

METODA CHARAKTERYSTYK DLA DWUWYMIAROWYCH
NIEUSTALONYCH PRZEPIŹYWÓW GAZU

ZBYSZKO KAZIMIERSKI (ŁÓDŹ)

1. Wstępi

W artykule przedstawiono rozważania dotyczące metody charakterystyk zastosowanej do układu nieliniowych równań dynamiki gazów, opisujących dwuwymiarowe, nieustalone, niepotencjalne przepływy. Celem artykułu jest wykonanie pewnej części pracy przygotowawczej przed przystąpieniem do numerycznych obliczeń dwuwymiarowych nieustalonych przepływów gazu. Z tego powodu położono nacisk na opis geometryczny powierzchni charakterystycznych i analizę związków charakterystycznych pomiędzy funkcjami określającymi stan gazu na tych powierzchniach. Związki charakterystyczne wyprowadzono w postaci dogodnej do bezpośredniego przedstawiania ich jako równania różnicowe na dowolnej płaszczyźnie charakterystycznej. Wyprowadzono również związki charakterystyczne napisane tylko dla kierunku bicharakterystyk.

Rozpatrzenie przypadku trójwymiarowego (dwie zmienne przestrzenne i czas) zostało podyktowane chęcią nadania poszczególnym rozmaitościom matematycznym pogładowej interpretacji geometrycznej, co jest niemożliwe w przypadkach czterowymiarowych.

Artykuł nawiązuje do ujęć metody charakterystyk spotykanych w publikacjach [1, 2, 3] zawiera rozwinięcie niektórych problemów związanych z tą metodą.

2. Układ równań różniczkowych

Rozpatrujemy dowolny punkt P wewnątrz nieustalonego dwuwymiarowego przepływu gazu. Przepływ w tym punkcie opisujemy w układzie kartezjańskim o współrzędnych $x_1 \equiv x$, $x_2 \equiv y$, $x_3 \equiv t$. Początek układu umieszczony jest w punkcie P . Współrzędne x_1 i x_2 nazywamy współrzędnymi przestrzennymi, a płaszczyznę $x_1 x_2$ «przestrzenią». Natomiast x_3 jest współrzędną czasową. Bazę układu $x_1 x_2 x_3$ oznaczmy $\{e_1(1, 0, 0), e_2(0, 1, 0), e_3(0, 0, 1)\}$. Stan gazu w każdym punkcie przepływu określają cztery skalarne funkcje współrzędnych. Są to: dwie składowe prędkości v_1 i v_2 , ciśnienie p i gęstość ρ . Lokalną prędkość dźwięku oznaczmy przez a . Wymienione funkcje są bezwymiarowe, ponieważ prędkości określamy w stosunku do pewnej wybranej prędkości dźwięku a_0 , ciśnienie w stosunku do $a_0^2 \rho_0$ i gęstość do ρ_0 . Ogólnie funkcje te oznaczmy przez $u_j = u_j(x_1, x_2, x_3)$; ($j = 1, 2, 3, 4$) i przyporządkujemy

$$u_1 \equiv v_1, \quad u_2 \equiv v_2, \quad u_3 \equiv p, \quad u_4 \equiv \rho.$$

Zdefiniujemy poza tym przestrzenno-czasowy wektor prędkości $\mathbf{V}(v_1, v_2, 1)$, który posiada składową przestrzenną $\mathbf{v}(v_1, v_2)$ oraz przestrzenno-czasowy gradient funkcji u_j :

$$\nabla u_j \equiv \sum_{k=1}^3 \mathbf{e}_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k}, \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

Układ równań dynamiki gazów dla rozpatrywanego przepływu w opisanych współrzędnych można wyrazić w postaci sum iloczynów skalarnych

$$(2.1) \quad \sum_{j=1}^4 \mathbf{a}_{i,j} \cdot \nabla u_j = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Trójwymiarowe wektory $\mathbf{a}_{i,j}(a_{i,j,1}, a_{i,j,2}, a_{i,j,3})$ można przedstawić w postaci macierzy

$$(2.2) \quad \mathbf{a}_{i,j} \equiv \begin{bmatrix} \rho \mathbf{V} & 0 & \mathbf{e}_1 & 0 \\ 0 & \rho \mathbf{V} & \mathbf{e}_2 & 0 \\ a^2 \rho \mathbf{e}_1 & a^2 \rho \mathbf{e}_2 & \mathbf{V} & 0 \\ 0 & 0 & -\mathbf{V} & a^2 \mathbf{V} \end{bmatrix}.$$

Pierwsze dwa wiersze (2.2) pochodzą z równań zachowania pędu, trzeci z zachowania masy, a czwarty entropii.

Jest zatem dany jednorodny układ czterech quasi-liniowych równań różniczkowych potrzebny do określenia czterech funkcji niewiadomych u_j .

Wyrażenie typu $\mathbf{c} \cdot \nabla u$ (funkcja u ma różniczkę zupełną) można przedstawiać w postaci

$$d_{\mathbf{c}} u = \mathbf{c} \cdot \nabla u$$

znanego pod nazwą pochodnej kierunkowej.

3. Równanie i związki charakterystyczne

Rozpatrzmy kombinację liniową równań (2.1)

$$(3.1) \quad \sum_{j=1}^4 \mathbf{W}_j \cdot \nabla u_j = 0,$$

gdzie wektory \mathbf{W}_j dla $j = 1, 2, 3, 4$ są przedstawione również jako kombinacje liniowe wektorów $\mathbf{a}_{i,j}$

$$(3.2) \quad \mathbf{W}_j = \sum_{i=1}^4 \alpha_i \mathbf{a}_{i,j}.$$

Liczby α_i występujące w (3.2) są rzeczywiste i nie znikają jednocześnie.

Żądamy, aby wszystkie wektory \mathbf{W}_j leżały w jednej płaszczyźnie. Ustanowimy wektor $\mathbf{N}(N_1, N_2, N_3)$ zawsze różny od zera, normalny do tej płaszczyzny, którą nazwano płaszczyzną charakterystyczną $\pi_{\mathbf{N}}$. Składowa przestrzenna \mathbf{N} jest oznaczona przez $\mathbf{n}(N_1, N_2)$.

Powyższe żądanie koplanarności \mathbf{W}_j zapisać można jako układ równań $\mathbf{W}_j \cdot \mathbf{N} = 0$ dla $j = 1, 2, 3, 4$ czyli

$$(3.3) \quad \sum_{i=1}^4 \alpha_i (\mathbf{a}_{i,j} \cdot \mathbf{N}) = 0, \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

Układ (3.3) służy do obliczenia współczynników α_i i ma rozwiązanie, o ile jego wyznacznik charakterystyczny jest równy zeru

$$(3.4) \quad \det[\mathbf{a}_{i,j} \cdot \mathbf{N}] = 0, \quad i, j = 1, 2, 3, 4.$$

Równanie (3.4) nazywamy równaniem charakterystycznym układu (2.1). Jeśli w oparciu o (2.2) obliczymy (3.4), to otrzymamy

$$(3.5) \quad a^2 \varrho^2 (\mathbf{V} \cdot \mathbf{N})^2 [(\mathbf{V} \cdot \mathbf{N})^2 - a^2 (N_1^2 + N_2^2)] = 0.$$

Z (3.5) wynika, że \mathbf{n} nie może nigdy zniknąć, bo prowadzi to do sprzeczności z założoną niezerowością \mathbf{N} . Okazuje się więc, że

$$(3.6) \quad (\mathbf{V} \cdot \mathbf{N})^2 - a^2 n^2 = 0,$$

$$(3.7) \quad (\mathbf{V} \cdot \bar{\mathbf{N}})^2 = 0$$

nie mogą być spełnione równocześnie, czyli opisują w rozpatrywanym punkcie P dwie rodziny wektorów normalnych oznaczone jako \mathbf{N} i $\bar{\mathbf{N}}$.

