przybliżoną teorię oporu przy toczeniu sztywnego walca kołowego po podłożu lepkospężystym, przedstawionym kolejno kilkoma prostymi modelami mechanicznymi, i przewidują, że zależność tarcia tocznego od prędkości (w dużym zakresie prędkości) daje pierwsze przybliżenie krzywej rozkładu czasów relaksacji.

Przedstawiona praca składa się z trzech części: w części pierwszej zbadano własności lepkosprężyste kilku żywic odznaczających się dużym opóźnieniem sprężystym i małą wartością modułów sprężystości (w stałej temperaturze 21°C); w części drugiej zmierzono: a) opór przy toczeniu stalowej kuli po płytach wykonanych z tych żywic w zależności od prędkości toczenia, b) zbadano obszar styku kuli z podłożem w zależności od prędkości toczenia; w części trzeciej przedyskutowano rezultaty doświadczeń.

### 1. Własności lepkosprężyste użytych żywic

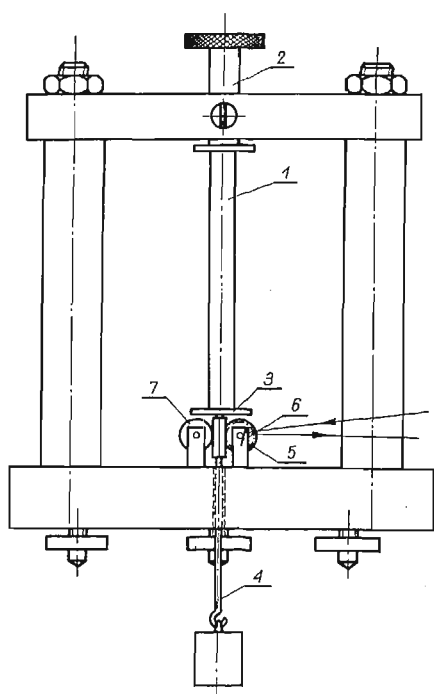
Zbadano własności lepkosprężyste następujących żywic: a) żywicy epoksydowej P 52, b) żywicy poliestrowej Polimal 152.

1. *Przygotowanie próbek.* Ciekły monomer mieszano z utwardzaczem i przyśpieszczaczem i wstawiano pod kłosz pompy próżniowej dla usunięcia pęcherzyków powietrza. Następnie masę tę wlewano do szklanych kuwet dla otrzymania płyt płasko-równoległych i szklanych rurek dla otrzymania prętów o przekroju kołowym. Warstwę antyadhezyjną stanowiła powłoka alkoholu poliwinylowego. Próbki polimeryzowały przez kilka dni w temperaturze pokojowej, następnie wyjmowano je z form i wygrzewano w temperaturze 60°C przez 12 godzin dla ustalenia własności mechanicznych (starzenie). Pomiary przeprowadzano w temperaturze  $(21 \pm 0,5)^\circ\text{C}$  przy wilgotności względnej powietrza około 70%.

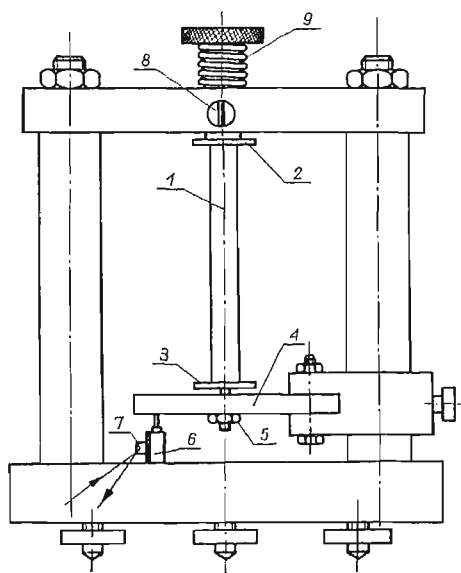
2. *Aparatura pomiarowa.* W celu opisanía własności lepkosprężystych użytych żywic obserwowano: a) zjawisko pełzania prętów poddanych stałemu naprężeniu rozciągającemu, b) zjawisko relaksacji naprężeń w prętach poddanych stałemu odkształceniu (wydłużeniu). Dla obserwacji pełzania prętów zbudowano aparat przedstawiony na rys. 1.

Składa się on z masywnego statywu dającego się ustawić pionowo za pomocą trzech śrub nożnych i libelli. Do walca 2 zamocowanego w górnej poprzeczce wspartej na dwu kolumnach przyklejono górny koniec próbki 1. Dolny jej koniec jest przyklejony do dużej płytki 3, w którą wkręcono pręt 4 przepuszczony przez podstawę statywu i obciążony odważnikiem. Podczas wydłużania się próbki umieszczona na pręcie zębatka obraca kółko zębate 5, na którego osi nalepiono zwierciadło 6. Rolka 7 zapewnia prowadzenie pręta. Urządzenie to pozwala na zapis optyczny pełzania na obracającym się walcu, pokrytym papierem światłoczułym.

Dla obserwacji relaksacji naprężeń w rozciągniętym pręcie aparat powyższy zmodyfikowano w sposób przedstawiony na rys. 2. Między płytkę 2 i poprzeczkę statywu wsuwano płytkę dystansową o grubości równej założonemu przyrostowi długości próbki i zamocowywano walec śrubą 8. Dolny koniec próbki łączono z krótkim nagwintowanym prętem przesuniętym przez otwór w sztywnej, płaskiej sprężynie 4 i nakręcano na pręt nakrętkę 5 do styku ze sprężyną. Ugięcie sprężyny 4 rejestrowano za pomocą czujnika mechanicznego 6 wmontowanego w podstawę statywu i zwierciadła 7, umieszczonego na jego osi. Ten sposób pomiaru ugięcia okazał się znacznie dogodniejszy i czulszy niż pomiar odkształcenia za pomocą tensometrów oporowych. W celu nagłego rozciągnięcia próbki usuwano płytkę dystansową i zluźniano śrubę 8. Sprężyna walcowa 9 rozciągała próbkę o długość równą grubości płytki dystansowej w czasie rzędu  $10^{-3}$ – $10^{-2}$  sek. Ugięcie sprężyny 4 stanowiło około 0,5% przyrostu długości próbki. Można zatem przyjąć, że odkształcenie próbki



Rys. 1. Aparat do obserwacji pełzania prętów

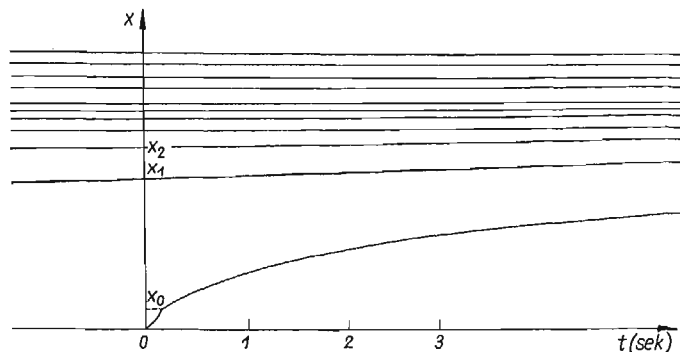


Rys. 2. Aparat do obserwacji relaksacji naprężeń w rozciągniętym pręcie

było stałe w czasie pomiaru naprężenia. Sprężynę wycechowano statycznie znanymi odważnikami stwierdzając przy tym proporcjonalność ugięcia do przyłożonej siły.

