MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
4, 5 (1967)

STATECZNOŚĆ PEŁNEGO WALCA OBCIĄŻONEGO CIŚNIENIEM HYDROSTATYCZNYM

BERNARD DUSZCZYK (WARSZAWA)

W pracy niniejszej rozważa się stateczność walca pełnego poddanego skończonej deformacji opierając się na teorii małych dodatkowych odkształceń, opracowanej przez A. E. GREENA, R. S. RIVLINA i R. T. SHIELDA [1]. Jako kryterium utraty stateczności (por. [2, 3]) przyjęto osiągnięcie przez odkształcane ciało takiego stanu, w którym problem brzegowy nałożenia małych dodatkowych deformacji ma rozwiązanie niejednoznaczne. Rozważania prowadzone są w zasadzie w sposób podobny do rozważań zawartych w pracy Z. WESOŁOWSKIEGO [3], dotyczących zagadnienia stateczności pełnej kuli.

1. Wstępny stan deformacji

Rozważać będziemy walec zbudowany z materiału hipersprężystego, ściśliwego, jednorodnego i izotropowego, o najzupełniej ogólnej charakterystyce fizykalnej. Przyjmujemy, że przed deformacją (stan $\mathring{B}$) promień walca jest równy $\mathring{a}$ oraz długość $\mathring{l}$. Pod wpływem obciążenia zewnętrznego (ciśnienia hydrostatycznego) walec doznaje skończonej deformacji przechodząc w stan B, w którym promień i wysokość są odpowiednio $\mathring{a} = \mu a$ i $l = \lambda \mathring{l}$.

Przyjmijmy teraz w B walcowy układ współrzędnych (r, ϑ, z), odkształcany wraz z ciałem. Oznaczając przez $\mathring{x}_k$ i x_k odpowiednio współrzędne kartezjańskie punktu $\mathring{P}$ w stanie $\mathring{B}$ i odpowiadającego mu punktu P w stanie B mamy

$$
\begin{gathered}
x_1 = r\cos\vartheta, \qquad x_2 = r\sin\vartheta, \qquad x_3 = z, \\
\mathring{x}_1 = \frac{r}{\mu}\cos\vartheta, \qquad \mathring{x}_2 = \frac{r}{\mu}\sin\vartheta, \qquad \mathring{x}_3 = \frac{z}{\lambda};
\end{gathered}
\tag{1.1}
$$

a stąd

$$
\mathring{g}_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\mu^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{r^2}{\mu^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda^2} \end{bmatrix}, \quad \mathring{g}^{ij} = \begin{bmatrix} \mu^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\mu^2}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 \end{bmatrix}, \quad \mathring{g} = \frac{r^2}{\lambda^2\mu^2};
\tag{1.2}
$$

$$
g_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad g^{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad g = r^2;
\tag{1.3}
$$

(1.4) $$\Gamma^1_{22} = -r, \quad \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{1}{r}, \quad \Gamma^i_{jk} = 0 \text{ dla pozostałych } i, j, k;$$

(1.5) $$I_1 = \mathring{g}^{rs} g_{rs} = 2\mu^2 + \lambda^2, \quad I_2 = \mathring{g}_{rs} g^{rs} I_3 = 2\mu^2\lambda^2 + \mu^4, \; I_3 = \frac{g}{\mathring{g}} = \mu^4\lambda^2.$$

Tensor naprężenia τ^{ij} w stanie odkształconym B ma postać

(1.6) $$\tau^{ij} = \Phi_1 \mathring{g}^{ij} + \Phi_2 b^{ij} + \Phi_3 g^{ij},$$

gdzie

$$b^{ij} = (\mathring{g}^{ij}\mathring{g}^{rs} - \mathring{g}^{ir}\mathring{g}^{js}) g_{rs}$$

(1.7) $$\Phi_1 = \frac{2}{\sqrt{I_3}} \frac{\partial W}{\partial I_1}, \quad \Phi_2 = \frac{2}{\sqrt{I_3}} \frac{\partial W}{\partial I_2}, \quad \Phi_3 = 2\sqrt{I_3} \frac{\partial W}{\partial I_3},$$

natomiast W jest funkcją energii sprężystej, odniesioną do jednostki objętości w $\mathring{B}$. Uwzględniając (1.2), (1.3), (1.5) i (1.7) mamy