Długość wektorów \mathbf{N} i $\bar{\mathbf{N}}$ określimy normując ich składowe przestrzenne, czyli zakładając

$$(3.8) \quad |\mathbf{n}| = 1, \quad |\bar{\mathbf{n}}| = 1,$$

co można zrobić, ponieważ nigdy nie są one zerowe.

Zbadaniem rodzin wektorów \mathbf{N} i $\bar{\mathbf{N}}$ zajmiemy się w następnym punkcie sygnalizując w tym miejscu, że obowiązujące na płaszczyznach charakterystycznych $\pi_{\mathbf{N}}$ i $\pi_{\bar{\mathbf{N}}}$ wyznaczonych przez wektory \mathbf{N} i $\bar{\mathbf{N}}$ związki (3.1) nazywają się związkami charakterystycznymi.

4. Rozważania geometryczne

W tym punkcie zostaną omówione powierzchnie utworzone przez wektory \mathbf{N} i $\bar{\mathbf{N}}$, płaszczyzny $\pi_{\mathbf{N}}$ i $\pi_{\bar{\mathbf{N}}}$ oraz powierzchnie obwiednie tych płaszczyzn.

4.1. Stożek normalnych \mathbf{N} i stożek charakterystyczny. Rozpatrywany punkt przepływu P ustanawiamy punktem początkowym wszystkich wektorów \mathbf{N} z równania (3.6), które po wykorzystaniu (3.8) piszemy w postaci

$$(4.1) \quad \mathbf{V} \cdot \mathbf{N} = a.$$

Rodzina wektorów \mathbf{N} wyrażona przez (4.1) tworzy zatem powierzchnię stożkową o wierzchołku w P . Kierownicą stożka i jednocześnie miejscem geometrycznym końców wektorów \mathbf{N} jest elipsa E . Elipsę E otrzymamy z przecięcia powierzchni bocznej walca kołowego o podstawie $|\mathbf{n}| = 1$ (rys. 1), na której leżą końce \mathbf{N} , płaszczyzną

$$(4.2) \quad \mathbf{V} \cdot (\mathbf{N} - \mathbf{N}_0) = 0,$$

na której również jak wynika z (4.1) muszą leżeć końce \mathbf{N} . Wektor \mathbf{N}_0 jest dowolnie wybranym wektorem spośród wszystkich \mathbf{N} określonych przez (4.1). Płaszczyzna (4.2) jest prostopadła do \mathbf{V} . Opisany przez (4.1) stożek wektorów \mathbf{N} nazwiemy stożkiem normalnych.

Przecięcie (3.8) z (4.2) dla rozpatrywanego przepływu istnieje zawsze. Równanie (4.1) ma zawsze rozwiązanie ze względu na czasową składową N

$$(4.3) \quad N_3 = a - (v_1 N_1 + v_2 N_2) = a - \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$$

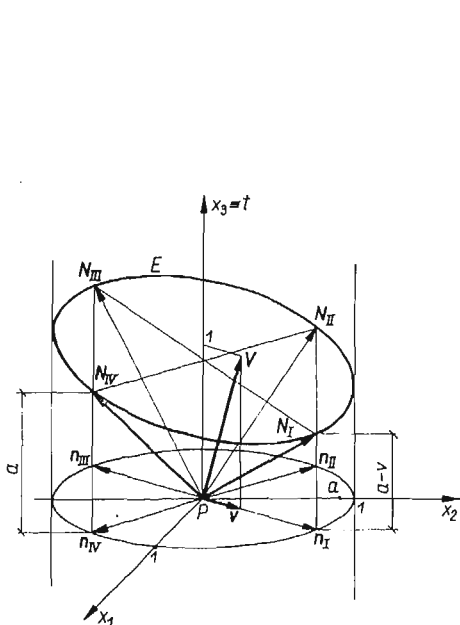
Wśród kierunków \mathbf{n} z okręgu $|\mathbf{n}| = 1$ na płaszczyźnie x_1x_2 wyróżnić należy ze względu na wartość iloczynu $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ cztery kierunki (wg oznaczeń na rys. 1):

$$\mathbf{n}_I \text{ i } \mathbf{n}_{III}; \quad \mathbf{n}_I = -\mathbf{n}_{III}, \text{ dla których } \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = \pm v$$

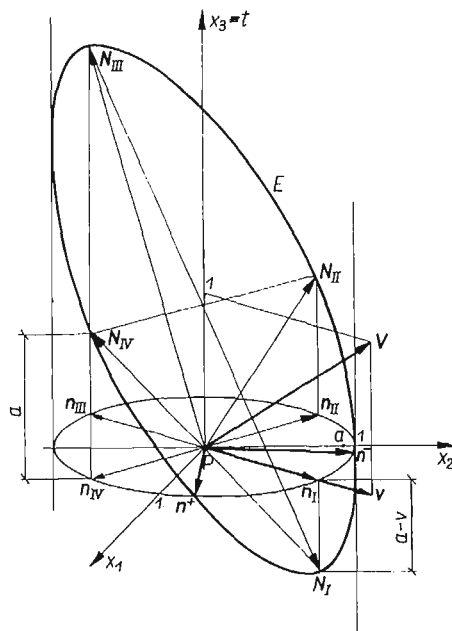
oraz

$$\mathbf{n}_{II} \text{ i } \mathbf{n}_{IV}; \quad \mathbf{n}_{II} = -\mathbf{n}_{IV}, \text{ dla których } \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0.$$

Średnice koła $|\mathbf{n}| = 1$ wyróżnione przez wektory \mathbf{n}_I i \mathbf{n}_{II} są rzutami osi głównych elipsy E . Krótsza z osi jest równoległa do płaszczyzny x_1x_2 i jej odległość od x_1x_2 według (4.3) jest zawsze równa N_3 dla $\mathbf{n} = \mathbf{n}_{II}$ czyli lokalnej prędkości dźwięku a . Jako dodatkowe wyjaśnienie



Rys. 1



Rys. 2

nie podać należy, że rysunki zrobione są dla założenia, że prędkość dźwięku odniesienia a_0 , do której redukowane są wszystkie prędkości, w tym lokalna prędkość dźwięku, jest maksymalną spośród lokalnych prędkości dźwięku dowolnie dużego otoczenia punktu P . Wynika stąd, że na rysunkach zawsze $a \leq 1$. Rysunki 1 i 2 przedstawiają stożki normalnych. Rysunek 1 wykonany jest dla przepływu poddźwiękowego w punkcie P , a rys. 2 dla przepływu naddźwiękowego.