3. *Wyniki pomiarów.* Rysunek 3 przedstawia zapis pełzania przy rozciąganiu pręta z żywicy Polimal 152.

Odcinki na osi poziomej przedstawiają czasy, jakie upłynęły od momentu przyłożenia siły rozciągającej. Na osi pionowej promień świetlny zapisał wychylenie  $x$  plamki świetl-



Rys. 3. Pełzanie żywicy Polimal 152.

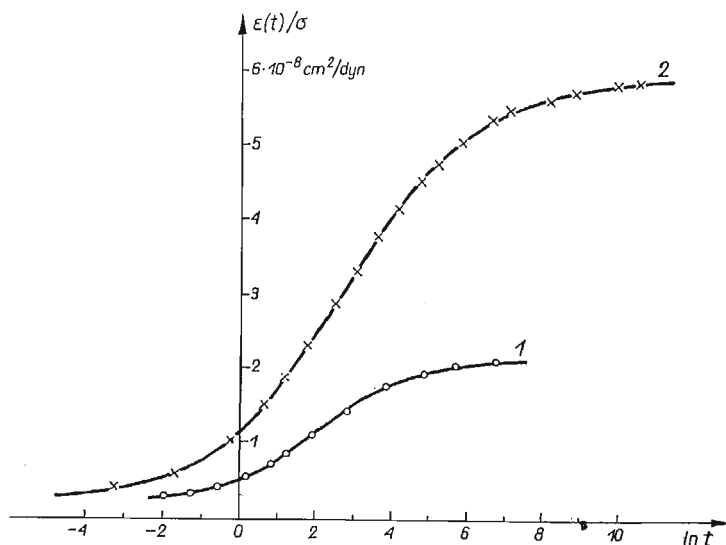
Długość pręta  $l = 15,8$  cm, pole przekroju  $S = 0,89$  cm<sup>2</sup>, obciążenie  $N = 50$  G; odległość papieru światłoczułego  $y = 80$  cm, prędkość posuwu  $v = 2,61$  cm/sek. Cztery górne linie przedstawiają kolejno zapisy pełzania po upływie czasów: 2, 5, 10, 20 minut

nej z położenia równowagi. Wychylenie osiąga wartości  $x_1, x_2, \dots, x_n$  po 1, 2, 3, ... obrotach walca. Zapis prowadzono w sposób ciągły aż do zagęszczenia się linii, następnie obserwowano plamkę po upływie 20, 30 minut, następnie co parę godzin, łącznie przez 24 godziny. Po zarejestrowaniu krzywej pelzania usuwano obciążenie i sprawdzano, czy próbka nie doznała odkształceń trwałych. Badane w tej pracy próbki żywic wracały do stanu pierwotnego po upływie kilku dni (w granicach dokładności pomiaru przyrostu długości:  $2 \cdot 10^{-4}$  cm).

Porównując krzywe pelzania otrzymane przy obciążeniach 100 G, 200 G, ..., 500 G, stwierdzono, że dla tych obciążeń w tym samym czasie (liczonym od momentu przyłożenia obciążenia) wychylenia  $x$  pozostają w stosunku 1 : 2 : ... 5; materiał w zakresie naprężeń rozciągających  $\sigma \leq 0,5$  kG/cm<sup>2</sup> można przyjąć za liniowy.

Z rysunku 3 widać, że od chwili przyłożenia obciążenia odkształcenie wzrasta niemal natychmiastowo do pewnej wartości  $\varepsilon_0 = (x_0/Z_0)(R/l)$ , gdzie  $R$  jest promieniem zębatego kółka (odkształcenie natychmiastowe). Można też na rysunku zaobserwować drgania próbki wywołane sprężystością i bezwładnością układu, do którego nagle przyłożono siłę.

Wpływu zmiany pola przekroju próbki na wielkość naprężenia rozciągającego nie uwzględniano. Maksymalne wydłużenia względne osiągnane w doświadczeniach nad pelzaniem wynosiły  $\varepsilon \approx 0,3\%$ ; stąd przy wartości współczynnika Poissona  $\nu \approx 0,5$  maksy-



Rys. 4. Zależność podatności na pelzanie  $\varepsilon(t)/\sigma$  od  $\ln t$  dla: 1-żywicy epoksydowej P 52, 2-żywicy Polimal 152

malne skrócenia względne wymiarów poprzecznych próbki  $\varepsilon = 0,15\%$ , zmiany zaś pola przekroju  $\Delta S/S \approx 0,3\%$ . O tyle też procent mogło wzrastać naprężenie w próbce w końcowych fazach obserwacji pelzania.

Na podstawie zapisu pelzania sporządzono tablicę zależności podatności na pelzanie  $\varepsilon(t)/\sigma = (X(t)/2y)(RS/lN)$  od czasu  $t$ . Następnie wykreślono tę zależność w układzie półlogarytmicznym współrzędnych odcinając na osi odciętych  $\ln t$  ( $t$  w sek), na osi zaś

rzędnych  $\varepsilon(t)/\sigma$  w skali liniowej. Otrzymane w ten sposób wykresy podatności na pełzanie mają kształt nachylonej litery  $S$  (rys. 4).

