MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
3, 5 (1967)

O ZJAWISKACH REZONANSOWYCH W UKŁADACH NIEOGRANICZONYCH

SYLWESTER KALISKI, EDWARD WŁODARCZYK (WARSZAWA)

1. Wstęp

Problem rezonansu w zagadnieniach falowych, w szczególności w zagadnieniach propagacji fal sprężystych, bywa zazwyczaj kojarzony z problemem wartości własnych dla określonych zagadnień brzegowych, tj. dla układów ograniczonych (por. np. [1]), poddawanych działaniu pola sił wymuszających. Tym niemniej problemy rezonansowe występują w określonych warunkach również i w przypadkach układów nieograniczonych lub w przypadku problemów brzegowych układów półograniczonych.

Fakty te nie są oczywiście nowe. Znane są fakty występowania rezonansu w układach nieograniczonych przy odpowiednio sprofilowanych przestrzennie i czasowo polach sił masowych, znane są również możliwości występowania rezonansu w przypadkach odpowiedniego pobudzenia układów z falą bieżącą w układach półograniczonych, które prowadzą do specyficznych problemów wartości własnych jak np. problem fal Rayleigha.

Problemy brzegowe dla układów półograniczonych związane są również, w przypadku określonego wymuszenia zaburzeń, z zagadnieniami promieniowania typu Czerenkowa. Wydaje się jednak rzeczą interesującą zanalizowanie zespołu tych zagadnień z jednolitego punktu widzenia, mianowicie możliwości powstawania rezonansu w układach nieograniczonych lub półograniczonych i ujawnienie związków pomiędzy możliwością powstawania rezonansu na falach stojących i falach bieżących oraz zjawiskami promieniowania Czerenkowa. Kwestia ta stanowi cel niniejszej publikacji.

W pracy rozważamy najpierw zagadnienie możliwości powstawania rezonansu w układach nieograniczonych oraz związki pomiędzy zjawiskiem rezonansu na falach stojących i biegnących wykazując fizyczną równoważność obu zjawisk. Ograniczamy się przy tym do równań opisanych w przypadku procesów okresowych operatorami samosprzężonymi. Następnie dyskutujemy związki pomiędzy rezonansem dla fal stojących i bieżących w brzegowych układach półograniczonych oraz wykazujemy związek tych procesów ze zjawiskiem promieniowania typu Czerenkowa. Całość pracy ujęto w postaci przykładów dla typowych zagadnień propagacji fal względnie typowych problemów brzegowych dla sprężystych układów półograniczonych z punktu widzenia zagadnienia rezonansu. Przykłady rozważano w ujęciu możliwie najprostszym, a więc pomijając efekty tłumienia itp. W zakończeniu podsumowano wyniki i wyprowadzono wnioski ogólne oraz sprecyzowano wynikłe prawidłowości.

Należy tutaj zaznaczyć, że można by ominąć metodę przykładową próbując ująć całość w ogólnej formalnej postaci matematycznej — tym bardziej, że rozważania niniejsze, przeprowadzone na przykładach problemów fal sprężystych i pewnych problemach pól sprzężonych, stosują się i do szeregu innych zagadnień teorii pola.

Jednakże zastosowane przez nas ujęcie, z racji eksponowania problemów związanych z propagacją fal sprężystych oraz ze względu na poglądowość wydaje się bardziej korzystne.

2. Układy nieograniczone

Dla przykładu rozważymy najpierw układ sprężysty, bezdyspersyjny i przestrzennie jednowymiarowy, a więc na przykład pręt nieograniczony.

Równanie okresowych drgań wymuszonych ma postać

$$a^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=p(x)\cos\omega t, \tag{2.1}$$

gdzie przyjmiemy $p(x) = p_0 \sin n\pi x/l$. Podstawiając w tym wzorze

$$u = u_0 \cos\omega t \sin n\pi\frac{x}{l}$$

otrzymujemy

$$u = p_0 \Bigg/ \left[\omega^2-\left(n\pi\frac{a}{l}\right)^2\right]. \tag{2.2}$$

Mianownik przyrównany do zera stanowi odpowiednik równania dyspersyjnego równania jednorodnego

$$\frac{\omega^2}{a^2\alpha_n^2}=1, \qquad \alpha_n=\frac{n\pi}{l} \tag{2.3}$$

i odpowiada przypadkowi rezonansu dla okresowego czasowo i przestrzennie pola sił wymuszających. Łatwo oczywiście zauważyć, że przy przestrzennie okresowym polu sił wymuszających układ na odcinkach półokresu przestrzennego odpowiada jakby wydzielonemu układowi ograniczonemu (o warunkach brzegowych $u = 0$ dla $x = l$), co oczywiście wyjaśnia obraz rezonansu.