Ze wzoru (4.3) wynika, że dla

$$(4.4) \quad \mathbf{n} = \mathbf{n}_I; \quad N_3 \geq 0 \quad \text{gdy} \quad \begin{cases} a > |v| \\ a = |v|, \\ a < |v|. \end{cases}$$

Oznacza to, że dla prędkości poddźwiękowych stożek (4.1) leży całkowicie ponad «prze-strzeżeniem» x_1x_2 , dla dźwiękowych jest do niej styczny wzdłuż linii wyznaczonej przez \mathbf{n}_I , a dla prędkości naddźwiękowych przecina x_1x_2 dając w przecięciu dwa kierunki pokazane

na rys. 2 i oznaczone przez \mathbf{n}^+ i \mathbf{n}^- . Inaczej mówiąc równanie (4.1) dla przepływu ustalono-
nego, gdy $\mathbf{V} = \mathbf{v}$, ma rozwiązanie tylko dla $|\mathbf{v}| > a$ i rozwiązaniem są kierunki \mathbf{n}^+ i \mathbf{n}^- .

Każdy wektor \mathbf{N} z równania (3.6), czyli każdy wektor wzięty z powierzchni tworzącej stożka (4.1) wyznacza w czasoprzestrzeni $x_1x_2x_3$ prostopadłą do niego płaszczyznę charakterystyczną $\pi_{\mathbf{N}}$. Płaszczyzny charakterystyczne wyznaczone przez wektory \mathbf{N} nazwiemy płaszczyznami falowymi. Zbiór wszystkich płaszczyzn $\pi_{\mathbf{N}}$ przechodzących przez punkt P ma powierzchnię obwiednią będącą podobnie jak (4.1) powierzchnią stożkową. Można uważać, że powierzchnia ta jest utworzona z wektorów \mathbf{B} , z których każdy wyznacza styczną między płaszczyzną $\pi_{\mathbf{N}}$ przyporządkowaną danemu \mathbf{N} , a powierzchnią obwiednią wszystkich $\pi_{\mathbf{N}}$. Rodzinę wektorów \mathbf{B} można wyznaczyć z dokładnością do stałego niezerowego mnożnika μ stosując znany w teorii obwiedni wzór

$$(4.5) \quad B_k = \mu \frac{\partial}{\partial N_k} [(\mathbf{V} \cdot \mathbf{N})^2 - a^2 \mathbf{n}^2], \quad k = 1, 2, 3.$$

Po obliczeniu (4.5) otrzymamy

$$(4.6) \quad \begin{aligned} B_1 &= 2\mu[v_1(\mathbf{V} \cdot \mathbf{N}) - a^2 N_1], \\ B_2 &= 2\mu[v_2(\mathbf{V} \cdot \mathbf{N}) - a^2 N_2], \\ B_3 &= 2\mu(\mathbf{V} \cdot \mathbf{N}). \end{aligned}$$

Uwzględniając w (4.6) związek (4.1) stwierdzamy, że B_3 zawsze jest różne od zera i możemy dzieląc obustronnie składowe B_k ($k = 1, 2, 3$) przez B_3 określić wektor \mathbf{B} następująco

$$(4.7) \quad \frac{\mathbf{B}}{B_3} = \mathbf{V} - a\mathbf{n}.$$

Rodzina wektorów \mathbf{B} tworzy znany stożek charakterystyczny przedstawiający lokalną prędkość rozchodzenia się małego zaburzenia w punkcie P .

Składowe tej prędkości są równe

$$(4.8) \quad \frac{B_1}{B_3} = v_1 - aN_1, \quad \frac{B_2}{B_3} = v_2 - aN_2.$$

Rysunek 3 pokazuje stożek (4.7).

Powierzchnię charakterystyczną w otoczeniu punktu P zdefiniować można jako powierzchnię, która jest w dowolnym swym punkcie prostopadła do wektora \mathbf{N} będącego jedną z tworzących stożka (4.1) zbudowanego w tym punkcie.

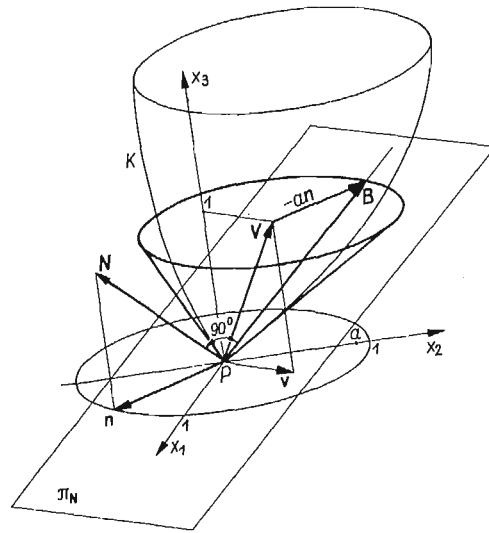
Rozpatrzmy dowolną powierzchnię charakterystyczną przechodzącą przez P . W każdym punkcie tej powierzchni w otoczeniu P można znaleźć wektor \mathbf{B} , który będzie określał styczną między rozpatrywaną powierzchnią i stożkiem charakterystycznym (4.7), utworzonym w tym punkcie. Wobec tego przez dowolny punkt wymienionej powierzchni charakterystycznej można poprowadzić linię pola wektorowego wektorów \mathbf{B} . Te linie nazywamy bicharakterystykami układu równań (2.1) dla rozwiązania $u_j(x_1, x_2, x_3)$, $j = 1, 2, 3, 4$.

Przez wybrany punkt P można z uwagi na istnienie w nim jednego stożka (4.1) i zdefiniowane wyżej pojęcie powierzchni charakterystycznej poprowadzić nieskończenie wiele

bicharakterystyk, które utworzą jedną powierzchnię charakterystyczną, zwaną konoidą charakterystyczną. Konoida charakterystyczna w punkcie P jest prostopadła do stożka normalnych (4.1) i styczna do stożka charakterystycznego (4.7). Wektory \mathbf{B} z powierzchni bocznej stożka (4.7) wskazują kierunki bicharakterystyk poprowadzonych przez P .

Stożek (4.7) jak już wspomniano pokazuje lokalną prędkość rozchodzenia się małego zaburzenia w punkcie P , natomiast konoida charakterystyczna jest w układzie współrzędnych x_1, x_2, x_3 obrazem rozchodzenia się małego zaburzenia w otoczeniu tego punktu, gdzie panują niejednorodne pola parametrów określających stan gazu.

Z uwagi na powyżej wymieniony sens fizyczny i geometryczny stożek charakterystyczny (4.7) można nazwać również stożkiem falowym lub stożkiem kierunków bicharakterystyk.



Rys. 3

Kierunkiem normalnym do czoła fali rozchodzącego się małego zaburzenia w P , jak to wynika z (4.7), jest kierunek \mathbf{n} .