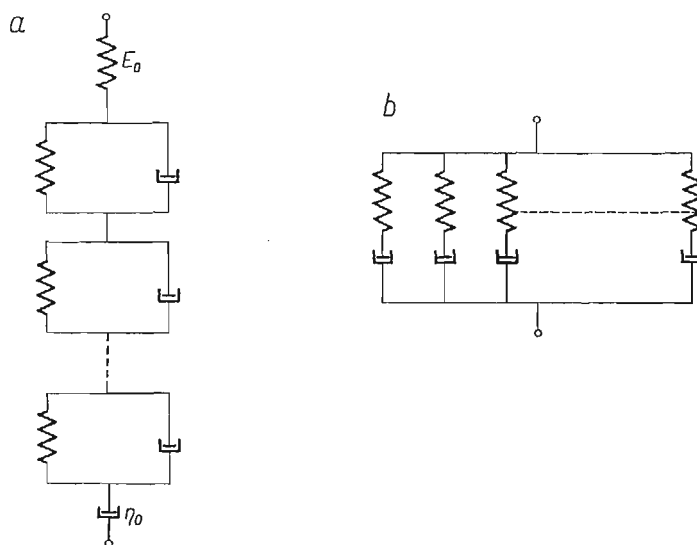
Przyjęto model mechaniczny materiału, złożony z nieskończenie wielu elementów Voigta o zmieniających się w sposób ciągły wartościach współczynników lepkości  $\eta$  i modułów Younga  $E$ , połączonych szeregowo ze sobą oraz ze sprężyną  $E_0$  i tłumikiem  $\eta_0$  (rys. 5a). Model ten poddany naprężeniu  $\sigma = \text{const}$  odkształca się zgodnie z równaniem

$$\frac{\varepsilon(t)}{\sigma} = \frac{1}{E_0} + \int_0^{\infty} f(\tau) \left[ 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right] d\tau + \frac{t}{\eta_0},$$

gdzie  $E_0$  jest modułem sprężystości «natychmiastowej»,  $\tau = \eta/E$  czasem opóźnienia pojedynczego elementu Voigta; funkcja  $f(\tau)$  — funkcją rozkładu podatności  $1/E$  na czasy opóźnień (zwana «widmem» czasów opóźnienia). Wyraz  $t/\eta_0$  przedstawia nieodwracalne płynięcie materiału proporcjonalne do czasu.

Opis własności lepkospężystych materiału wymaga przy przyjęciu tego modelu podania wartości:  $E_0$ ,  $\eta_0$  i funkcji rozkładu podatności  $f(\tau)$  w zależności od czasu opóźnienia  $\tau$ .

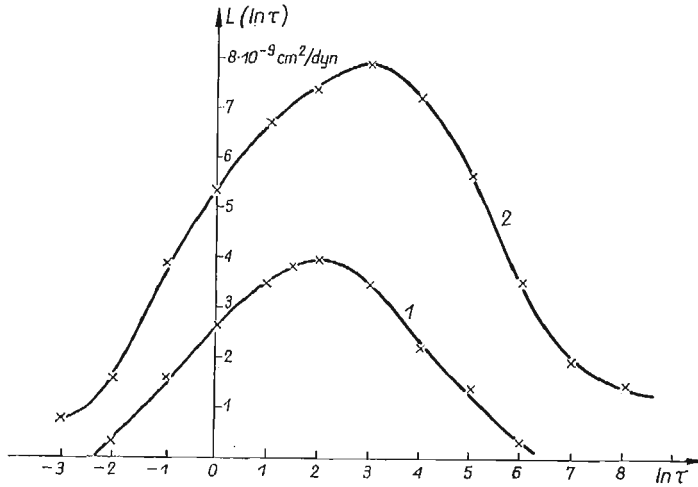
Funkcja rozkładu podatności na pełzanie w zależności od  $\ln \tau$  nosi nazwę «logarytmicznego widma czasów opóźnienia»; oznaczymy tę funkcję przez  $L(\ln \tau) = \tau f(\tau)$ .



Rys. 5. Przyjęte modele mechaniczne

Pierwsze przybliżenie funkcji  $L(\ln \tau)$  otrzymano metodą omówioną przez STAVERMANNĄ i SCHWARTZLĄ [14]. Polega ona na różniczkowaniu graficznym funkcji  $\varepsilon(\ln \tau)/\sigma$  i nanieśnieniu pochodnej w zależności od  $\ln \tau$ . Jest to dobre przybliżenie w przypadku rozkładu ciągłego, obejmującego duży przedział wartości  $\ln \tau$ , gorsze zaś w przypadku widma dyskretnego. Rysunek 6 przedstawia pierwsze przybliżenia widm czasów opóźnienia dla badanych żywic.

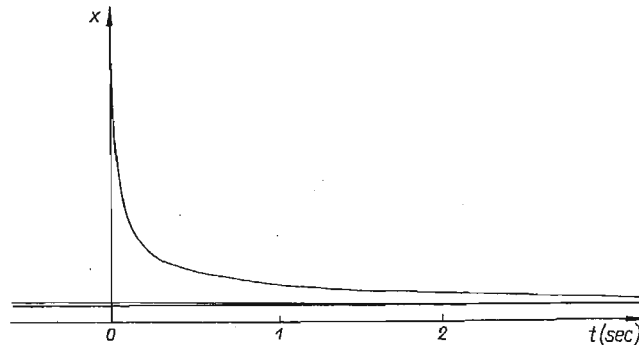
Z kształtu krzywej rozkładu oraz położenia i wartości maksimumów można od razu zdać sobie sprawę jakościowo z zachowania się materiału poddanego stałemu obciążeniu. Wysokie maksima np. odpowiadają dużej podatności; jeżeli ponadto to maksimum przy-



Rys. 6. Widma czasów opóźnienia (1-sze przybliżenie) dla:  
1-żywicy epoksydowej P 52, 2-żywicy poliestrowej Polimal 152

pada na bardzo krótkie czasy opóźnienia, to materiał zachowuje się prawie jak ciało sprężyste o małym module sprężystości. Z wykresu na rys. 4 można wprost odczytać podatność «natychmiastową»  $I_0 = 1/E_0$ , a jeżeli materiał nie wykazuje lepkiego płynięcia, podatność w równowadze  $I(t = \infty) = I_\infty$ .

Obserwowano następnie relaksację naprężeń w próbkach poddanych stałemu wydłużeniu względnemu  $\Delta l/l = \text{const}$ . Przy opracowaniu obserwacji przyjęto model złożony z nieskończenie wielu elementów Maxwella, połączonych równolegle (rys. 5b). (Opis relaksacji oparty o model 5a jest nadzwyczaj skomplikowany). Po nagłym odkształceniu

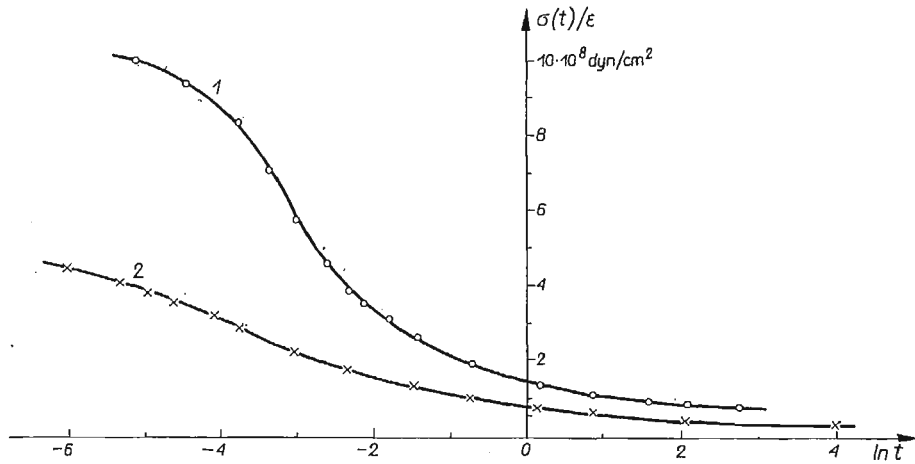


Rys. 7. Relaksacja naprężeń w żywicy epoksydowej P52  
 $x$ -wychylenie plamki świetlnej z położenia równowagi, odległość papieru światloczułego  $y = 50$  cm, prędkość posuwu taśmy  $v = 4,25$  cm/sek, długość pręta  $l = 17,5$  cm, pole przekroju  $S = 0,88$  cm<sup>2</sup>, przyrost długości pręta  $\Delta l = 1,0$  mm