Rozważmy obecnie przypadek fali bieżącej w pręcie z polem sił wymuszających

$$p(x,t) = p_0 e^{ik(x-vt)}. \tag{2.4}$$

Poszukując rozwiązania w postaci

$$u(x,t) = u_0 e^{ik(x-vt)} \tag{2.5}$$

otrzymamy z przyrównania równania dyspersyjnego równania jednorodnego do zera warunek rezonansu dla fali bieżącej

$$1=\frac{v^2}{a^2}=\frac{\omega^2}{a^2k^2}. \tag{2.6}$$

Porównując (2.6) z (2.3) widzimy, że rezonans zachodzi w obu przypadkach dla identycznych wartości ω przy $k = \alpha_n$; oznacza to, że przy długości fali takiej jak dla przypadku fali stojącej układ w przypadku fali bieżącej przechodzi w rezonans wtedy, gdy prędkość fazowa harmonicznego w czasie i przestrzeni pola sił wymuszających osiąga prędkość dźwięku. Z punktu widzenia powstawania rezonansu oba układy są równoważne. Analogiczna sytuacja zachodzi również w przypadku nieograniczonej przestrzeni trójwymiarowej. Na przykład dla równania falowego

$$\left(a^2\nabla^2-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\varphi = p(x, y, z)\cos\omega t, \tag{2.7}$$

w którym

$$p(x, y, z) = p_0 \sin\alpha_m x \sin\beta_n y \sin\gamma_k z, \tag{2.8}$$

$$\alpha_m = m\pi/l_1, \quad \beta_n = n\pi/l_2, \quad \gamma_k = k\pi/l_3,$$

równanie rezonansu dla fal stojących ma postać

$$\alpha_m^2+\beta_n^2+\gamma_n^2 = \frac{\omega^2}{a^2}. \tag{2.9}$$

Jeżeli wymuszenie ma charakter fali bieżącej w kierunku np. osi x

$$p(x, y, z, t) = p_0 \sin\beta_n y \sin\gamma_k z\, e^{ik(x-vt)}, \tag{2.10}$$

to analogiczne równanie dyspersyjne będzie miało postać

$$\beta_n^2+\gamma_k^2+k^2 = \frac{k^2v^2}{a^2} = \frac{\omega^2}{a^2}. \tag{2.11}$$

Porównanie z (2.9) prowadzi do wniosku, że $k = \alpha_m$ analogicznie do przypadku jednowymiarowego.

Odpowiedniość stanów rezonansowych obu układów jest fizycznie prosta — falę stojącą rezonansową można złożyć z fal bieżących w obu kierunkach. Fale te mają własności symetryczne z punktu widzenia równania dyspersyjnego, zatem aby w sumie dawały przypadek rezonansu na fali stojącej, każda z nich powinna być rezonansowa w sensie fali bieżącej, co z kolei następuje przy prędkościach fazowych odpowiadających prędkości dźwięku. Sens fizyczny rezonansu dla fali bieżącej łatwo zinterpretować, jeżeli zwiążemy układ z falą bieżącą przyjmując $x = x-vt$. Wtedy np. równanie (2.1) przejdzie [przy $p(x, t)$ w postaci (2.4)] w następujące:

$$(a^2-v^2)\frac{\partial^2 u}{\partial \bar{x}^2}+2v\frac{\partial^2 u}{\partial \bar{x}\,\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = p_0 e^{ik\bar{x}}. \tag{2.12}$$

Stąd wynika, że rozwiązanie dla u nie powinno zależeć od t, zatem

$$(a^2-v^2)\frac{\partial^2 u}{\partial \bar{x}^2} = p_0 e^{ik\bar{x}}. \tag{2.13}$$

Przy $u = u_0\exp(ik\bar{x})$ mamy

$$u_0 = -p_0\frac{1}{(a^2-v^2)k^2}, \tag{2.14}$$

co daje zerową sztywność (rezonans) przy $a = v$, a to z kolei przy $v = a = \omega/k$ prowadzi do $k = \omega/a$ lub

$$1 = \frac{\omega^2}{a^2 k^2}, \tag{2.15}$$

zgodnie z (2.6).

Rozważone wyżej przykłady dotyczyły problemów bezdyspersyjnych. Związki powyższe przenieść można jednak bez trudu i na przypadki z dyspersją (np. problem belki), jednakże wtedy odpowiedniość rezonansu dla fali bieżącej zachodzi nie dla prędkości fazowej fali bieżącej równej prędkości dźwięku, lecz dla określonej prędkości zależnej od wektora falowego. W dalszym ciągu ograniczymy się dla prostoty (mając na uwadze jakościową stronę zagadnienia) do problemów bezdyspersyjnych. Znacznie bardziej złożoną postać przybiera powyższy problem w przypadku zagadnień brzegowych układów półnieskończonych, czym zajmiemy się w następnym punkcie.