(1.8) $$\begin{aligned} \tau^{11} &= r^2\tau^{22} = \mu^2\Phi_1 + (\mu^4 + \lambda^2\mu^2)\Phi_2 + \Phi_3, \\ \tau^{33} &= \lambda^2\Phi_1 + 2\mu^2\lambda^2\Phi_2 + \Phi_3, \quad \tau^{ij} = 0 \quad \text{dla} \quad i \neq j. \end{aligned}$$

Widać stąd, że równania równowagi

(1.9) $$\nabla_i \tau^{ij} = 0$$

są spełnione tożsamościowo. Oznaczając przez P siłę działającą na jednostkę powierzchni w B oraz przez q ciśnienie hydrostatyczne i uwzględniając, że dla $r = a$ $\mathbf{n} = (1, 0, 0)$ i $\mathbf{g} = (1, 0, 0)$, otrzymujemy kolejno

(1.10) $$\mathbf{P} = \tau^{ij} n_i \mathbf{g}_j,$$

(1.11) $$-q = \tau^{11} = \mu^2\Phi_1 + (\mu^4 + \lambda^2\mu^2)\Phi_2 + \Phi_3 \quad \text{dla} \quad r = a,$$

co kompletuje związki dotyczące skończonej deformacji rozważanego walca.

2. Dodatkowa mała deformacja

Poddajemy teraz ciało B dodatkowej małej deformacji $\varepsilon\mathbf{w}$, wskutek której przechodzi ono w stan $\overset{*}{B}$ bliski B (ε jest małym parametrem). Niech

(2.1) $$w = w_i \mathbf{g}^i = w^i \mathbf{g}_i, \quad w_1 = u, \quad w_2 = v, \quad w_3 = w,$$

gdzie $\mathbf{g}^i$ oraz $\mathbf{g}_i$ są kontrawariantnymi i kowariantnymi wektorami bazy w B. Podane poprzednio wielkości doznają pewnych przyrostów (por. [1]), które oznaczać będziemy kreską u góry:

(2.2) $$g'_{ij} = \nabla_i w_j + \nabla_j w_i, \quad g'^{ij} = -g^{ir} g^{js} g'_{rs}, \quad \mathbf{g}^i \mathbf{g}'^k = g^{im} g^{kj} \nabla_j w_m + g'^{ik};$$

(2.3) $$\Gamma'^i_{jk} = \nabla_j \nabla_k w^i, \quad g' = g g^{rs} g'_{rs};$$

(2.4) $$I'_1 = \mathring{g}^{rs} g'_{rs}, \quad I'_2 = \mathring{g}_{rs}(g'^{rs} I_3 + g^{rs} I'_3), \quad I'_3 = I_3 g^{rs} g'_{rs};$$

(2.5) $$\begin{aligned} \Phi'_1 &= A_{11} I'_1 + A_{12} I'_2 + (A_{13} - \Phi_1/2I_3) I'_3, \\ \Phi'_2 &= A_{21} I'_1 + A_{22} I'_2 + (A_{23} - \Phi_2/2I_3) I'_3, \\ \Phi'_3 &= (A_{31} I'_1 + A_{32} I'_2 + A_{33} I'_3) I_3 + (\Phi_3/2I_3) I'_3; \end{aligned}$$

$$A_{ij} = A_{ji} = \frac{2}{\sqrt{I_3}} \frac{\partial^2 W}{\partial I_i \partial I_j}; \tag{2.6}$$

$$b'^{ij} = (\mathring{g}^{ij}\mathring{g}^{rs} - \mathring{g}^{ir}\mathring{g}^{js})g'_{rs}; \tag{2.7}$$

$$\tau'^{ij} = \Phi'_1 \mathring{g}^{ij} + \Phi'_2 b^{ij} + \Phi'_3 g^{ij} + \Phi_2 b'^{ij} + \Phi_3 g'^{ij}. \tag{2.8}$$

Ciało $\overset{*}{B}$ jest w równowadze, jeśli

$$\nabla_i \tau'^{ij} + \Gamma'^{j}_{ir} \tau^{ir} + \Gamma'^{r}_{ir} \tau^{ij} = 0. \tag{2.9}$$