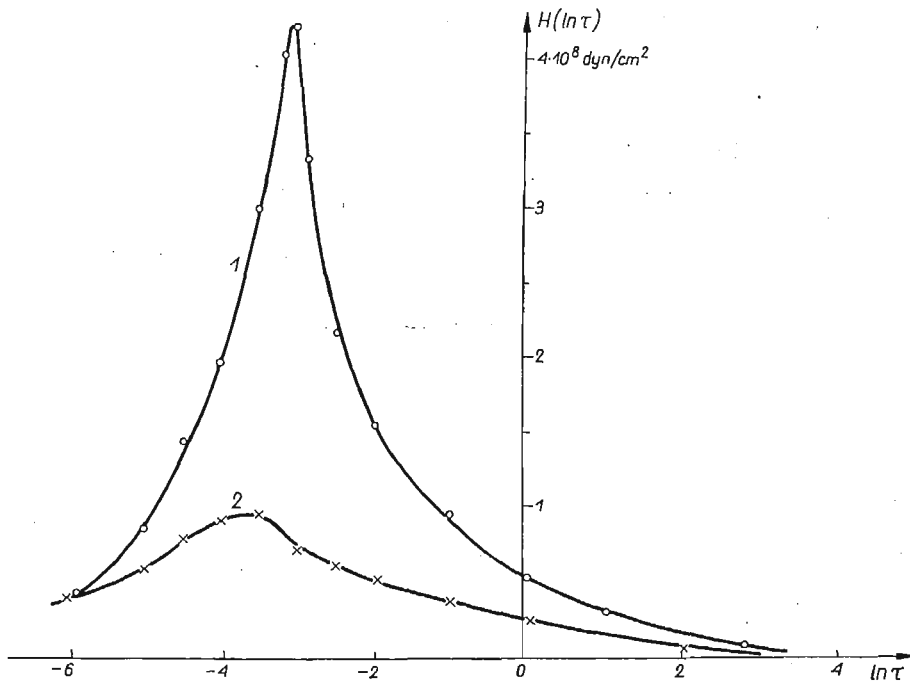
tego modelu do wielkości  $\varepsilon = \text{const}$  moduł sprężystości  $E(t) = \sigma(t)/\varepsilon$  maleje wraz z czasem wg. wzoru

$$E(t) = \int_0^{\infty} g(\tau) e^{-\frac{t}{\tau}} d\tau + E_{\infty},$$

gdzie  $g(\tau)$  jest funkcją rozkładu  $E$  na czasy relaksacji  $\tau$ . Logarymiczną funkcję rozkładu  $H(\ln \tau) = \tau g(\tau)$  zwaną «logarymicznym widmem czasów relaksacji» otrzymujemy róż-



Rys. 8. Wykresy funkcji  $\sigma(t)/\varepsilon$  w układzie półlogarymicznym współrzędnych: 1) P52, 2) Polimal 152



Rys. 9. Widma czasów relaksacji (pierwsze przybliżenie) dla: 1) P52, 2) Polimal 152

niczując graficznie krzywą na rys. 8. Własności lepkosprężyste materiału przy przyjęciu tego modelu są w zupełności opisane przez podanie funkcji  $H(\ln \tau)$  i  $E_\infty$ .

Rysunek 7 przedstawia zapis odkształcenia sprężyny 4 (na rys. 2) mierzącej naprężenie.

Na podstawie krzywej z rys. 7 i znajomości stałej sprężyny 4 sporządzono tablicę i wykres funkcji  $\sigma(t)/\varepsilon$  w zależności od  $\ln \tau$  (rys. 8), a następnie różniczkując graficznie tę krzywą otrzymano pierwsze przybliżenie widma czasów relaksacji  $H(\ln \tau)$  dla materiału próbki. Widma takie dla obu badanych żywic przedstawia rys. 9.

Na podstawie opracowanych obserwacji pelzania i relaksacji naprężeń przy rozciąganiu można dla obu badanych żywic podać dane liczbowe:

1. *Żywica epoksydowa P52*. Widmo czasów opóźnienia obejmuje przedział ( $e^{-3}$  do  $e^6$ ) sek. Jedno ostre maksimum przypada na czas  $\tau_1 = 8$  sek; podatność natychmiastowa  $J_0 = 4,1 \cdot 10^{-9}$  cm<sup>2</sup>/dyn; ( $E_0 = 248$  kG/cm<sup>2</sup>);  $\eta_0 = \infty$ ; podatność w równowadze  $J_\infty = 2,1 \cdot 10^{-8}$  cm<sup>2</sup>/dyn. Widmo czasów relaksacji rozciąga się w przedziale ( $e^{-7}$  do  $e^4$ ) sek. Jedno bardzo ostre maksimum przypada na  $\tau_2 = 7 \cdot 10^{-2}$  sek:  $E_\infty = 0,8 \cdot 10^8$  dyn/cm<sup>2</sup>.

2. *Żywica Polimal 152*. Widmo czasów opóźnienia obejmuje przedział ( $e^{-3}$  do  $e^{12}$ ) sek. Jedno (płaskie) maksimum przypada na czas  $\tau_1 = 23$  sek; podatność natychmiastowa  $J_0 = 3,6 \cdot 10^{-8}$  cm<sup>2</sup>/dyn ( $E_0 = 280$  kG/cm<sup>2</sup>);  $J_\infty = 5,8 \cdot 10^{-8}$  cm<sup>2</sup>/dyn. Widmo czasów relaksacji obejmuje przedział ( $e^{-7}$  do  $e^3$ ) sek z jednym maksimum dla  $\tau_2 = 5,0 \cdot 10^{-2}$  sek;  $E_\infty = 0,36 \cdot 10^8$  dyn/cm<sup>2</sup>.