3. Problemy brzegowe w układach półnieskończonych

3.1. Uwagi ogólne. Rozważymy obecnie problem rezonansu dla fal stojących i bieżących dla układów półnieskończonych przy wymuszeniach danych na brzegu a nie, jak poprzednio, polem sił masowych. Uzyskamy tutaj podobne odpowiedniości jak w punkcie poprzednim jednakże z dość istotnymi modyfikacjami. Mianowicie, o ile w przypadku poprzednim, dzięki profilowaniu fali przestrzennym, okresowym układem sił masowych (dla fali stojącej) stwarzało się jak gdyby podukłady ograniczone o znanych własnościach rezonansowych, o tyle w przypadku wymuszeń danych jedynie na brzegu takich układów, dzięki możliwości generowania promieniowania Czerenkowa, nie daje się na ogół zrealizować. Na przykład okresowym ciśnieniem przyłożonym na brzegu półnieskończonego pręta nie można wytworzyć rezonansu, gdyż jedyne rozwiązanie stanowi tu fala wypromieniowująca od końca pręta.

Jeżeli z kolei rozważyć problem półprzestrzeni (z reguły rozważać będziemy zagadnienia płaskie) np. dla równania falowego, to przy danym ω i ciśnieniu okresowo zmiennym wzdłuż powierzchni (np. problem akustyczny) w przypadku fali stojącej nie otrzymamy rezonansu. Mianowicie, gdy będziemy zmieniać l przy danym ω, to zanim wystąpi rezonans, nastąpi odpromieniowanie fali powierzchni. Podobnie dla fali bieżącej: przy przekroczeniu przez prędkość fazową prędkości dźwięku wystąpi promieniowanie typu Czerenkowa bez osiągnięcia przedtem rezonansu.

Równanie falowe nie ma dostatecznych «wewnętrznych stopni swobody» na to, aby problem w układzie półnieograniczonym miał wartości własne (co jest związane z istnieniem fal powierzchniowych). Takie możliwości powstają dla równania bifalowego i wyższych rzędów, to jest dla problemu fal Rayleigha w teorii sprężystości czy też w teorii pól sprzężonych.

Jak się okazuje, w przypadku teorii sprężystości istnieje możliwość wywołania rezonansu za pomocą fal stojących na powierzchni. Podobny wynik otrzymuje się i dla fal bieżących przy podobnych zależnościach jak w poprzednim punkcie z tym, że obecnie prędkość krytyczna, przy której występuje to zjawisko, odpowiada prędkości fal powierzchniowych Rayleigha. Przy takiej prędkości można za pomocą fali bieżącej wzbudzić rezonans, gdyż prędkość ta stanowi wartość własną specjalnego problemu brzegowego dla układu półnieograniczonego.

Podobnie ma się rzecz i dla przypadku równań pól sprzężonych, aczkolwiek zagadnienie z racji bardziej złożonych równań (obszarów istnienia fal powierzchniowych itd.) komplikuje się bardzo. Wszystkie te własności są wynikiem symetrii zjawisk rezonansowych dla fal bieżących w kierunkach przeciwnych co w rezultacie superpozycji daje efekt rezonansu dla fal stojących. Niżej omówimy przypadek równania falowego i równań teorii sprężystości oraz pokrótce przytoczymy wyniki dla równań magnetosprężystości i piezoelektryczności oraz wykażemy słuszność sformułowanych wyżej wniosków.

3.2. Równanie falowe. Rozważmy przypadek fali stojącej dla równania falowego

$$a^2\nabla^2\varphi-\ddot{\varphi}=0 \tag{3.1}$$

z warunkiem brzegowym dla $x_2 = 0$

$$\dot{\varphi}(x_1, t) = \varphi_0 \sin\frac{n\pi}{l}x\cos\omega t = \varphi_0\sin\alpha_n x_1\cos\omega t. \tag{3.2}$$

Rozwiązanie (3.1) ma postać

$$\varphi(x_1, x_2, t) = C_0\sin\alpha_n x_1\sin\omega t\, e^{-\sqrt{\alpha_n^2-\frac{\omega^2}{a^2}}x_2}, \tag{3.3}$$

skąd

$$C_0 = \frac{\varphi_0}{\omega}. \tag{3.4}$$

Rezonans więc nie zachodzi. Gdy $\omega/a > \alpha_n$, nastąpi wypromieniowanie fali od powierzchni. Podobnie dla fali bieżącej znajdziemy

$$\varphi(x_1, x_2, t) = -\frac{\varphi_0}{ivk}e^{ik(x_1-vt)}e^{-k\sqrt{1-\frac{v^2}{a^2}}x_2}, \tag{3.5}$$

co daje wynik podobny do poprzedniego, czyli brak rezonansu oraz promieniowanie typu Czerenkowa dla $v > a$.