Ograniczymy dalsze rozważania do przypadku płaskiego stanu deformacji, tzn. zakładamy, że współrzędne dodatkowego odkształcenia zależą tylko od dwu zmiennych: (r, ϑ) oraz że $w_3 \equiv 0$. Mamy wówczas ([1])

$$\begin{aligned} g'_{11} &= g'^{11} = 2u_r, \\ g'_{22} &= -r^4 g'^{22} = 2(v_\vartheta + ru), \\ g'_{12} &= -r^2 g'_{12} = u_\vartheta + v_r - 2\frac{v}{r}, \\ g'_{3i} &= 0, \qquad g'^{3i} = 0; \end{aligned} \tag{2.10}$$

$$\begin{aligned} \Gamma'^1_{11} &= u_{rr}, \\ \Gamma'^1_{22} &= u_{\vartheta\vartheta} - \frac{2}{r} v_\vartheta + r u_r - u, \\ \Gamma'^2_{11} &= \frac{1}{r^2}\left(v_{rr} - \frac{2}{r} v_r + \frac{2}{r^2} v\right), \\ \Gamma'^2_{22} &= \frac{1}{r^2}(v_{\vartheta\vartheta} + 2r u_\vartheta + r v_r - 2v), \\ \Gamma'^1_{12} &= u_{r\vartheta} - \frac{1}{r} u_\vartheta - \frac{1}{r} v_r + \frac{2}{r^2} v, \\ \Gamma'^2_{12} &= \frac{1}{r^2}\left(v_{r\vartheta} - \frac{2}{r} v_\vartheta + r u_r - u\right), \end{aligned} \tag{2.11}$$

$$I'_1 = 2\mu^2\left(u_r + \frac{1}{r^2} v_\vartheta + \frac{1}{r} u\right), \quad I'_2 = (\mu^2 + \lambda^2) I'_1, \quad I'_3 = \mu^2 \lambda^2 I'_1; \tag{2.12}$$

$$\begin{aligned} \Phi'_1 &= [2\mu^2 A_{11} + 2\mu^2(\mu^2+\lambda^2) A_{12} + 2\mu^4\lambda^2 A_{13} - \Phi_1]\left(u_r + \frac{1}{r^2} v_\vartheta + \frac{1}{r} u\right), \\ \Phi'_2 &= [2\mu^2 A_{21} + 2\mu^2(\mu^2+\lambda^2) A_{22} + 2\mu^4\lambda^2 A_{23} - \Phi_2]\left(u_r + \frac{1}{r^2} v_\vartheta + \frac{1}{r} u\right), \\ \Phi'_3 &= [2\mu^6\lambda^2 A_{31} + 2\mu^6\lambda^2(\mu^2+\lambda^2) A_{32} + 2\mu^8\lambda^4 A_{33} + \Phi_3]\left(u_r + \frac{1}{r^2} v_\vartheta + \frac{1}{r} u\right); \end{aligned} \tag{2.13}$$

---

(1) $u_r = \dfrac{\partial u}{\partial r}; \quad u_{rr} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2}, \ldots$

$$
(2.14)\qquad
\begin{aligned}
b'^{11} &= 2\mu^4\left(\frac{1}{r^2}v_\vartheta+\frac{1}{r}u\right),\\
b'^{22} &= 2\mu^4 u_r,\\
b'^{33} &= 2\mu^2\lambda^2\left(u_r+\frac{1}{r^2}v_\vartheta+\frac{1}{r}u\right),\\
b'^{12} &= -\mu^4\frac{1}{r^2}\left(u_\vartheta+v_r-\frac{2}{r}v\right),\\
b'^{13} &= b'^{23} = 0;
\end{aligned}
$$

$$
(2.15)\qquad
\begin{aligned}
\tau'^{11} &= M_1\left(u_r+\frac{1}{r^2}v_\vartheta+\frac{1}{r}u\right)-2(\mu^4\Phi_2+\Phi_3)u_r,\\
r^2\tau'^{22} &= M_1\left(u_r+\frac{1}{r^2}v_\vartheta+\frac{1}{r}u\right)-2(\mu^4\Phi_2+\Phi_3)\left(\frac{1}{r^2}v_\vartheta+\frac{1}{r}u\right),\\
\tau'^{33} &= M_2\left(u_r+\frac{1}{r^2}v_\vartheta+\frac{1}{r}u\right),\\
r^2\tau'^{12} &= -(\mu^4\Phi_2+\Phi_3)\left(u_\vartheta+v_r-\frac{2}{r}v\right), \qquad \tau'^{13} = \tau'^{23} = 0,
\end{aligned}
$$