Dane liczbowe dla  $\tau_1$  i  $\tau_2$  są średnimi z trzech zapisów. Zastosowana metoda graficzna nie pozwala na większą dokładność niż 30%. Należy zauważyć, że wobec szybkiego spadku naprężeń w próbce bezpośrednio po jej odkształceniu wartości naprężeń dla czasów krótszych od  $5 \cdot 10^{-3}$  sek są niepewne. Dane powyższe odnoszą się do temperatury 21°C.

## 2. Zależność oporu przy toczeniu sztywnej kuli po podłożu lepkosprężystym od prędkości ruchu

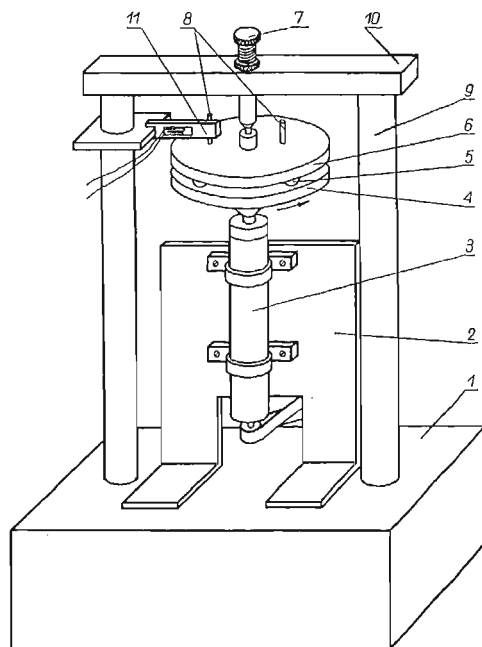
Dla zbadania tej zależności zbudowano aparat przedstawiony na rys. 10.

Na masywnej betonowej podstawie 1 zamocowano stalową płytę 2 grubości 10 mm, do której za pomocą uchwytów regulacyjnych przymocowano obudowę wrzeciona 3. Na stożkowy koniec wrzeciona nasadzono masywną tarczę stalową 4 o średnicy 20 cm, zaopatrzoną w płytki rowek o profilu kołowym, przy czym promień krzywizny rowka był znacznie większy od promienia toczących się kulek. Wrzeciono było wprawiane w ruch obrotowy za pomocą pasa transmisyjnego bez końca. Napędu dostarczał silnik elektryczny o regulowanej częstotliwości obrotów i układ przekładni pozwalający na otrzymywanie prędkości obwodowych  $10^{-3}$  cm/sek–20 m/sek. Silnik był umieszczony na oddzielnym betonowym bloku spoczywającym na urządzeniu amortyzującym drgania. Po umieszczeniu w rowku tarczy 4 w równych odstępach trzech jednakowych stalowych kulek 5 kładziono na nie stalową tarczę górną 6 z przyklejoną od dołu tarczą z badanego tworzywa grubości około 2 cm. Tarcza stalowa była połączona ze śrubą 7 ślizgowym łożyskiem stożkowym. Była ona zaopatrzona również w dwa stalowe kołki 8. Dwa słupy 9 o średnicy 50 mm wpuszczone w blok betonowy połączono poprzeczką 10. Na jednym ze słupów umieszczono pierścień, służący do zamocowania płaskiej sprężyny stalowej 11 o dużej sztywności (dla zmniejszenia drgań frykcyjnych). Siłę oporu przy toczeniu mierzono za pomocą dwóch



tensometrów oporowych, naklejonych na sprężynę 11 po obu jej stronach. Tensometry włączono w gałęzie mostka Wheatstonea w układzie różnicowym. Odczytów dokonywano za pomocą galwanometru. Układ wycechowano znanymi odważnikami (stała cechowania wynosiła 2,0 G na działkę skali galwanometru).

Ruch obrotowy tarczy dolnej powodował toczenie się kul po tarczy górnej wprowadzając ją w obrót; począwszy od momentu, w którym kołek tarczy oparł się o sprężynę, ugiął ją i moment sił tarcia został zrównoważony momentem sił sprężystych, kule toczyły się



Rys. 10. Aparat do pomiaru oporu przy toczeniu kul

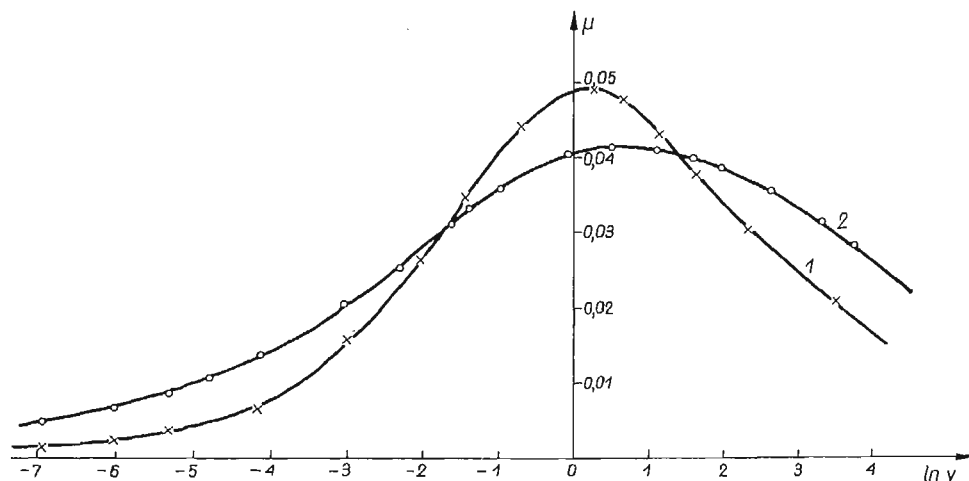
po nieruchomej tarczy górnej. Oś obrotu każdej z kul leżała w obszarze styku kuli z tarczą górną, a prędkość środka kuli równała się  $1/2$  prędkości liniowej punktu styku z tarczą dolną. Opór przy toczeniu kul po stalowej tarczy dolnej można pominąć wobec oporu przy toczeniu po podłożu z tworzywa, jeżeli bowiem zastąpimy górną tarczę z polimeru tarczą stalową, opór przy toczeniu leży w granicach błędu pomiaru.

Otrzymany ruch kul nie był czystym toczeniem; ponieważ torem był okrąg koła, toczeniu towarzyszył obrót kuli koło osi pionowej (spin) (na jeden obrót kuli koło osi poziomej przypadało 9 obrotów koło osi pionowej). W pracy [12] pokazano doświadczalnie, że udział nawet znaczniejszego spinu niż w naszym przypadku nie ma wpływu na opór przy toczeniu.

Nacisku normalnego na kulę dostarczał ciężar tarczy górnej z próbką i ewentualnie dodatkowe tarcze obciążające. W celu zmniejszenia adhezji kul do polimeru pokryto powierzchnię próbki cienką, lśniąca warstwą  $\text{MoS}_2$ .