3.3. Równania teorii sprężystości. Równania płaskiej teorii sprężystości mają postać:

$$\begin{aligned}(a_1^2-a_2^2)(u_{1,11}+u_{2,12})+a_2^2\nabla^2u_1-\ddot{u}_1 &= 0,\\ (a_1^2-a_2^2)(u_{1,12}+u_{2,22})+a_2^2\nabla^2u_2-\ddot{u}_2 &= 0.\end{aligned} \tag{3.6}$$

Naprężenia na powierzchni określone są wzorami:

$$\begin{aligned}\sigma_{12} &= \mu(u_{1,2}+u_{2,1}),\\ \sigma_{22} &= \varrho\,[a_1^2u_{2,2}+(a_1^2-2a_2^2)u_{1,1}].\end{aligned} \tag{3.7}$$

Rozważmy przypadek fali stojącej. W tym celu przyjmiemy warunki brzegowe w postaci

$$\sigma_{12}=0, \qquad \sigma_{12}=-A_0\sin\omega t\cos\alpha_n x_1, \qquad \alpha_n = n\pi/l. \tag{3.8}$$

Rozwiązanie równań (3.6) czyniące zadość warunkom w nieskończoności ma postać:

$$\begin{aligned}u_1 &= \sin\omega t\sin\alpha_n x_1\big(A\,\alpha_n e^{-\gamma_n x_2}+B\beta_n e^{-\beta_n x_2}\big),\\ u_2 &= \sin\omega t\cos\alpha_n x_1\big(A\,\gamma_n e^{-\gamma_n x_2}+B\,\alpha_n e^{-\beta_n x_2}\big),\end{aligned} \tag{3.9}$$

gdzie

$$\gamma_n^2 = \alpha_n^2 - \frac{\omega^2}{a_1^2}, \qquad \beta_n^2 = \alpha_n^2 - \frac{\omega^2}{a_2^2}. \tag{3.10}$$

Z pierwszego z warunków brzegowych (3.8) obliczamy

$$B = -\frac{2\gamma_n \alpha_n}{\alpha_n^2 \beta_n^2} A, \tag{3.11}$$

z drugiego zaś

$$A = A_0 \frac{1}{\left(2 - \frac{\omega^2}{a_2^2 \alpha_n^2}\right)^2 - 4\bar{\beta}_n \bar{\gamma}_n} \frac{1}{\varrho a_2^2 \alpha_n^4} = \bar{A}_0 \frac{1}{M}, \tag{3.12}$$

gdzie

$$\bar{\beta}_n = \sqrt{1 - \frac{\omega^2}{a_2^2 \alpha_n^2}}, \qquad \bar{\gamma}_n = \sqrt{1 - \frac{\omega^2}{a_1^2 \alpha_n^2}}, \qquad \bar{A}_0 = \frac{A_0}{\varrho a_2^2 \alpha_n^4}.$$

Rezonans powstaje gdy mianownik wyrażenia (3.12)

$$M = \left(2 - \frac{\omega^2}{a_2^2 \alpha_n^2}\right) - 4\sqrt{1 - \frac{\omega^2}{a_1^2 \alpha_n^2}} \sqrt{1 - \frac{\omega^2}{a_2^2 \alpha_n^2}} = 0, \tag{3.13}$$

co odpowiada przy danym ω takiemu α_n, że $\xi = \omega/\alpha_n$ spełnia równanie $M(\xi) = 0$, identyczne z równaniem dla fali powierzchniowej Rayleigha. Gdy dalej będziemy zmniejszać α_n tak, że $\bar{\beta}_n^2 < 0$, wtedy wystąpi wypromieniowanie jednej fali od powierzchni, gdy zaś $\bar{\gamma}_1^2 < 0$ — wypromieniowanie obu fal.