gdzie

$$
(2.16)\qquad
\begin{aligned}
M_1 &= 2\mu^4A_{11}+4(\mu^4\lambda^2+\mu^6)A_{12}+4\mu^6\lambda^2A_{13}+2(\mu^4+\lambda^2\mu^2)^2A_{22}+\\
&\quad +4(\mu^8\lambda^2+\mu^6\lambda^4)A_{23}+2\mu^8\lambda^4A_{33}-\Phi_1\mu^2-\Phi_2(\lambda^2\mu^2-\mu^4)+\Phi_3,\\
M_2 &= 2\mu^2\lambda^2+2(\mu^2\lambda^4+3\lambda^2\mu^4)A_{12}+2(\mu^4\lambda^4+\mu^6\lambda^2)(A_{13}+2A_{22})+\\
&\quad +2(\mu^8\lambda^2+3\mu^6\lambda^4)A_{23}+2\mu^8\lambda^4A_{33}-\Phi_1\lambda^2+\Phi_3.
\end{aligned}
$$

Po podstawieniu powyższych związków do równań równowagi (2.9) otrzymujemy liniowy układ dwu jednorodnych równań różniczkowych o pochodnych cząstkowych II rzędu:

$$
(2.17)\qquad
\begin{aligned}
&M\left(u_{rr}+\frac{1}{r}u_r-\frac{1}{r^2}u\right)+P\frac{1}{r^2}u_{\vartheta\vartheta}+(M-P)\frac{1}{r^2}v_{r\vartheta}-M\frac{2}{r^3}v_\vartheta = 0,\\
&(M-P)\frac{1}{r^2}u_{r\vartheta}+P\frac{1}{r^2}v_{rr}+M\frac{1}{r^4}v_{\vartheta\vartheta}+(M+P)\frac{1}{r^3}u_\vartheta-P\frac{1}{r^3}v_r = 0;
\end{aligned}
$$

gdzie

$$
(2.18)\qquad P = \mu^2\Phi_1+\mu^2\lambda^2\Phi_2, \qquad M = M_1+2P.
$$

Jak widać ze wzorów (1.5), (1.7), (2.6) i (2.16) współczynniki tego układu nie zależą od punktu, a są funkcjami (znanymi przy znanym potencjale $W(I_1, I_2, I_3)$) jedynie parametrów charakteryzujących stan wstępnej deformacji λ i μ.

3. Rozdzielenie zmiennych i rozwiązanie ogólne

Poszukiwać będziemy rozwiązań (metodą Fouriera) w postaci

$$
(3.1)\qquad u = f(r)\cos n\vartheta, \qquad v = rg(r)\sin n\vartheta,
$$

gdzie f i g są odpowiednio gładkimi funkcjami zmiennej r. Po podstawieniu (3.1) do (2.17) otrzymujemy układ dwu równań różniczkowych zwyczajnych z niewiadomymi funkcjami $f(r)$ i $g(r)$ i parametrem n ($n = 0, 1, 2, \ldots$):

$$
\begin{aligned}
&M\left(f''+\frac{1}{r}f'-\frac{1}{r^2}f\right)-P\frac{n^2}{r^2}f+(M-P)\frac{n}{r}g'-(M+P)\frac{n}{r^2}g = 0,\\
&P\left(g''+\frac{1}{r}g'-\frac{1}{r^2}g\right)-M\frac{n^2}{r^2}g-(M-P)\frac{n}{r}f'-(M+P)\frac{n}{r^2}f = 0.
\end{aligned} \tag{3.2}
$$

Rozwiązaniami ogólnymi tego układu (dla danej wartości parametru n) są

$$
f_n(r) = \sum_{i=1}^{4}{}' C_{ni}r^{x_i}, \qquad g_n(r) = \sum_{i=1}^{4}{}' C_{ni}\gamma_i r^{x_i}, \tag{3.3}
$$

gdzie

$$
\gamma_i = \frac{n[P(x_i-1)-M(x_i+1)]}{Mn^2-P(x_i^2-1)}; \tag{3.4}
$$

C_{ni} są stałymi całkowania a x_i pierwiastkami wielomianu charakterystycznego

$$
x^4-2(n^2+1)x^2+(n^2-1)^2 = 0, \tag{3.5}
$$

równymi odpowiednio

$$
x_1 = n+1, \quad x_2 = n-1, \quad x_3 = -n+1, \quad x_4 = -n-1, \tag{3.6}
$$

gdy $n > 1$. Dla $n = 0$ i $n = 1$ pierwiastki są wielokrotne i rozwiązanie ma postać