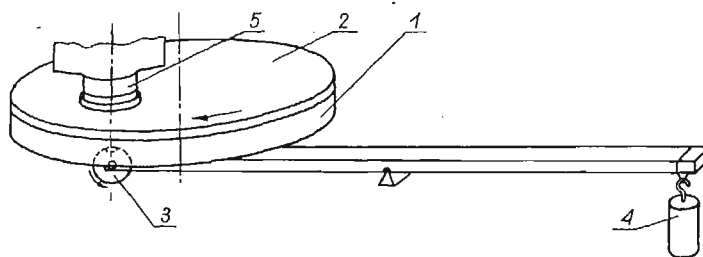
Rysunek 11 przedstawia wykres zależności współczynnika oporu przy toczeniu  $\mu = \frac{\text{siła oporu}}{\text{nacisk normalny}}$  stalowej kuli o średnicy 18 mm od prędkości toczenia po tarczach wykonanych z uprzednio badanych żywic.

Krzywe na rys. 11 mają jedno wyraźne maksimum. Nie bez wpływu na ich przebieg pozostaje nagrzewanie się podłoża podczas przetaczania. Zasadniczo pomiar oporu należy przeprowadzać na materiale «wypoczętym», nieodkształconym przez uprzednie przejścia



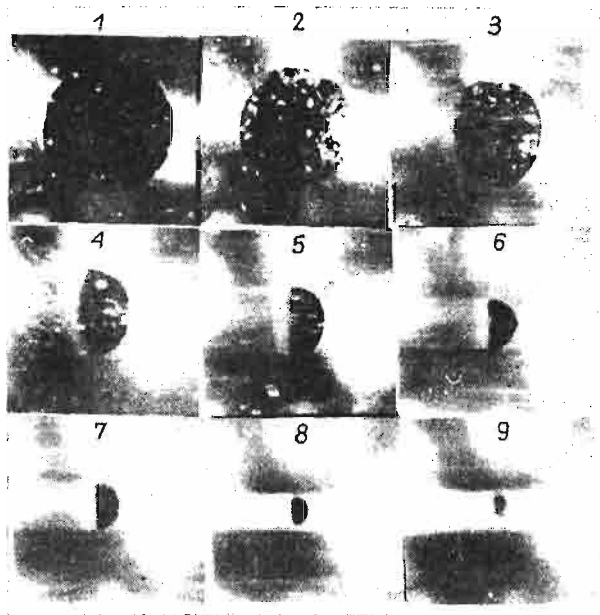
Rys. 11. Zależność współczynnika oporu przy toczeniu stalowej kuli od prędkości toczenia. Średnica kuli 18 mm, nacisk normalny na jedną kulę = 920 G dla żywicy epoksydowej P 52 (krzywa 1) i 760 G dla Polimal 152 (krzywa 2)

kuli; dla małych prędkości toczenia do 5 cm/sek łatwo to uzyskać, zaś dla prędkości większych nie udało się uniknąć kilkakrotnego przejścia kuli po własnym śladzie, gdyż czas ustalania się wskazań galwanometru w mostku był rzędu paru sekund.

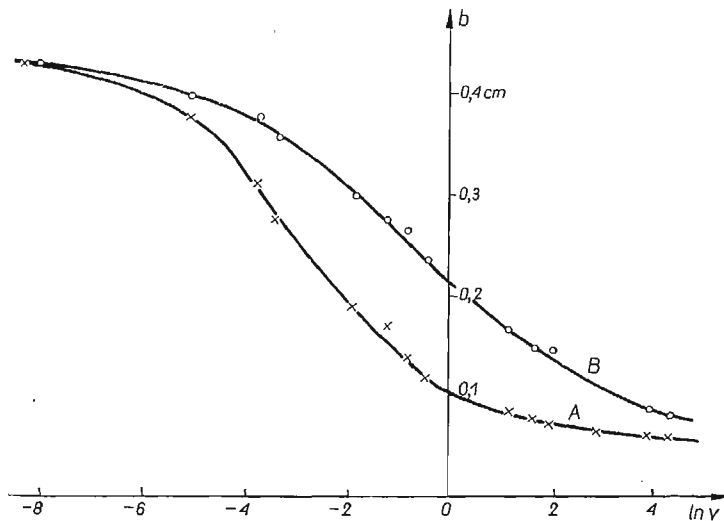


Rys. 12. Urządzenie do obserwacji obszaru styku kuli z podłożem

Ze względu na rozważania w p. 3 uzupełniono pomiary oporu przy toczeniu kuli obserwacjami wielkości i kształtu obszaru styku kuli z podłożem lepkosprężystym w zależności od prędkości ruchu, przy stałym nacisku normalnym, równym naciskowi w pomiarach oporu. Zastąpiono w tym celu płytę stalową 6 z rys. 10 płytą szklaną 2 (rys. 12), do której



Rys. 13. Fotografia obszaru styku kuli stalowej o średnicy 18 mm toczącej się po płycie z żywicy epoksydowej P 52 w zależności od prędkości toczenia. Nacisk normalny 920 G, powiększenie 4-krotne:  
 1-po 2 min. spoczynku, 2- $v = 6,8 \cdot 10^{-3}$  cm/sek, 3- $v = 3,5 \cdot 10^{-2}$  cm/sek, 4- $v = 2,8 \cdot 10^{-1}$  cm/sek, 5- $v = 1,17$  cm/sek, 6- $v = 3,15$  cm/sek, 7- $v = 5,0$  cm/sek, 8- $v = 17,5$  cm/sek, 9- $v = 65,5$  cm/sek



Rys. 14. Zależność średnicy obszaru styku kuli z podłożem lepkością od  $\ln$  prędkości toczenia ( $v$  w cm/sek).

Podłoże: żywica epoksydowa P 52, nacisk normalny 920 G, A-średnica równoległa do prędkości (2a), B-średnica prostopadła do prędkości (2b).

przyklepiono tarczę z badanej żywicy 1. Obie sklezione płyty połączono sztywnie z wrzecionem zachowując między nimi a tarczą dolną odstęp kilku cm. Stalową kulkę 3 z poprzednich pomiarów osadzono na osi poziomej na końcu ramienia dźwigni równoramiennej; ciężarek 4 dostarczał nacisku normalnego. Obszar styku pozostaje stale w środku pola widzenia aparatu fotograficznego 5 (fotografowano przez płytę szklaną i plastikową). Rysunek 13 przedstawia otrzymane zdjęcia.

Z rosnącą prędkością obszar styku maleje i zmienia kształt: przy prędkościach rzędu  $10^{-3}$  cm/sek jest on niemal kołowy, następnie przyjmuje postać księżycy między pełnią i trzecią kwadrą, przy prędkościach zaś rzędu 10 cm/sek przybiera dla tej żywicy kształt zbliżony do półkola zwróconego stroną wypukłą w kierunku ruchu. Wykres na rys. 14 przedstawia zależność średnic obszaru styku:  $A$  równoległej do wektora prędkości,  $B$  prostopadłej do wektora prędkości od prędkości toczenia.