W przypadku fali bieżącej zakładamy naprężenia na brzegu w postaci

$$\sigma_{12} = 0, \qquad \sigma_{22} = -A_0 e^{ik(x_1 - vt)} \quad \text{albo} \quad \sigma_{22} = -A_0 e^{ik(x_1 + vt)}. \tag{3.14}$$

Łatwo obliczamy (por. [2])

$$u = \frac{p_0}{k\varrho a_2^2} \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{a_2^2}} \left(2 - \frac{v^2}{a_2^2}\right) e^{-k\sqrt{1 - \frac{v^2}{a_1^2}} x_2} - 2\sqrt{1 - \frac{v^2}{a_1^2}} e^{-k\sqrt{1 - \frac{v^2}{a_2^2}} x_2}}{\left(2 - \frac{v^2}{a_2^2}\right)^2 - 4\sqrt{1 - \frac{v^2}{a_1^2}} \sqrt{1 - \frac{v^2}{a_2^2}}} \tag{3.15}$$

lub dla $x_2 = 0$

$$u_2 = \frac{p_0 v^2}{k\varrho a_2^4} \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{a_1^2}}}{\left(2 - \frac{v^2}{a_2^2}\right)^2 - 4\sqrt{1 - \frac{v^2}{a_1^2}} \sqrt{1 - \frac{v^2}{a_2^2}}}. \tag{3.16}$$

Rezonans nastąpi, gdy

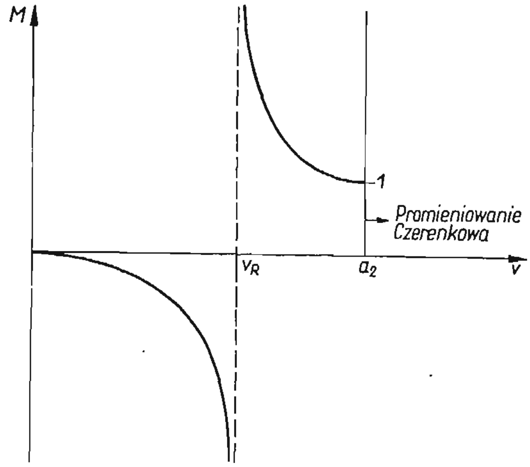
$$M = \left(2 - \frac{v^2}{a_2^2}\right) - 4\sqrt{1 - \frac{v^2}{a_1^2}} \sqrt{1 - \frac{v^2}{a_2^2}} = 0. \tag{3.17}$$

Porównując (3.17) z (3.13) widzimy, że równania te są identyczne względem ω/α_n i v, co przy $v = \omega/k$ prowadzi do równości

$$k = \alpha_n. \tag{3.18}$$

W ten sposób otrzymaliśmy odpowiedniość rezonansu na fali stojącej przy danym ω i α_n, wyliczonym z (3.13) z rezonansem na fali bieżącej, gdy jej prędkość osiągnie prędkość fali Rayleigha. Wtedy przy danym ω fala ta ma $k = \alpha_n$. Przy v rosnącym począwszy od $v > a_2$ następuje wypromieniowanie jednej, zaś od $v > a_1$ — dwóch fal Czerenkowa.

Zauważmy, że w obu przypadkach przy przejściu przez rezonans następuje zmiana fazy amplitudy, promieniowanie zaś Czerenkowa zaczyna się dopiero po przekroczeniu prędkości dźwięku (rys. 1). Przypadek $M(0) = 0$ nie powoduje nieograniczoności u_1, u_2,



Rys. 1

gdyż liczniki tych wyrażeń znikają również dla $v = 0$. Wynik powyższy otrzymaliśmy, jak już wspomniano, w rezultacie symetrii efektu rezonansu dla fal bieżących na prawo i na lewo, co w rezultacie superpozycji daje

$$\sigma_{22} = -\frac{A_0}{2}\left(e^{ik(x-vt)} + e^{ik(x+vt)}\right) = -A_0 e^{ikx} \cos kvt = -A_0 e^{ikx} \cos \omega t,$$

skąd

$$\operatorname{Re} \sigma_{22} = -A_0 \cos \omega t \cos \alpha_n x, \qquad k = \alpha_n,$$

a więc w rezultacie otrzymuje się rezonansową falę stojącą.

3.4. Równania magnetosprężystości. Przytoczymy obecnie bez obliczeń gotowe rozwiązanie dla równań magnetosprężystości doskonałego przewodnika sprężystego w pierwotnym polu magnetycznym równoległym do osi (x_1) [3].

Równania problemu dla przewodnika mają postać

$$(3.19) \quad \begin{aligned} &\left(a_1^2 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + a_2^2 \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) u_1 + (a_1^2 - a_2^2) \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_3} = 0, \\ &(a_1^2 - a_2^2) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_3} + \left(\bar{a}_1^2 \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + \bar{a}_2^2 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) u_3 = 0, \end{aligned}$$

gdzie a_1, a_2 — prędkości fal podłużnych i poprzecznych oraz $\bar{a}_i^2 = a_i^2 + \varkappa$ przy $\varkappa = B^2/4\pi\varrho$, przy czym B oznacza indukcję magnetyczną stałą, ϱ gęstość ośrodka.