$$
f_0(r) = C_{01}r+C_{02}r^{-1} \quad \text{dla (}^1\text{)} \quad n = 0, \tag{3.7}
$$

$$
\begin{cases}
f_1(r) = C_{11}r^2+C_{12}+C_{13}\ln r+C_{14}r^{-2},\\
g_1(r) = C_{11}\gamma_1 r^2+C_{12}\gamma_2+C_{13}\gamma_3\left(\ln r+\dfrac{M-P}{M+P}\right)+C_{14}\gamma_4 r^{-2} \quad \text{dla} \quad n = 1.
\end{cases} \tag{3.8}
$$

Ponieważ dla $r = 0$ przemieszczenia są ograniczone i ponieważ wykluczamy z rozważań ruch sztywny, należy przyjąć $C_{02} = 0$, $C_{12} = 0$, $C_{n3} = 0$, $C_{n4} = 0$ i ostatecznie mamy

$$
f_0(r) = C_{01}r, \quad g_0(r) \equiv 0 \quad \text{dla} \quad n = 0, \tag{3.9}
$$

$$
\begin{cases}
f_1(r) = C_{11}r^2\\
g_1(r) = C_{11}\dfrac{P-3M}{M-3P}r^2;
\end{cases} \quad \text{dla (}^2\text{)} \quad n = 1, \tag{3.10}
$$

$$
\begin{cases}
f_n(r) = C_{n1}r^{n+1}+C_{n2}r^{n-1},\\
g_n(r) = C_{n1}\dfrac{Pn-M(n+2)}{Mn-P(n+2)}r^{n+1}-C_{n2}r^{n-1} \quad \text{dla} \quad n > 1.
\end{cases} \tag{3.11}
$$

4. Warunki utraty stateczności

W poprzednim punkcie znaleźliśmy rozwiązanie ogólne układu (3.2); obecnie rozważymy szereg różnych przypadków warunków brzegowych narzuconych na funkcje $f_n(r)$ i $g_n(r)$. Interesować nas będzie nie tyle znalezienie rozwiązania danego zagadnienia brze-

(1) Dla $n = 0$ $\quad v = 0$, można więc, nie zawężając ogólności, przyjęć $g_0(r) \equiv 0$.

(2) Przyjmujemy $u|_{r=0} = 0$.

gowego, ile otrzymanie warunku, przy którym zagadnienie to ma rozwiązanie niejednoznaczne. Warunek taki przyjmować będziemy jako warunek utraty stateczności (por. [2]).

Są dwa różne podejścia do zagadnienia utraty stateczności: statyczne i kinetyczne. Wychodzą one z różnych definicji stateczności i w zasadzie prowadzą do różnych wyników. Tylko w przypadku, gdy dane zagadnienie brzegowe jest samosprzężone, oba podejścia są równoważne. W pracy niniejszej przez utratę stateczności rozumie się osiągnięcie takiego stanu, w którym problem brzegowy dla małych dodatkowych deformacji nałożonych na odkształcenie skończone ma więcej niż jedno rozwiązanie (podejście statyczne). Problem samosprzężoności niektórych przypadków rozważonych tutaj zagadnień brzegowych zbadany został w pracach [2 i 3].

4.1 Warunki brzegowe w przemieszczeniach. Założymy obecnie, że w procesie dodatkowej deformacji punkty powierzchni ciała nie zmieniły położenia, tzn. założymy, że

$$u = v = 0 \quad \text{dla} \quad r = a. \tag{4.1}$$

Uwzględniając to w (3.9) i (3.10) łatwo stwierdzamy, że warunkom (4.1) dla $n = 0$ oraz $n = 1$ odpowiada jedynie rozwiązanie trywialne: $g_0(r) = f_0(r) = f_1(r) = g_1(r) = 0$. Dla $n > 1$ mamy na mocy (3.11)

$$C_{n1}a^{n+1} + C_{n2}a^{n-1} = 0, \quad C_{n1}\frac{Pn - M(n+2)}{Mn - P(n+2)}a^{n+1} - C_{n2}a^{n-1} = 0. \tag{4.2}$$

Jest to jednorodny układ równań algebraicznych, mający zawsze przynajmniej jedno rozwiązanie, mianowicie $C_{n1} = C_{n2} = 0$, odpowiadające zerowej dodatkowej deformacji. Układ ten ma ponadto rozwiązania nietrywialne, jeśli wyznacznik charakterystyczny znika, co jest równoważne warunkowi

$$M = -P. \tag{4.3}$$

Równość (4.3) zgodnie z poprzednimi uwagami uważać będziemy za warunek utraty stateczności przy warunkach brzegowych (4.1).