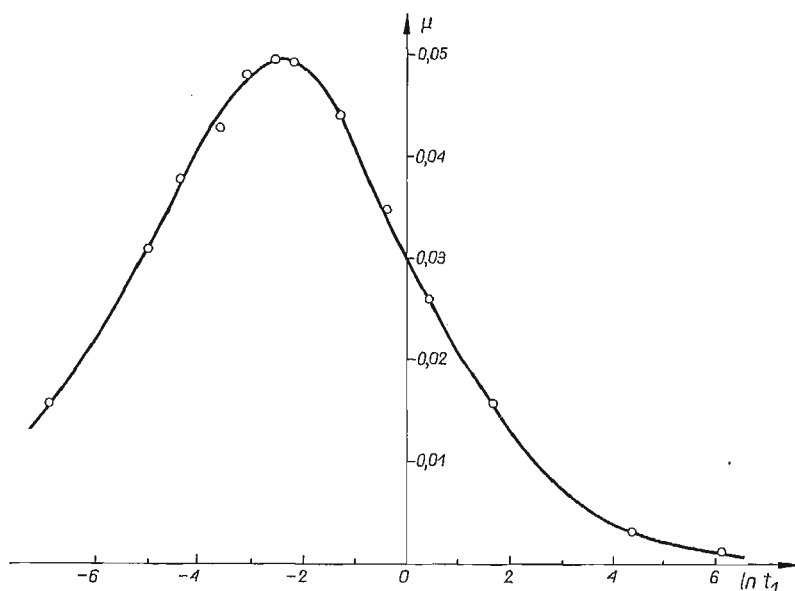
### 3. Dyskusja otrzymanych rezultatów

Zespół zagadnień dotyczących toczenia sztywnej kuli po podłożu lepkosprężystym, a więc oporu przy toczeniu, wielkości i kształtu obszaru styku, kształtu powierzchni podłoża w otoczeniu obszaru styku w zależności od nacisku normalnego, promienia kuli, prędkości ruchu i własności mechanicznych podłoża nie został dotychczas rozwiązany ściśle w ramach teorii lepkosprężystości. Główną trudność stanowi niezajomość kształtu obszaru styku [20]. Prace teoretyczne [7,10], podające przybliżone teorie toczenia kuli, zastępują półprzestrzeń lepkosprężystą układem pionowych słupków od siebie niezależnych. Pomijają one zatem naprężenia ścinające w podłożu; pomijają też opory bezwładności ośrodka i siły adhezji. Rezultaty otrzymane w tych pracach ograniczają się do podłoży reprezentowanych prostymi, «liniowymi» modelami reologicznymi.

Żadna z badanych przez nas żywic nie miała widm złożonych z jednej lub kilku linii, lecz widma ciągłe obejmujące kilkanaście (9–15) rzędów  $e^n$ . Nie mamy zatem możliwości prawidłowego porównania wyników eksperymentu z teorią, nawet przybliżoną. Autorzy pracy [9] sugerują, że «pomiar tarcia tocznego lub ślizgowego w dużym zakresie prędkości dają wprost pierwsze przybliżenie rozkładów czasów relaksacji». Autorzy pracy [10] stwierdzają, że pomiar oporu przy toczeniu lub ślizganiu ze smarem mógłby być szybką metodą określania stratności  $\tan \delta$  materiałów lepkosprężystych.

Porównując wykres na rys. 11 przedstawiający zależność współczynnika oporu przy toczeniu z wykresami widm czasów opóźnienia (rys. 6) i relaksacji (rys. 9) można dostrzec podobieństwo przebiegów funkcyjnych na rys. 11 do rys. 9. Krzywe na rys. 11 przebiegają bardziej płasko; być może, że ta zmiana kształtu jest spowodowana adhezją kuli do podłoża i faktem, że naciski jednostkowe w obszarze styku znacznie przekraczały naciski, dla których stwierdzono liniowe zachowanie się żywicy i opracowane widma. Jest też rzeczą bardzo prawdopodobną, że «widma» otrzymane przy rozciąganiu próbek mają inny przebieg niż widma uzyskiwane przy ich ściskaniu. Aby z otrzymanej doświadczalnie krzywej  $\mu = \mu(\ln v)$  wnioskować o widmie czasów relaksacji, należałoby przyporządkować każdej wartości  $v$  — odpowiednie  $\tau$ , a przynajmniej wartości  $v$ , dla której ma miejsce maksimum oporu — wartości  $\tau_2$ , dla której zachodzi maksimum w widmie czasów relaksacji. Należy zaznaczyć, że  $t_1$ , czas trwania eksperymentu, decyduje o zachowaniu się materiału w tym

znaczeniu, że dla  $t_1$  krótszego od najkrótszych czasów  $\tau$  zawartych w widmie czasów relaksacji, materiał zachowuje się jak sprężyste ciało stałe; dla czasów  $t_1$  większych od najdłuższych czasów w widmie — jak ciecz. Dla czasów  $t_1$  porównywalnych z czasami relaksacji, dla których widmo posiada znaczne «natężenie», materiał zdradza najwyraźniej właściwości lepkospężyste. W naszym przypadku «czasem eksperymentu»  $t_1$  jest czas przejścia kuli ponad danym punktem podłoża (czas styku), zatem  $t_1 = 2a/v$ , gdzie  $2a$  jest średnicą obszaru styku równoległą do wektora prędkości. Maksimum oporu dla P52 przypada na  $v = 1,28$  cm/sek; dla tej prędkości średnica obszaru styku  $2a = 0,10$  cm (patrz rys. 13); zatem  $t_1 = \frac{0,10 \text{ cm}}{1,28 \text{ cm/sek}} = 7,8 \cdot 10^{-2}$  sek.; istotnie maksimum w widmie czasów relaksacji przypada na  $7 \cdot 10^{-2}$  sek, co należy uważać za bardzo dobrą zgodność, spowodowaną być może tylko jednym ostrym maksimum w widmie. Jeżeli teraz przedstawimy współczynnik oporu przy toczeniu jako funkcję logarytmu czasu styku  $t_1$ , otrzymamy wykres (rys. 15) posiadający przebieg podobny do widma czasów relaksacji, przy czym maksimum przypada



Rys. 15. Wykres zależności współczynnika oporu przy toczeniu kuli od czasu styku  $t_1$ .  
Materiał żywica epoksydowa P 52,  $N = 920$  G,  $R = 0,90$  cm

na  $t_1 = \tau_2$ . Metoda otrzymywania widm czasów relaksacji z obserwacji oporu przy toczeniu wymagałaby zatem dodatkowo pomiaru średnicy obszaru styku, co jest rzeczą żmudną, a dla żywic nieprzezroczystych (jak np. Polimal 152) opisaną tu techniką niewykonalną. Na koniec uczyniono próbę konfrontacji doświadczeń z teorią przedstawioną w pracy [10]. Autorzy rozważają tu podłoże reprezentowane modelem Voigta.