Równanie pola w próżni jest

$$\nabla^2 \bar{h} - \frac{1}{c^2}\ddot{\bar{h}} = 0. \tag{3.20}$$

Warunki brzegowe są następujące:

$$\begin{gathered}(a_1^2+\varkappa)u_{3,3}+(a_1^2-2a_2^2)u_{1,1}+\frac{B}{4\pi\varrho}\bar{h}_1 = N(x,t),\\ u_{1,3}+u_{3,1}=0, \quad \bar{h}_{1,3} = B\left(u_{3,11}-\frac{1}{c^2}\ddot{u}_3\right)\end{gathered} \tag{3.21}$$

gdzie dla fali stojącej i bieżącej $N(x, t)$ wynosi odpowiednio

$$N(x,t) = -p_0 \sin\omega t \cos\alpha_n x_1, \quad N(x,t) = -p_0 e^{ik(x_1-vt)}. \tag{3.22}$$

W obu przypadkach otrzymujemy identyczny warunek rezonansu, czyli $M = 0$ w postaci:

$$\begin{aligned}M = {} & (m+b^2)(m-2)\beta_1^2\beta_2^2+(m+b^2)(m-e^2)(\beta_1^2+\beta_2^2)+\{(m+b^2)(m-e^2)+(m-2)\times\\ & \times[3m+2-me^2+b^2(m-e^2)]\}\beta_1\beta_2+b^2(m-1)(m-e^2)(\beta_1+\beta_2)-(m-e^2)[3m-\\ & -2-me^2+b^2(m-e^2)] = 0,\end{aligned} \tag{3.23}$$

przy czym β_i znajdujemy z równania

$$(m+b^2)\beta_i^2+[e^2(m+b^2+1)-b^2(m+1)-2m]\beta_i+(m-e^2)(1+b^2-e^2) = 0, \tag{3.24}$$

gdzie

$$m = \frac{a_1^2}{a_2^2}, \quad b^2 = \frac{\varkappa}{a_2^2}, \quad e^2 = \frac{\omega^2}{a_2^2\alpha_n^2} \quad \text{lub} \quad e^2 = \frac{v^2}{a_2^2} \tag{3.25}$$

(przy $v = \omega/k$, $k = \alpha_n$).

Warunek $M = 0$ odpowiada prędkości fal Rayleigha w problemie magneto-sprężystości. W zależności od wielkości b^2 fale Rayleigha, a więc i rezonans na fali bieżącej oraz również na fali stojącej jest albo możliwy, albo niemożliwy. Mogą także wystąpić przypadki nieostrego rezonansu. Dyskusja warunków istnienia fal powierzchniowych w funkcji b^2 podana jest w pracy [3]. Istotny jest tutaj wniosek analogiczny do poprzedniego, dotyczący równoważności problemu rezonansu dla fali stojącej i fali bieżącej z prędkością Rayleigha, który jest także wynikiem efektu symetrii.

3.5. Równania piezoelektryczności. Rozważmy ośrodek piezoelektryczny wypełniający półprzestrzeń przy danym warunku brzegowym dla indukcji elektrycznej w postaci fali stojącej lub bieżącej.

Równania piezoelektryczności mają postać

$$\varrho \ddot{u}_i = E_{ikmn}u_{m,nk} - r_{lki}\varphi_{,lk}, \quad D_{i,i} = 0, \tag{3.26}$$

gdzie

$$E_i = \varphi_{,i}, \quad \sigma_{ik} = E_{ikmn}(u_{m,n}+u_{n,m}), \quad D_i = r_{ikl}(u_{k,l}+u_{l,k})+\varepsilon_{ij}\varphi_j, \tag{3.27}$$

przy warunkach brzegowych

$$\sigma_{3i} = 0, \quad D_3 = N, \quad i = 1, 2, 3, \tag{3.28}$$

gdzie

$$N = -N_0 \sin\omega t \cos\alpha_n x_1 \quad \text{lub} \quad N = -N_0 e^{ik(x_1-vt)}. \tag{3.29}$$

W równaniach tych pominięto wpływ pola w próżni.