4.2 Warunki brzegowe przemieszczeniowo-naprężeniowe. Założymy teraz, że dla $r = a$ składowa dodatkowego przemieszczenia w kierunku promienia znika oraz wektor naprężenia jest prostopadły do powierzchni $r = a$, tzn:

$$\begin{gathered} u = 0 \\ \mathbf{t} + \varepsilon\mathbf{t}' = k(\mathbf{n} + \varepsilon\mathbf{n}') \quad \text{dla} \quad r = a, \end{gathered} \tag{4.4}$$

gdzie k jest dowolne. Zgodnie z (1.10) i (4.4)

$$\mathbf{P} + \varepsilon\mathbf{P}' = (\tau^{ij} + \varepsilon\tau'^{ij})(n_i + \varepsilon n_i')(\mathbf{g}_j + \varepsilon\mathbf{g}_j') = k(\mathbf{n} + \varepsilon\mathbf{n}'), \tag{4.5}$$

przy czym

$$\mathbf{n} + \varepsilon\mathbf{n}' = \frac{\mathbf{g}^1 + \varepsilon\mathbf{g}'^1}{\sqrt{g^{11} + \varepsilon g'^{11}}}, \quad \mathbf{n} = (1, 0, 0), \ \mathbf{n}' = \left(-\frac{1}{2}g'^{11}, 0, 0\right). \tag{4.6}$$

Równość (4.5) przyjmie teraz postać

$$(\tau^{1j} + \varepsilon\tau'^{1j})(\mathbf{g}_j + \varepsilon\mathbf{g}_j') = k(\mathbf{g}^1 + \varepsilon\mathbf{g}'^1). \tag{4.7}$$

Mnożąc skalarnie obie strony równania przez wektor $(\mathbf{g}_1 + \varepsilon\mathbf{g}_1')$ rugujemy współczynnik k i ostatecznie otrzymujemy

$$u = 0, \quad \tau'^{12} = 0 \quad \text{dla} \quad r = a, \tag{4.8}$$

co jest równoważne następującym warunkom na brzegu $r = a$

$$\begin{cases} u = 0, \\ u_\vartheta + v_r - \dfrac{2}{r} v = 0. \end{cases} \tag{4.9}$$

Po podstawieniu (3.1) i (3.11) do (4.9) mamy

$$\begin{cases} C_{n1} a^{n+1} + C_{n2} a^{n-1} = 0, \\ C_{n1} \dfrac{(P-M)n(n+1)}{Mn - P(n+2)} a^{n+1} - C_{n2}(n-1) a^{n-1} = 0 \quad \text{dla } (^3) \quad n > 1 \end{cases} \tag{4.10}$$

Warunkiem istnienia rozwiązań nietrywialnych tego układu, a tym samym warunkiem utraty stateczności, w przypadku warunków brzegowych (4.4) jest

$$P = M \cdot n. \tag{4.11}$$

4.3 Warunki brzegowe w naprężeniach. A. Rozpatrzymy obecnie przypadek obciążenia powierzchni bocznej walca w stanie $\overset{*}{B}$ ciśnieniem hydrostatycznym q, a więc siłą ciągłą, normalną do aktualnej powierzchni i o stałej intensywności

$$(\tau^{ij} + \varepsilon \tau'^{ij})(n_i + \varepsilon n_i')(\mathbf{g}_j + \varepsilon \mathbf{g}_j') = -q(\mathbf{n} + \varepsilon \mathbf{n}'). \tag{4.12}$$

Po pomnożeniu obu stron równania (4.12) skalarnie przez $\mathbf{g}^k + \varepsilon \mathbf{g}'^k$ i wykorzystaniu (1.11) i (4.6) otrzymujemy

$$\tau'^{1k} - \tau^{11} g'^{1k} = 0 \quad \text{dla} \quad r = a, \tag{4.13}$$

a następnie

$$\begin{cases} M u_r + (M - 2P)\left(\dfrac{1}{r^2} v_\vartheta + \dfrac{1}{r} u\right) = 0 \\ u_\vartheta + v_r - \dfrac{2}{r} v = 0 \end{cases} \quad \text{dla} \quad r = a; \tag{4.14}$$

$$\begin{cases} C_{n1} a^{n+1} \dfrac{(P-M)\cdot(n+1)\cdot(n-2)\cdot P}{Mn - P(n+2)} + C_{n2} a^{n-1} P(n-1) = 0, \\ C_{n1} a^{n+1} \dfrac{(P-M)n(n+1)}{Mn - P(n+2)} - C_{n2} a^{n-1}(n-1) = 0. \end{cases} \tag{4.15}$$