Prędkość rozchodzenia się zaburzenia w kierunku \mathbf{n} jest równa

$$(4.9) \quad B_n \equiv \frac{\mathbf{B}}{B_3} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} - a.$$

Porównując to z (4.3) wyciągamy wniosek

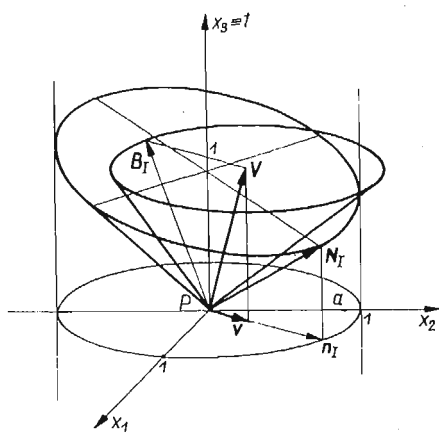
$$(4.10) \quad B_n = -N_3,$$

co objaśnia sens fizyczny składowej czasowej wektorów normalnych \mathbf{N} .

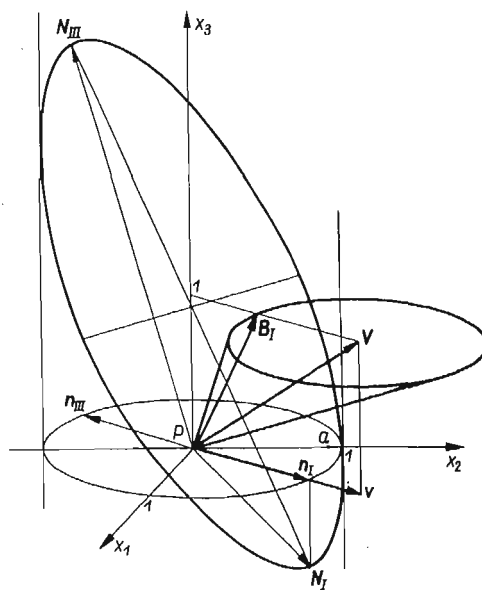
Porównanie stożków normalnych i stożków kierunków bicharakterystyk dla przepływu poddźwiękowego i nadźwiękowego pokazano na rys. 4 i 5.

Wzajemna ortogonalność stożków, czyli spełnienie $\mathbf{B} \cdot \mathbf{N} = 0$ dla każdego \mathbf{n} nie zależy od wybranej skali prędkości, czyli od ustanowionych proporcji a/a_0 . Zależy od niej nato-

miast wzajemne położenie stożków przy prędkościach poddźwiękowych i naddźwiękowych. Rysunki 4 i 5 wykonano jak i wszystkie pozostałe dla założenia $a \leq a_0$, czyli $a \leq 1$. Wtedy dla prędkości poddźwiękowych stożek (4.7) mieści się w stożku (4.1), a nałoży się na niego, gdy $a = a_0$ i $|v| \rightarrow 0$. Wraz ze wzrostem $|v|$ do prędkości naddźwiękowych stożek (4.7) «wychyla» się coraz bardziej ze stożka normalnych i dla przepływów hiperdźwiękowych stożek normalnych zbliża się do płaszczyzny (4.2), a stożek falowy otacza «coraz ciaśniej» kierunek \mathbf{V} .



Rys. 4



Rys. 5

Gdyby wybrano tak a_0 , że mogłoby być $a > a_0$, przy prędkościach poddźwiękowych stożek falowy mógłby obejmować stożek normalnych. Przy wzroście prędkości $|v|$ do ponaddźwiękowych usytuowanie stożków byłoby takie samo jak na rys. 5.

4.2. Płaszczyzna wektorów normalnych $\bar{\mathbf{N}}$ i kierunek toru cząstki \mathbf{V} . Rodzinę wektorów $\bar{\mathbf{N}}$ przedstawia równanie (3.7). Jest to mnożony dwukrotnie związek

$$(4.11) \quad \mathbf{V} \cdot \bar{\mathbf{N}} = 0.$$

Wektor $\bar{\mathbf{N}}$ jest zawsze prostopadły do kierunku \mathbf{V} , leży więc w płaszczyźnie prostopadłej do \mathbf{V} . Początki wektorów $\bar{\mathbf{N}}$ leżą w punkcie P , końce natomiast na elipsie \bar{E} powstałej z przecięcia walca jednostkowego $|\bar{\mathbf{n}}| = 1$ płaszczyzną (4.11).

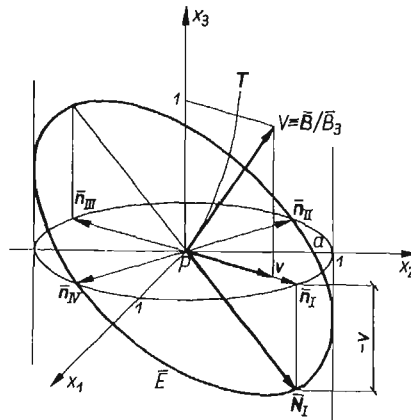
Z (4.11) wynika, że $\bar{N}_3 = -\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$. W takim razie $-\bar{N}_3$ jest rzutem prędkości przemieszczania się cząstki (w sensie cząstki ośrodka ciągłego) na wybrany przez $\bar{\mathbf{n}}$ kierunek na płaszczyźnie $x_1 x_2$. Rodzina wektorów $\bar{\mathbf{N}}$ wyznacza prostopadłe do nich płaszczyzny $\pi_{\bar{\mathbf{N}}}$, które będziemy nazywać płaszczyznami toru. Płaszczyzny $\pi_{\bar{\mathbf{N}}}$ mają obwiednię, która degeneruje się do jednej prostej — prostej wyznaczającej kierunek toru w punkcie P , czyli

$$(4.12) \quad \bar{\mathbf{B}} = \mu \mathbf{V};$$

$\bar{\mathbf{B}}$ jest styczną do krzywej opisującej tor cząstki T w punkcie P jak na rys. 6. Porównując

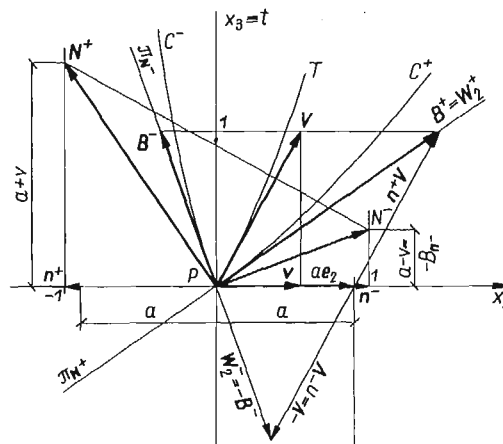
składowe wektorów prawej i lewej strony równości (4.12) można wobec niezerowości μ napisać

$$(4.13) \quad \frac{\bar{\mathbf{B}}}{\bar{B}_3} = \mathbf{V}.$$



Rys. 6

4.3. Charakterystyki przepływów opisanych w przestrzeni dwóch zmiennych niezależnych. Przepływ jednowymiarowy nieustalony. Zakładamy, że funkcje opisujące stan gazu w P i otoczeniu zależą tylko od x_2 i x_3 . Rozpatrujemy więc jednowymiarowy nieustalony przepływ. Oś x_2 jest skierowana zgodnie z \mathbf{v} . Każdy przekrój płaszczyzną $x_1 = \text{const}$ daje jednakowe ślady stożków charakterystycznych.