Jakkolwiek żadna z żywic tu opisanych nie może być reprezentowana modelem Voigta (obie żywice mają sprężystość natychmiastową; widma czasów opóźnienia w pierwszym przybliżeniu rozciągają się na szereg rzędów  $e^n$ ), to jednak wiedząc, że dalsze przybliżenia czynią maksima w widmie bardziej ostrymi, uczyniono próbę sprawdzenia podanych przez

autorów relacji  $\mu = \mu(v)$  zastępując widmo ciągłe jedną linią, odpowiadającą maksimum w widmie czasów opóźnienia. Jak należało oczekiwać, zarówno wartość prędkości, na którą przypada maksimum oporu, jak też i wartości  $\mu$  dla małych (rzędu  $10^{-3}$  cm/sek) i dużych (rzędu  $10^2$  cm/sek) prędkości odbiegają od przewidzianych przez teorię wartości.

Tak np. dla żywicy P52, przy  $N = 920$  G,  $R = 0,90$  cm, maksimum  $\mu$  zachodziło dla  $v = 1,29$  cm/sek, z teorii zaś wynika  $v = 0,025$  cm/sek. Podobnie zmierzona wartość współczynnika oporu dla  $v = 10^{-3}$  cm/sek wynosi  $\mu_{\text{obs}} = 0,002$ ,  $\mu_{\text{obl}} = 0,009$ ; Dla  $v = 50$  cm/sek,  $\mu_{\text{obs}} = 0,026$ ,  $\mu_{\text{obl}} = 0,06$ .

W końcu dyskusji należy uznać, że związek oporu przy toczeniu sztywnej kuli z własnościami lepkosprężystymi podłoża scharakteryzowanego widmami czasów relaksacji lub opóźnienia nie jest prosty; opracowanie nawet przybliżonej teorii tego procesu dla dowolnego przebiegu widma czasów relaksacji mogłoby dać podstawę do doświadczalnego wyznaczania widm w oparciu o krzywą zależności oporu od prędkości przy minimalizacji oddziaływań czysto powierzchniowych.

#### Literatura cytowana w tekście

1. O. REYNOLDS, Phil. Trans. Roy. Soc. **166**, 155, 1876.
2. H. L. HEATHCOTE, Proc. Inst. Auto-Engers **15**, 569, 1921.
3. K. L. JOHNSON, Proc. Roy. Soc. A. **230**, 531, 1955.
4. H. B. UFLER, Ingr. Arch. **27**, 137, 1959.
5. K. L. JOHNSON, J. Appl. Mech. **80**, 339, 1958.
6. J. HALLING, J. Mech. Eng. Soc. **6**, 64, 1964.
7. S. ZIEMBA, Biuletyn W.A.T. **3**, 1955.
8. D. TABOR, Proc. Roy. Soc. A. **229**, 189, 1954.
9. W. D. MAY, F. L. MORRIS, D. ATACK, J. of Appl. Phys. **30**, 11, 1713, 1959.
10. D. G. FLOM, A. M. BUECHE, J. of Appl. Phys. **30**, 1725, 1959.
11. D. BULGIN, G. D. HUBBARD, Trans. Inst. Rubber Ind. **34**, 201, 1958.
12. D. G. FLOM, J. of Appl. Phys. **31**, 306, 1960.
13. S. C. HUNTER, J. of Appl. Mech. **28**, 611, 1961.
14. D. G. FLOM, J. of Appl. Phys. **32**, 1426, 1961.
15. L. W. MORLAND, J. of Appl. Mech. **29**, 345, 1962.
16. R. H. NORMAN, Brit. J. of Appl. Phys. **13**, 358, 1962.
17. D. G. FLOM, Proc. Symposium: Rolling Contact Phenom, s. 97, 1962.
18. J. A. GREENWOD, H. MINSHALL, D. TABOR, Proc. Roy. Soc. A. **259**, 480, 1961.
19. A. J. STAVERMANN, F. SCHWARTZL, Die Phys. d. Hochpolymeren; V. 4. 44, Springer, Berlin, 1956.
20. G. A. C. GRAHAM, *Contact Problems in the Linear Theory of Visco-elasticity*. North Carolin State Univer. at Raleigh Sept. 10, 1965.
21. R. C. DRUTOWSKI, Annual Meeting A.S.M.E. N. 4, 1958.

#### Резюме

#### О СОПРОТИВЛЕНИИ ПРИ КАЧЕНИИ ЖЕСТКОГО ШАРА ПО ВЯЗКО-УПРУГОМУ ОСНОВАНИЮ

Представленная экспериментальная работа состоит из трех частей.

В первой описаны результаты исследования вязко-упругих свойств ряда смол, для которых характерно большое упругое последствие и малый модуль упругости. На основе наблюдений над ползучестью и релаксацией напряжений в растянутом стержне, получены спектры времен ретардации и спектры времен релаксации.

Во второй части приведены результаты замеров сопротивлений движению при качении стального шара по пластинкам из указанных смол и зависимости этих сопротивлений от скорости движения. Зона контакта шара с основанием фотографировалась при разных скоростях движения.

В третьей части дана кривая зависимости коэффициента сопротивления при качении от „времени контакта” (равного диаметру области контакта в направлении движения деленному на скорость движения).

Ход этой кривой напоминает спектр времен релаксации для материала, из которого выполнено основание. Максимумы обеих кривых соответствуют одному и тому же времени.

### S u m m a r y

#### ON THE ROLLING RESISTANCE OF A RIGID BALL MOVING ON THE VISCO-ELASTIC BASE

The presented experimental work consists of 3 parts. In part I the visco-elastic properties of some resins of considerable retardation times and low elastic moduli were investigated. From the creep and relaxation measurements the retardation and relaxation spectra were obtained.

In the second part, the resistance of rolling of the steel ball on the samples made of the investigated resins was measured. The effect of speed on the resistance force was observed and the photographs of contact area at various speeds were taken.

Part III contains the plot of rolling resistance coefficient vs. „time of contact”  $t_1$ ,

$$t_1 = \frac{\text{contact diameter parallel to the velocity}}{\text{velocity}} .$$

This curve has a shape similar to the relaxation spectrum: the maxima on both the curves appearing at the same time.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA  
KATEDRA FIZYKI

*Praca została złożona w Redakcji dnia 6 maja 1966 r.*