Warunkiem utraty stateczności jest tutaj

$$P(P-M) = 0. \tag{4.16}$$

B. Załóżmy, że powierzchnia ciała obciążona jest siłą stałą co do kierunku i modułu (proporcjonalna i prostopadła do powierzchni w B). Mamy wówczas

$$(\tau^{ij} + \varepsilon \tau'^{ij})(n_i + \varepsilon n_i')(\mathbf{g}_j + \varepsilon \mathbf{g}_j') = -q\mathbf{n} \quad \text{dla} \quad r = a. \tag{4.17}$$

---

(3) Dla $n = 0$ i $n = 1$ jednorodnym warunkom brzegowym (a takie tylko rozważamy) tak naprężeniowym jak i przemieszczeniowym odpowiada $w_i \equiv 0$. Z tego względu w dalszych rozważaniach pomijać będziemy te oba przypadki.

Uwzględniając (1.11) i (4.6), następnie mnożąc (4.17) skalarnie przez $\mathbf{g}^k+\varepsilon\mathbf{g}'^k$ otrzymujemy kolejno

$$(4.18) \qquad (\tau^{1j}+\varepsilon\tau'^{1j})\left(1-\frac{1}{2}\varepsilon g'^{11}\right)(\mathbf{g}_j+\varepsilon\mathbf{g}'_j) = \tau^{11}\frac{\mathbf{g}^1}{\sqrt{g^{11}}} \quad \text{dla} \quad r=a,$$

$$(4.19) \qquad \tau'^{1k}-\frac{1}{2}\tau^{1k}g'^{11}-\tau^{11}\mathbf{g}^1\cdot\mathbf{g}'^k = 0 \quad \text{dla} \quad r=a$$

i dalej po wykorzystaniu (2.2)

$$(4.20) \qquad \begin{cases} \tau'^{11}+2\tau^{11}u_r = 0 \\ \tau'^{12}+\dfrac{1}{r^2}\tau^{11}\left(v_r-\dfrac{v}{r}\right) = 0 \end{cases} \quad \text{dla} \quad r=a;$$

$$(4.21) \qquad \begin{cases} Mu_r-(M-2P)\left(\dfrac{1}{r^2}v_\vartheta+\dfrac{1}{r}u\right) = 0 \\ \tau^{11}\left(v_r-\dfrac{v}{r}\right)+(P-\tau^{11})\left(u_\vartheta+v_r-2\dfrac{v}{r}\right) = 0 \end{cases} \quad \text{dla} \quad r=a;$$

$$(4.22) \qquad \begin{aligned} &C_{n1}a^{n+1}\frac{P(P-M)(n+1)(n-2)}{Mn-P(n+2)}+C_{n2}a^{n-1}P(n-1) = 0, \\ &C_{n1}a^{n+1}\frac{(n+1)[n(\tau^{11}-2P)(M-P)-2M\tau^{11}]}{M\cdot n-P\cdot(n+2)}+C_{n2}a^{n-1}(\tau^{11}-2P)(n-1) = 0 \end{aligned}$$

i ostatecznie warunek utraty stateczności ma postać

$$(4.23) \qquad P[(P-M)(\tau^{11}-2P)(n-1)+M\tau^{11}] = 0.$$

C. Obciążymy teraz powierzchnię walca siłą prostopadłą do powierzchni w stanie $\overset{*}{B}$, ale proporcjonalną do powierzchni w stanie B. Mamy wówczas

$$(4.24) \qquad (\tau^{ij}+\varepsilon\tau'^{ij})(n_i+\varepsilon n'_i)(\mathbf{g}_j+\varepsilon\mathbf{g}'_j)d\overset{*}{S} = -q(\mathbf{n}+\varepsilon\mathbf{n}')dS, \quad r=a,$$

$$(4.25) \qquad (\tau^{1j}+\varepsilon\tau'^{1j})(\mathbf{g}_j+\varepsilon\mathbf{g}'_j)\frac{d\overset{*}{S}}{dS} = \tau^{11}(\mathbf{g}^1+\varepsilon\mathbf{g}'^1) \quad \text{dla} \quad r=a.$$