$$\begin{aligned} W_2^+ &= \alpha e_2 - n^+ v = \alpha e_2 + v = B^+ \\ W_2^- &= \alpha e_2 - n^- v = \alpha e_2 - v = -B^- \end{aligned}$$

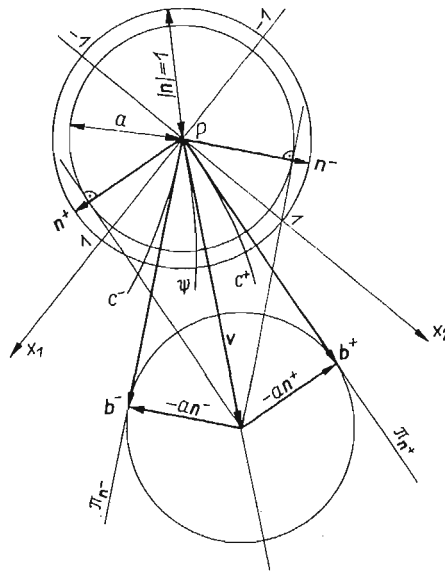
Rys. 7

Przekrój stożka normalnych wyznacza dwa wektory \mathbf{N} oznaczone przez N^+ i N^- na rys. 7. Oznaczenie to nawiązuje do wzoru (4.9), który objaśnia sens fizyczny wektorów \mathbf{N} , a właściwie składowej czasowej tych wektorów.

Ślady płaszczyzn falowych π_{N^+} i π_{N^-} są prostymi prostopadłymi do N^+ i N^- i pokrywają się ze śladami przekroju stożka kierunków bicharakterystyk czyli z kierunkami B^+ i B^- .

Przekrój konoidu K daje dwie linie charakterystyk oznaczone przez C^+ i C^- .

Płaski ustalony przepływ naddźwiękowy. Zakładamy, że funkcje opisujące stan gazu w P i otoczeniu zależą tylko od x_1 i x_2 . Przepływ jest ustalony $V = v$. Jak pokazano w p. 4.1. przecięcie stożka normalnych z płaszczyzną x_1x_2 czyli rozwiązanie równania $v \cdot n = a$ istnieje tylko dla przepływów naddźwiękowych. Ślady przecięcia stożka normalnych płaszczyzną x_1x_2 lub inaczej rozwiązanie równania $v \cdot n = a$ oznaczono przez n^+ i n^- na rys. 2 i na rys. 8.



Rys. 8

Ślady płaszczyzn falowych π_{n^+} i π_{n^-} są na rys. 8 liniami prostymi prostopadłymi odpowiednio do n^+ i n^- .

Proste π_{n^+} i π_{n^-} pokrywają się, jak widać na rys. 8, z rzutami na x_1x_2 kierunków bicharakterystyk określonych równaniami

$$B^+ = V - an^+, \quad B^- = V - an^-,$$

rzuty są oczywiście równe

$$(4.14) \quad b^+ = v - an^+, \quad b^- = v - an^-.$$

Związki (4.14) wyznaczają w punkcie P kierunki dwóch charakterystyk na płaszczyźnie x_1x_2 . Charakterystyki oznaczone przez C^+ i C^- określają zakres oddziaływania drobnego zaburzenia wywołanego w P w naddźwiękowym płaskim ustalonym przepływie. C^+ i C^- są rzutami na x_1x_2 bicharakterystyk wyróżnionych wektorami B^+ i B^- .

5. Związki charakterystyczne

Związek charakterystyczny (1.3) jest kombinacją liniową równań tworzących układ równań wyjściowych. Związek (2.3) mówi o tym, że suma iloczynów skalarnych gradientów funkcji u_j , określających stan gazu przez wektory \mathbf{W}_j , jest równa zeru. Wektory \mathbf{W}_j leżą w jednej płaszczyźnie — może to być płaszczyzna falowa π_N ze zbioru płaszczyzn określanych rodziną wektorów \mathbf{N} lub płaszczyzna toru $\pi_{\bar{\mathbf{N}}}$ ze zbioru płaszczyzn wyznaczonych przez rodzinę wektorów $\bar{\mathbf{N}}$. Związki charakterystyczne dla płaszczyzn falowych i związki dla płaszczyzn toru nie są jednakowe. Rozpatrzmy je kolejno.

5.1. Związki charakterystyczne na płaszczyznach falowych. Macierz współczynników do układu równań liniowych (3.3) dla płaszczyzny π_N po uwzględnieniu (4.1) jest następująca:

$$(5.1) \quad \begin{bmatrix} \rho a & 0 & a^2 \rho N_1 & 0 \\ 0 & \rho a & a^2 \rho N_2 & 0 \\ N_1 & N_2 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^3 \end{bmatrix}.$$

Rząd macierzy (5.1) jest równy 3, wobec czego istnieje jedno liniowo niezależne rozwiązanie układu (3.3) z macierzą (5.1). Oznacza to również, że dla każdego \mathbf{N} z (4.1) istnieje jeden liniowo niezależny związek charakterystyczny.

Rozwiązaniem (3.3) z macierzą (5.1) jest z dokładnością do jednakowego stałego mnożnika następujący układ współczynników:

$$(5.2) \quad \alpha_1 = -aN_1, \quad \alpha_2 = -aN_2, \quad \alpha_3 = 1, \quad \alpha_4 = 0.$$

Wektory \mathbf{W}_j na podstawie (2.2), (3.2) i (5.2) określone są jak niżej:

$$(5.3) \quad \begin{aligned} \mathbf{W}_1 &= a\rho(\mathbf{ae}_1 - N_1\mathbf{V}), \\ \mathbf{W}_2 &= a\rho(\mathbf{ae}_2 - N_2\mathbf{V}), \\ \mathbf{W}_3 &= \mathbf{V} - \mathbf{an}, \\ \mathbf{W}_4 &= 0. \end{aligned}$$

Związek (3.1) dla każdej płaszczyzny falowej π_N ze względu na tożsamości $u_1 \equiv v_1$, $u_2 \equiv v_2$, $u_3 \equiv p$ przedstawia wyrażenie

$$(5.4) \quad \sum_{q=1}^2 (\mathbf{ae}_q - N_q\mathbf{V}) \cdot \nabla v_q + \frac{1}{a\rho} (\mathbf{V} - \mathbf{an}) \cdot \nabla p = 0.$$

Widać, że \mathbf{W}_3 pokrywa się z kierunkiem bicharakterystyki \mathbf{B} . Można łatwo sprawdzić, że \mathbf{W}_1 i \mathbf{W}_2 nie są nigdy kolinearne oraz że \mathbf{W}_1 i \mathbf{W}_2 nie są nigdy kolinearne z \mathbf{W}_3 czyli z \mathbf{B} .