Jeżeli rozważyć [4 i 5] np. piezokwarc oraz aproksymować cechy mechaniczne za pomocą modelu izotropowego, wtedy np. dla osi x_1, x_3 równania (3.20) do (3.21) przejdą w równania następujące [4 i 5]:

$$\begin{aligned}(a_1^2-a_2^2)(u_{1,11}+u_{3,13})+a_2^2\nabla^2 u_1-\ddot{u}_1-e\varphi_{,11} &= 0,\\ (a_1^2-a_2^2)(u_{1,13}+u_{3,33})+a_2^2\nabla^2 u_3-\ddot{u}_3 &= 0,\\ \varepsilon\nabla^2\varphi+4\pi e_{11}u_{1,1} = 0, \quad e = \frac{e_{11}}{\varrho};\end{aligned} \tag{3.30}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= \varrho a_1^2 u_{1,1}+\varrho(a_1^2-2a_2^2)u_{3,3}-e_{11}\varphi_{,1} = 0,\\ \sigma_{13} &= \varrho a_2^2(u_{1,3}+u_{3,1}) = 0, \quad D_3 = \varepsilon\varphi_{,3} = N.\end{aligned} \tag{3.31}$$

Eliminując w (3.30) u przez φ otrzymamy dla φ równanie

$$\nabla^2\Box_1\Box_2\varphi+\varkappa a_2^2[\Box_2\varphi+a_1^2(1-m)\varphi_{,33}]_{,1111} = 0, \tag{3.32}$$

gdzie

$$\varkappa = \frac{4\pi e_{11}^2}{\varrho\varepsilon a_2^2} \ll 1, \quad m = \frac{a_2^2}{a_1^2}, \quad \Box_i = a_i^2\nabla^2-\frac{\partial^2}{\partial t^2}.$$

Stosując rachunek zaburzeń względem $\varkappa$ obliczamy M i warunek rezonansu dla fali stojącej i bieżącej w postaci (por. [4, 5])

$$M = p_1W_1-p_2W_2+p_3W_3 = 0, \tag{3.33}$$

gdzie

$$\begin{aligned}&W_1 = R_2Q_3-R_3Q_2, \quad W_2 = R_1Q_3-R_3Q_1, \quad W_3 = R_1Q_2-R_2Q_1,\\ &R_j = 2i\alpha_j\beta_j+(\beta_j^2+1)\gamma_j, \quad Q_j = [\beta_j^2-(1-2m)]\alpha_j-2mi\beta_j\gamma_j,\\ &p_i = \varepsilon\beta_i\end{aligned} \tag{3.34}$$

oraz

$$\begin{aligned}&\alpha_j = \frac{i}{(\beta_j^2-1+m\xi^2)(\beta_j^2-1)a_1^2}, \quad \gamma_j = \frac{\beta_j}{(\beta_j^2-1+\xi^2)(\beta_j^2-1)a_2^2},\\ &\xi = \frac{\omega}{\alpha_n a_2} \quad \text{lub} \quad \xi = \frac{v}{a_2},\end{aligned} \tag{3.35}$$

przy czym

$$\beta_i^2 = \beta_{0i}^2+b_i,$$

$$\beta_{0i}^2 = 1-m\xi^2, \quad \beta_{02}^2 = 1-\xi^2, \quad \beta_{03}^2 = 1, \quad b_1 = \frac{\varkappa}{m\xi^4}, \quad b_2 = -\varkappa\frac{1-\xi^2}{\xi^4},$$

$$b_3 = \frac{1-m(1-\xi^2)}{m\xi^4}.$$

Otrzymujemy więc podobnie jak poprzednio identyczne warunki rezonansu dla obu przypadków, to jest dla fali stojącej i bieżącej przy $v = \omega/k$.

Z przytoczonych wyżej przykładów wynika, że zasadzie wiążącej stan rezonansu na falach stojących i biegnących można przypisać charakter ogólniejszy, aniżeli wynika to z klasy przytoczonych tutaj przypadków. Mianowicie, jeżeli w problemie brzegowym półnieograniczonego ośrodka opisywanego równaniami bezdyspersyjnymi oraz operatorami samosprzężonymi (po rozdzieleniu zmiennej względem t dla fali stojącej) istnieją wartości własne, wtedy powinna zachodzić wyżej wspomniana równoważność stanów rezonansowych dla fal stojących i bieżących. Dowód powyższy można by przeprowadzić ogólnie dla bardzo szerokiej klasy (dowolnego rzędu) operatorów. Jednakże sens fizyczny oraz znaczenie praktyczne mają przeprowadzone wyżej równania jedynie dla konkretnych problemów fizycznych, które (w przypadku fali bieżącej) są związane z istnieniem fal powierzchniowych albo stanów rezonansowych, dla których interpretacja fali bieżącej lub stojącej ma sens. Dlatego zaniechamy tutaj rozważań ogólnych ograniczając się jedynie do uwagi, że podobna sytuacja powstanie i w innych zagadnieniach fizycznych wyżej wspomnianego typu.