Ponieważ elementy powierzchniowe w stanie B i $\overset{*}{B}$ wyrażają się wzorami (por. [4])

$$(4.26) \qquad d\overset{*}{S} = \sqrt{g+\varepsilon g'}\sqrt{g^{11}+\varepsilon g'^{11}}\,d\vartheta\, dz, \qquad dS = \sqrt{gg^{11}}\,d\vartheta\, dz,$$

więc stosunek tych elementów można wyrazić następująco:

$$(4.27) \qquad \frac{d\overset{*}{S}}{dS} = 1+\varepsilon\frac{1}{2}\left(\frac{g'}{g}+\frac{g'^{11}}{g^{11}}\right) = 1+\varepsilon\left(\frac{1}{r^2}v_\vartheta+\frac{1}{r}u\right).$$

Po podstawieniu (4.27) do (4.25) i pomnożeniu otrzymanej równości przez $\mathbf{g}^k+\varepsilon\mathbf{g}'^k$ otrzymujemy kolejno

$$(4.28) \qquad \tau'^{1k}+\tau^{1k}\left(\frac{1}{r^2}v_\vartheta+\frac{1}{r}u\right)-\tau^{11}g'^{1k} = 0 \quad \text{dla} \quad r=a;$$

$$(4.29) \qquad \begin{cases} Mu_r+(M-2P+\tau^{11})\left(\dfrac{1}{r^2}v_\vartheta+\dfrac{1}{r}u\right) = 0 \\ u_\vartheta+v_r-\dfrac{2}{r}v = 0 \end{cases} \quad \text{dla} \quad r=a;$$

$$(4.30)\qquad \begin{aligned} &C_{n1}a^{n+1}(n+1)\left[M+\frac{P(n-2)-Mn}{Mn-P(n+2)}(M-2P+\tau^{11})\right]+C_{n2}a^{n-1}(2P-\tau^{11})(n-1)=0,\\ &C_{n1}a^{n+1}\frac{(P-M)n(n+1)}{Mn-P(n+2)}-C_{n2}a^{n-1}(n-1)=0 \end{aligned}$$

i ostatecznie warunek utraty stateczności

$$(4.31)\qquad P(\tau^{11}-2P+2M)=0.$$

Literatura cytowana w tekście

1. A. E. GREEN, R. S. RIVLIN, R. T. SHIELD, *General theory of small elastic deformations superposed on finite elastic deformations*, Proc. Roy. Soc., **A 211** (1952).
2. GUO-ZHONG-HENG, W. URBANOWSKI, *Stability of non-conservative systems in the theory of elasticity of finite deformations*, Arch. Mech. Stos., 2, **15** (1963).
3. Z. WESOŁOWSKI, *Stability of a full elastic sphere uniformly waded on the surface*, Arch. Mech. Stos., 5, **16** (1964).
4. A. E. GREEN, W. ZERNA, *Theoretical Elasticity*, Oxford 1954.

Резюме

УСТОЙЧИВОСТЬ СПЛОШНОГО ЦИЛИНДРА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ГИДРОСТАТИЧЕСКОГО ДАВЛЕНИЯ

Сплошной цилиндр из упругого, однородного, изотропного и сжимаемого материала с произвольной физической нелинейностью подвергается предварительной конечной деформации. После этого накладывается дополнительная малая плоская деформация. Общее решение системы линейных дифференциальных уравнений в частных производных, описывающих эту задачу, было построено по методу Фурье. Для некоторых частных случаев нагружения и закрепления сформулированы краевые задачи и даны условия потери устойчивости.

Summary

STABILITY OF A FULL CIRCULAR CYLINDER LOADED WITH HYDROSTATIC PRESSURE

A homogeneous isotropic non-linearly elastic full cylinder is subjected to initial finite deformation corresponding to any hydrostatic pressure. Next, a set of linear partial differential equations is obtained as the result of small additional plane deformations. On applying the Fourier method, the general solution of the problem is determined. Boundary value problems and conditions of stability loss are also discussed for some special cases of loading.

ZAKŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGŁYCH
INSTYTUTU PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 2 grudnia 1966 r.