Proste przekształcenia (5.4) i wykorzystanie pojęcia pochodnej kierunkowej pozwalają napisać je w postaci

$$a\rho\mathbf{n} \cdot \left(d_v \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} \nabla p \right) = a^2 \rho (\nabla \cdot \mathbf{v}) + d_v p.$$

Prawa strona powyższej równości jest po prostu równaniem zachowania masy i równa się tożsamościowo zeru. Lewa strona jest równaniem zachowania pędu mnożonym skalarnie przez niezerowy wektor $a\rho\mathbf{n}$. Widać więc, że (5.4) zawiera w sobie równanie zachowania

pędu i masy, a więc niepełny układ równań wyjściowych. Należy zauważyć, że dla przepływu jednowymiarowego niustalonego przedstawianego we współrzędnych x_2x_3 (jak na rys. 7) kierunki wektorów \mathbf{W}_j , które są wtedy tylko dwa \mathbf{W}_2 i \mathbf{W}_3 na każdej z dwóch prostych π_N , a więc na π_{N^+} i π_{N^-} , równe są $\mathbf{W}_2^+ = \mathbf{B}^+$, $\mathbf{W}_2^- = -\mathbf{B}^-$, $\mathbf{W}_3^+ = \mathbf{B}^+$, $\mathbf{W}_3^- = \mathbf{B}^-$. Otrzymujemy więc dwa znane związki charakterystyczne

$$(5.5) \quad \mathbf{B}^+ \cdot \left(\nabla v + \frac{1}{a\rho} \nabla p \right) = 0, \quad \mathbf{B}^- \cdot \left(\nabla v - \frac{1}{a\rho} \nabla p \right) = 0.$$

Przekształcenie (5.4) do postaci wygodnej w obliczeniach numerycznych zostanie przeprowadzone w p. 6.

5.2. Związki charakterystyczne na płaszczyznach toru. Macierz współczynników do układu równań (3.3) po uwzględnieniu (4.11) jest następująca

$$(5.6) \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & \bar{N}_1 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{N}_2 & 0 \\ a^2 \rho \bar{N}_1 & a^2 \rho \bar{N}_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Rząd macierzy (5.6) jest równy 2. Oznacza to, że każdemu $\bar{\mathbf{N}}$ z (4.11) lub inaczej dla każdej płaszczyzny toru $\pi_{\bar{\mathbf{N}}}$ obowiązują dwa liniowo niezależne związki charakterystyczne. Rozwiązując układ (3.3) z macierzą (5.6) otrzymujemy dwa liniowo niezależne rozwiązania: pierwsze

$$(5.7) \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0, \quad \alpha_4 = 1,$$

drugie

$$(5.8) \quad \alpha_1 \bar{N}_1 + \alpha_2 \bar{N}_2 = 0, \quad \alpha_3 = \alpha_4 = 0.$$

Pierwsza równość w (5.8) odpowiada równaniu $\boldsymbol{\alpha} \cdot \bar{\mathbf{n}} = 0$ i wyznacza wektor $\boldsymbol{\alpha}(\alpha_1, \alpha_2)$ leżący w płaszczyźnie x_1x_2 , prostopadły do $\bar{\mathbf{n}}$. Wektor $\boldsymbol{\alpha}$ daje oczywiście jeden liniowo niezależny kierunek na x_1x_2 . A więc α_i opisane przez (5.7) i (5.8) przedstawiają dwa niezależne rozwiązania. Określone zostały zatem dwie grupy wektorów \mathbf{W}_j dla każdego $\bar{\mathbf{N}}$ z (4.11).

Dla rozwiązania (5.7) otrzymamy

$$\mathbf{W}_1 = \mathbf{W}_2 = 0, \quad \mathbf{W}_3 = -\mathbf{V}, \quad \mathbf{W}_4 = a^2 \mathbf{V},$$

stąd pierwszy związek charakterystyczny

$$(5.9) \quad \mathbf{V} \cdot (\nabla p - a^2 \nabla \rho) = 0.$$

Związek (5.9) mówi o zachowaniu entropii na kierunku toru cząstki i jest równaniem identycznym z ostatnim równaniem układu wyjściowego (2.1) i (2.2).

Grupa α_i podana w (5.8) odpowiada następującemu układowi wektorów \mathbf{W}_j

$$\mathbf{W}_1 = \alpha_1 \rho \mathbf{V}, \quad \mathbf{W}_2 = \alpha_2 \rho \mathbf{V}, \quad \mathbf{W}_3 = \boldsymbol{\alpha}, \quad \mathbf{W}_4 = 0,$$

co pozwala obliczyć drugi związek charakterystyczny

$$(5.10) \quad \rho(\alpha_1 \mathbf{V} \cdot \nabla v_1 + \alpha_2 \mathbf{V} \cdot \nabla v_2) + \boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla p = 0.$$

Korzystając z pojęcia pochodnej kierunkowej przekształcimy (5.10) do postaci

$$(5.11) \quad \alpha_1 d_v v_1 + \alpha_2 d_v v_2 + \frac{1}{\rho} d_{\boldsymbol{\alpha}} p = 0$$

lub po prostu

$$(5.12) \quad \alpha \cdot \left(d_v v + \frac{1}{\rho} \nabla p \right) = 0.$$

Gdy założymy $|\alpha| = 1$, co można uczynić wobec jego niezerowości, widać, że (5.12) jest rzutem równania pędu na kierunek α .

Wektory \mathbf{V} i α , które wytyczają kierunki rzutowania gradientów funkcji v_1, v_2 i p , leżą oczywiście w jednej i tej samej płaszczyźnie toru $\pi_{\bar{\mathbf{N}}}$ określonej przez wybrany z (4.11) $\bar{\mathbf{N}}$. Wektor α leży na prostej będącej śladem przecięcia płaszczyzny $\pi_{\bar{\mathbf{N}}}$ z płaszczyzną $x_1 x_2$.

5.3. Zależności między związkami charakterystycznymi. Wiadomo, że dla każdego wektora \mathbf{N} istnieje jeden niezależny związek charakterystyczny (5.4). Natomiast dla każdego wektora $\bar{\mathbf{N}}$ obowiązują dwa niezależne związki charakterystyczne: związek (5.9), który jest jednako-owy dla wszystkich $\bar{\mathbf{N}}$ z całej ich rodziny i związek (5.11) zależny od wybranego $\bar{\mathbf{N}}$.

Narzucają się dwa pytania ważne z punktu widzenia zastosowań związków charakterystycznych.

1. Czy w ogóle istnieją cztery liniowo niezależne związki charakterystyczne w każdym punkcie przepływu potrzebne do obliczenia czterech funkcji niewiadomych.

2. Gdy napiszemy związki charakterystyczne dla wektorów $\mathbf{N}^{(1)}, \dots, \mathbf{N}^{(p)}, \bar{\mathbf{N}}^{(1)}, \dots, \bar{\mathbf{N}}^{(s)}$, to ile i które spośród nich są liniowo niezależne. Problemy te zbadał dokładnie RUSANOW w [3] dla pełnych równań dynamiki gazów w czterowymiarowej czaso-przestrzeni. Ograniczymy się tutaj do podania następujących odpowiedzi na postawione pytania.

Jeżeli chodzi o związki charakterystyczne na płaszczyznach falowych, wyróżnianych wektorami \mathbf{N} , to dla trzech liniowo niezależnych \mathbf{N} można napisać trzy niezależne związki (5.4). Wystarcza to do rozwiązywania przepływów potencjalnych.