W przypadku układów fizycznych opisanego typu wspomniana wyżej równoważność jest, jak łatwo wykazać ogólniej, wynikiem symetrii procesów rezonansu dla fal bieżących w lewo i prawo, co w efekcie daje stan superpozycyjny rezonansowej fali stojącej. To kryterium fizyczne jest równoważne cytowanemu wyżej kryterium formalnemu.

Na zakończenie zauważmy, że w przypadku układów nieograniczonych równania można bez trudu rozszerzyć i na układy dyspersyjne; wtedy oczywiście v_{kr} w układzie z falą bieżącą zależeć będzie od wektora falowego k.

4. Wnioski końcowe

Reasumując nasze rozważania należy stwierdzić, że wykazaliśmy równoważność problemów rezonansu dla fali stojącej i bieżącej (z prędkością dźwięku) w układach nieograniczonych oraz w układach półnieograniczonych, przy czym w tym przypadku równoważność ta ma miejsce dla prędkości propagacji biegnącej fali wymuszającej, odpowiadającej prędkości fali Rayleigha.

Istotnym wnioskiem jest tutaj fakt, że w układzie półnieograniczonym można uzyskać rezonans za pomocą wymuszeń na brzegu w postaci fali stojącej, przy czym równanie charakterystyczne problemu jest identyczne z równaniem charakterystycznym dla fali Rayleigha, jeżeli tylko przyjąć $\alpha_n = k$. Zjawisko to łatwo uzasadnić posługując się cechami symetrii fal bieżących w przeciwnych kierunkach, które nakładając się na siebie tworzą falę stojącą. Fakt ten może mieć zasadnicze znaczenie praktyczne, np. przy rezonansowej generacji drgań wymuszonych w cienkich przypowierzchniowych warstwach dla piezokryształów itp.

Literatura cytowana w tekście

1. Z. DŻYGADŁO, S. KALISKI, L. SOLARZ, E. WŁODARCZYK (pod redakcją naukową S. KALISKIEGO), *Drgania i fale w ciałach stałych*, PWN, Warszawa 1966.

2. S. KALISKI, *Self-excited vibration of a system of oscillators moving on the surface of an elastic semi-space*, Proc. Vibr. Probl., 1, **5** (1964).
3. S. KALISKI, D. ROGULA, *Rayleigh's waves in a magnetic field in the case of a perfect conductor*, Proc. Vibr. Probl., 5, **1** (1960).
4. S. KALISKI, *Stability of relative contactless motion of piezoelectric bodies*, Proc. Vibr. Probl., 2, 7 (1966).
5. S. KALISKI, *Čerenkov generation of ultra and hypersounds* (II-*Piezoquartz*), Proc. Vibr. Probl. 3, 7 (1966).

Резюме

О РЕЗОНАНСНЫХ ЯВЛЕНИЯХ В НЕОГРАНИЧЕННЫХ СИСТЕМАХ

В работе рассмотрена проблема резонанса в неограниченных системах, а также в краевых задачах для бегущих и стоячих волн в полуограниченных системах. В ряде задач для волновых уравнений теории упругости, магнитоупругости, пьезоэлектричества показана эквивалентность резонансных состояний для бегущих и стоячих волн.

Проанализирована связь этих явлений с излучением черенковского типа. Показано, что для класса рассматриваемых задач эквивалентность резонансных состояний для бегущих и стоячих волн вызвана симметрией решений для резонансных состояний противоположно направленных бегущих волн. В результате наложения получается резонансное состояние для стоячей волны. Данное явление дает возможность, например в задаче о полупространстве возбуждаемом на краю стоячей волной, определить резонансные параметры при помощи характеристического уравнения тождественного с характеристическим уравнением для волн Рэлея в случае резонанса бегущей волны.

Описанное явление может найти применение например при резонансном генерировании вынужденных колебаний в тонких приповерхностных слоях.

Summary

ON RESONANCE PHENOMENA IN UNBOUNDED SYSTEMS

The problem of resonance in unbounded and semi-bounded systems subject to harmonic vibrations or to travelling waves is considered. The equivalence of the resonance states due to both types of waves is demonstrated on several cases of wave equations of elasticity, magneto-elasticity and piezo-electricity; the Čerenkov-type radiation phenomena are taken into consideration. It is shown that — in the domain of problems considered here — the equivalence of resonance states of harmonic vibrations and travelling waves results from the property of symmetry of waves travelling in opposite directions; their superposition yields the state of resonance corresponding to harmonic vibrations of the medium. This makes it possible to determine the resonance parameters of a semi-space harmonically disturbed on the boundary, by means a characteristic equation which is identical with that of the Rayleigh wave.

This phenomenon can be practically applied to the resonance generation of forced vibrations in thin surface layers.

ZAKŁAD BADANIA DRGAŃ
INSTYTUTU PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 28 grudnia 1966 r.