Wiadomo, że dla wszystkich wektorów $\bar{\mathbf{N}}$ obowiązuje zawsze związek (5.9). Natomiast dwa niezależne związki (5.12) można napisać dla dwóch liniowo niezależnych α , czyli dla dwóch liniowo niezależnych $\bar{\mathbf{n}}$, a tym samym dla dwóch liniowo niezależnych $\bar{\mathbf{N}}$.

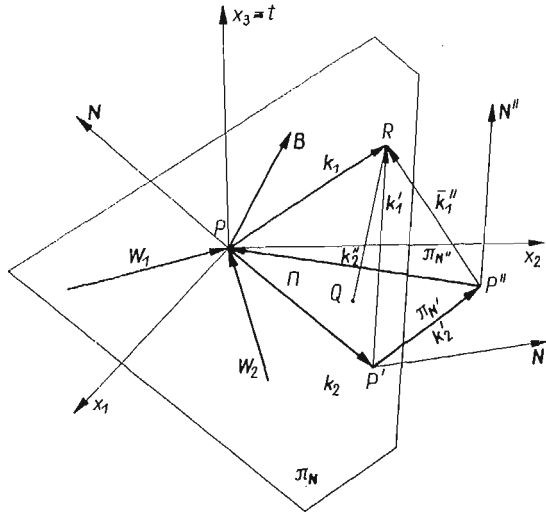
W sumie dla rodziny wektorów $\bar{\mathbf{N}}$ można także napisać trzy niezależne związki. Tak więc czterech potrzebnych niezależnych związków nie można napisać jedynie dla płaszczyzn wyróżnionych wektorami \mathbf{N} , czy też $\bar{\mathbf{N}}$. Wydaje się, że wobec złożoności związku (5.12) dla przepływu nieustalonego najlepiej wybrać cztery potrzebne związki spośród trzech związków na płaszczyznach falowych, a jako czwarty dołączyć do nich związek zachowania entropii (5.9). Pod tym kątem widzenia będą prowadzone dalsze rozważania.

6. Dostosowanie związku charakterystycznego obowiązującego na płaszczyźnie falowej do zastosowania w obliczeniach numerycznych

Dla numerycznego obliczenia wartości funkcji niewiadomych w punkcie wewnętrznym przepływu R , położonym w sąsiedztwie powierzchni niecharakterystycznej II , na której znany jest stan gazu, należy zastosować pewien schemat obliczeniowy. Będzie on podobny do tych, które są używane w ustalonych naddźwiękowych przepływach trójwymiarowych np. w [4 i 5].

Schemat oparty jest na koncepcji wykorzystania do określenia funkcji niewiadomych trzech związków charakterystycznych (5.4), obowiązujących na trzech płaszczyznach falowych, i związku (5.9) na odcinku toru cząstki QR (por. rys. 9).

Na powierzchni Π wybieramy trzy blisko położone punkty P, P' i P'' , w których są oczywiście znane funkcje u_j . Punkty te łączymy wektorami k_2, k'_2 i k''_2 (rys. 9). Płaszczyzny charakterystyczne $\pi_N, \pi_{N'}$ i $\pi_{N''}$ prowadzimy tak, aby leżały na nich odpowiednio wektory k_2, k'_2 i k''_2 i aby płaszczyzny te były prostopadłe do wektorów normalnych N, N' i N'' w punktach P, P' i P'' . Wektory N, N' i N'' są wzięte z powierzchni bocznych stożków (4.1), zbudowanych w punktach P, P' i P'' .



Rys. 9

W oparciu o rozważania geometryczne z p. 4 można stwierdzić, że przez każdy z wektorów k_2 , można poprowadzić po dwie płaszczyzny π_N , które będą prostopadłe do wektorów normalnych wziętych z powierzchni bocznych stożków (4.1). Wybieramy z nich tylko jedną trójkę płaszczyzn np. tę, która przecina się w punkcie R leżącym bliżej powierzchni Π .

Trzy wybrane płaszczyzny falowe $\pi_N, \pi_{N'}$ i $\pi_{N''}$ przecinają się wzdłuż prostych, które wyznaczone są na rys. 9 przez wektory k_1, k'_1 i k''_1 .

Utworzony został ostrosłup $PP'P''R$, którego ścianami bocznymi są wycinki płaszczyzn $\pi_N, \pi_{N'}$ i $\pi_{N''}$, a krawędziami pary wektorów k_1, k_2, k'_1, k'_2 i k''_1, k''_2 . Każda para wektorów łączy trzy punkty. W dwóch z nich są znane parametry gazu, a trzecim jest zawsze punkt R .

Związek (5.4) przedstawia sumę pochodnych kierunkowych

$$\sum_{j=1}^3 d_{W_j} u_j = 0.$$

Gdyby tę sumę przedstawić tak, że zamiast rzutowania na trzy dość różnorodnie (wg 5.1) położone wektory W_j , można by gradienty ∇u_j rzutować na pary wektorów k_1, k_2 , to uzyskalibyśmy wzór dogodny do formułowania go w postaci równania różnicowego nadającego się do bezpośrednich obliczeń funkcji niewiadomych w punkcie R .

Dla każdej z trzech par wektorów k_1, k_2 można by napisać równanie różnicowe, które w sumie wraz ze związkiem (5.9) dla odcinka toru cząstki QR stanowiłyby cztery równania potrzebne do obliczenia czterech funkcji niewiadomych w R .

Dla realizacji tego konieczne jest proste przekształcenie polegające na zastąpieniu w (5.4) wektorów \mathbf{W}_1 , \mathbf{W}_2 i \mathbf{W}_3 dwoma liniowo niezależnymi wektorami \mathbf{k}_1 , \mathbf{k}_2 .

W tym celu wektory \mathbf{W}_j ($j=1, 2, 3$) rozkładamy w bazie lokalnej $\{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2\}$ określonej w podstawowym układzie kartezjańskim $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$

$$(6.1) \quad \mathbf{W}_j = \gamma^1_j \mathbf{k}_1 + \gamma^2_j \mathbf{k}_2, \quad j = 1, 2, 3,$$

gdzie składowe kontrawariantne wektorów \mathbf{W}_j są określone jako

$$(6.2) \quad \gamma^l_j = \mathbf{W}_j \cdot \mathbf{k}^l, \quad j = 1, 2, 3; \quad l = 1, 2.$$

Baza wzajemna $\{\mathbf{k}^1, \mathbf{k}^2\}$ została ustanowiona w $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ za pomocą wzorów

$$(6.3) \quad \mathbf{k}^1 = \frac{\mathbf{k}_2 \times \mathbf{N}}{\mathbf{k}_1 \cdot (\mathbf{k}_2 \times \mathbf{N})}, \quad \mathbf{k}^2 = \frac{\mathbf{N} \times \mathbf{k}_1}{\mathbf{k}_1 \cdot (\mathbf{k}_2 \times \mathbf{N})}.$$

Dla uproszczenia zapisu wprowadzono oznaczenia

$$(6.4) \quad \zeta_1 = \mathbf{k}_2 \times \mathbf{N}, \quad \zeta_2 = \mathbf{N} \times \mathbf{k}_1.$$

Wykorzystując powyższe można (5.4) sformułować następująco:

$$(6.5) \quad \sum_{q=1}^2 \sum_{l=1}^2 A_{l,q} d_{\mathbf{k}_l} v_q + \frac{1}{a\varrho} \sum_{l=1}^2 G_l d_{\mathbf{k}_l} p = 0,$$

gdzie współczynniki liczbowe

$$(6.6) \quad A_{l,q} = a \zeta_{l,q} - n_q \left(\sum_{r=1}^3 V_r \zeta_{l,r} \right) \quad \text{dla } l, q = 1, 2,$$

$$G_l = \sum_{r=1}^3 V_r \zeta_{l,r} - a \sum_{r=1}^3 n_r \zeta_{l,r}.$$

W (6.6) występują składowe wektorów $\mathbf{n}(N_1, N_2, 0)$ i $\mathbf{V}(v_1, v_2, 1)$ oraz $\zeta_l(\zeta_{l,1}, \zeta_{l,2}, \zeta_{l,3})$. Składowe wektora ζ_l określimy obliczając wyznaczniki opisujące (6.4).

7. Związek charakterystyczny na kierunku bicharakterystyki

W 5.1 pokazano, że dla jednowymiarowego nieustalonego przepływu kierunku \mathbf{W}_2 i \mathbf{W}_3 są jednakowe i pokrywają się z kierunkiem \mathbf{B} , czyli po prostu z kierunkiem charakterystyki. Związki charakterystyczne (5.5) napisane są dla dwóch występujących tam kierunków charakterystyk oznaczonych przez \mathbf{B}^+ i \mathbf{B}^- .

Powstaje pytanie. Czy związki charakterystyczne przepływu dwuwymiarowego, nieustalonego w rozpatrywanym punkcie P , a więc związki (5.4) lub (6.5) dadzą się napisać tylko dla kierunku dowolnej bicharakterystyki \mathbf{B} , przechodzącej przez punkt P ? Odpowiedź na to pytanie jest twierdząca, a jej uzasadnienie wynika natychmiast z przeprowadzonego wyżej przekształcenia (5.4) na (6.5).

Założmy więc, że jeden z wektorów lokalnej bazy $\{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2\}$ leżącej na płaszczyźnie $\pi_{\mathbf{N}}$ np. $\mathbf{k}_1 \equiv \mathbf{B}$. Związek (5.4) zapisujemy wtedy następująco:

$$(7.1) \quad \gamma^1_1 d_{\mathbf{B}} v_1 + \gamma^1_2 d_{\mathbf{B}} v_2 + \frac{1}{a\varrho} d_{\mathbf{B}} p + \gamma^2_1 d_{\mathbf{k}_2} v_1 + \gamma^2_2 d_{\mathbf{k}_2} v_2 = 0;$$

γ^l_q для $l, q = 1, 2$ są kontrawariantnymi współrzędnymi wektorów \mathbf{W}_1 i \mathbf{W}_2 opisanymi przez (6.2) i (6.3), w których należy przyjąć $\mathbf{k}_1 \equiv \mathbf{B}$.

Z (7.1) wynika, że na to, aby omawiany związek charakterystyczny napisać tylko dla kierunku bicharakterystyki \mathbf{B} , a więc w sposób następujący:

$$(7.2) \quad \gamma^1_1 d_{\mathbf{B}} v_1 + \gamma^1_2 d_{\mathbf{B}} v_2 + \frac{1}{a\varrho} d_{\mathbf{B}} p = 0,$$

musi zachodzić

$$(7.3) \quad \mathbf{k}_2 \cdot (\gamma^2_1 \nabla v_1 + \gamma^2_2 \nabla v_2) = 0.$$

Współrzędne kontrawariantne γ^2_1 i γ^2_2 nie mogą zniknąć jednocześnie, bo \mathbf{W}_1 i \mathbf{W}_2 nie są nigdy współosiowe [por. wzór (6.2)]. Wobec tego musi być równy zeru iloczyn skalarny wektora \mathbf{k}_2 przez wektor zawarty w nawiasach we wzorze (7.3).

Jakkolwiek będzie skierowany wektor zawarty w nawiasach wzoru (7.3), zawsze można dobrać tak kierunek \mathbf{k}_2 na płaszczyźnie π_N , aby warunek (7.3) był wypełniony.

Związek (5.4) i (6.5) można przedstawić w postaci (7.2) dla każdego z nieskończenie wielu wektorów \mathbf{B} przechodzących przez punkt przepływu P .

Wszystkie przeprowadzone tutaj rozważania mogą być rozszerzone na przypadek trójwymiarowych nieustalonych przepływów. Wymaga to z reguły prostego uzupełnienia wzorów wyrazami zawierającymi trzecią składową przestrzenną występujących tutaj wektorów.

Literatura cytowana w tekście

1. R. MISES, *Mathematical Theory of Compressible Fluid Flow*, Acad. Press Inc. Publ., New York 1958.
2. M. BURNAT, *Метод характеристик для квазилинейных уравнений типа газодинамики*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Math., Astr., Phys., 5, 10 (1962).
3. В. В. РУСАНОВ, *Характеристики общих уравнений газовой динамики*, Журн. выч. мат. и физ. 3 (1963).
4. M. BURNAT, A. KIEŁBASIŃSKI, A. WAKULICZ, *The method of characteristics for a multidimensional gas flow*, Arch. Mech. Stos., 2, 16 (1964).
5. Ю. Н. ПОДЛАДЧИКОВ, *Метод характеристик для расчёта пространственных сверхзвуковых течений газа*, Изв. Ак. Наук СССР, Механика 4 (1965).

Резюме

МЕТОД ХАРАКТЕРИСТИК ДЛЯ ДВУХМЕРНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ТЕЧЕНИЙ ГАЗА

Предлагается рассуждения, касающиеся метода характеристик в приложении к системе уравнений динамики газов, описывающих непотенциальные двухмерные и нестационарные течения. Исследованы некоторые свойства характеристических поверхностей, связанных с отдельной внутренней точкой в течении. Подробно исследован так наз. конус нормалей и взаимное расположение конуса нормалей и известного волнового конуса (называемого иногда конусом Маха). Характеристические зависимости получены в форме удобной для непосредственного представления их в виде разностных уравнений на произвольной характеристической плоскости. Выведена также характеристическая зависимость для направления произвольной бихарактеристики, проходящей через рассматриваемую точку течения.

S u m m a r y

A METHOD OF CHARACTERISTICS FOR TWO DIMENSIONAL
UNSTEADY GAS FLOW

Investigations on the method of characteristics applied to a set of gasodynamics equations describing nonpotential two-dimensional and unsteady flows are presented. Some properties of characteristic surfaces connected with a single internal point in the flow are investigated and particular attention is paid to the so called cone of normals and mutual position of the normal cone and the known wave cone (which is sometimes called also the Mach's cone). Characteristic terms are obtained in a convenient form for their direct presentation in difference equations on any characteristic surface. The characteristic terms for the direction of any bicharacteristic going through the examined point of flow are given.

Praca została złożona w Redakcji dnia 13 czerwca 1966 r.
