MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
1, 4 (1966)

UKŁADY WSPÓŁRZĘDNYCH PROSTOKREŚLNYCH W GEOMETRII POWIERZCHNI ŚRODKOWEJ CIENKICH POWŁOK

KRZYSZTOF WILMAŃSKI I CZESŁAW WOŹNIAK (ŁÓDŹ)

1. W opracowaniach z teorii powłok cienkich zajmowany przez materiał powłoki obszar w trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej bywa z reguły parametryzowany układem tzw. współrzędnych normalnych. Układ ten jest utworzony z rodziny powierzchni $\xi^3 = \text{const}$ równoległych do środkowej powierzchni powłoki ($\xi^3 = 0$) oraz z dalszych dwóch rodzin $\xi^\delta = \text{const}$, $\delta = 1, 2$, ortogonalnych do poprzednich i danych sposobem parametryzacji powierzchni środkowej. Układy współrzędnych normalnych są w teorii powłok cienkich zwłaszcza wtedy dogodne w zastosowaniu, gdy odkształcenie powłoki przebiega zgodnie z założeniami geometrycznymi teorii Kirchhoffa-Love'a. Założenia te są bowiem od razu spełnione, gdy układ współrzędnych normalnych ξ^1, ξ^2, ξ^3 przyjmiemy jako konwekcyjny (odkształcający się wraz z powłoką) oraz jednocześnie gdy potraktujemy ξ^3 jako odległość dowolnego punktu materialnego powłoki od jej powierzchni środkowej.

Zupełnie ogólny sposób podejścia do równań teorii powłok cienkich uzyskamy nie wprowadzając współrzędnych normalnych, lecz parametryzując powierzchnię środkową powłoki oraz jej przestrzeń dwoma niezależnymi układami współrzędnych: powierzchniowym i przestrzennym (por. np. [1]). Przyjęcie takie prowadzi jednakże do złożonej postaci równań teorii i nie jest dogodne do zastosowania metody współrzędnych konwekcyjnych.

W przedstawionym komunikacie będą omówione układy współrzędnych nazwane prostokreślnymi, które można przyjąć za konwekcyjne również, gdy na odkształcenie powłoki nie są narzucone więzy geometryczne teorii Kirchhoffa-Love'a, lecz gdy rozważamy teorię «drugiego przybliżenia». Uwzględniamy w ramach tej teorii wydłużenie lub skrócenie elementów materialnych powłoki, normalnych w jednej konfiguracji do tej powierzchni środkowej, oraz zmianę kąta nachylenia tychże elementów do powierzchni środkowej. Takie podejście do zagadnienia można znaleźć w pracy [3].

Szczególnymi przypadkami prostokreślnych układów współrzędnych są układy normalne.

Oznaczenia. Przyjmujemy, że wskaźniki kontra- i kowariantne, oznaczone literami greckimi, przebiegają ciąg 1, 2, a oznaczone literami alfabetu łacińskiego ciąg 1, 2, 3. W stosunku do wszystkich wskaźników zastosowano konwencję sumacyjną.

Przecinkiem oznaczono w pracy różniczkowanie cząstkowe względem zmiennych znajdujących się po jego prawej stronie. Np.: $g_{ij,k} = \partial g_{ij}/\partial \xi^k$. Kreska pionowa oznacza w pracy pochodną kowariantną. Nawias zwykły obejmujący wskaźniki oznacza część symetryczną tensora względem wydzielonych wskaźników, nawias kwadratowy — część antysymetryczną.

W stosunku do wielkości o charakterze wektorowym zastosowano notację absolutną. Poniżej zestawiono inne ważniejsze oznaczenia:

$\{\xi^i\}$ układ współrzędnych prostokreślnych,
$\hat{\mathbf{r}}(\xi^i)$ promień wodzący przestrzeni otaczającej rozważaną powierzchnię π,
$\mathbf{r}(\xi^\delta)$ promień wodzący powierzchni π,
$\hat{\mathbf{g}}_i$ wektory bazy układu $\{\xi^i\}$ w przestrzeni otaczającej powierzchnię π,
$\mathbf{g}_i$ wektory bazy układu $\{\xi^i\}$ na powierzchni π (dla $\xi^3 = 0$),
$\hat{g}_{ij}$ tensor metryczny układu $\{\xi^i\}$,
$g_{ij}, 'g_{ij}, ''g_{ij}$ pierwszy, drugi i trzeci tensor podstawowy powierzchni π,
$[\widehat{ij, k}]$; $\widehat{\left\{ {i \atop jk} \right\}}$ symbole Christoffela pierwszego i drugiego rodzaju w przestrzeni otaczającej powierzchnię π,
$[ij; k)]$; $\left\{ {i \atop jk} \right\}$ symbole Christoffela dla $\xi^3 = 0$,
$\hat{R}_{prst}$ tensor krzywizny Riemanna-Christoffela.

2. Niech równanie powierzchni środkowej powłoki, którą dalej nazywać będziemy powierzchnią π, będzie dane równaniem:

(2.1) $$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\xi^1, \xi^2),$$

gdzie $\{\xi^\delta\}$, $\delta = 1, 2$, jest układem współrzędnych krzywoliniowych przyjętym na tej powierzchni. Wektory bazy tego układu zapiszemy wtedy w postaci

(2.2) $$\mathbf{g}_\delta = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi^\delta} = \mathbf{r}_{,\delta}.$$

Przyjmijmy na rozpatrywanej powierzchni pole wektorowe

$$\mathbf{g}_3 = \mathbf{g}_3(\xi^1, \xi^2),$$

najeżające ją w dowolny sposób. O funkcji $\mathbf{g}_3$ zakładamy, że jest dostatecznie regularna dla dopuszczenia operacji wykonywanych na niej w dalszym ciągu pracy. Punkt $\hat{A}$ leżący w otoczeniu powierzchni π (przez otoczenie powierzchni rozumiemy tu obszar jedno-jednoznaczności parametryzacji układem $\{\xi^i\}$) można wtedy parametryzować równaniem:

(2.3) $$\hat{\mathbf{r}}(\xi^i) = \mathbf{r}(\xi^\delta) + \xi^3 \mathbf{g}_3(\xi^\delta), \quad i = \delta, 3.$$

Uzależnia ono punkty przestrzeni otaczającej powierzchnię jedynie od wielkości na niej danych (rys. 1).

Układ $\{\xi^\delta, \xi^3\}$ będziemy dalej oznaczać $\{\xi^i\}$ i nazywać układem współrzędnych *prostokreślnych*. Jego linie parametryczne dla $\xi^3 = 0$ pokrywają się z liniami parametrycznymi układu współrzędnych $\{\xi^\delta\}$, a linie parametryczne $\xi^\delta = \text{const}$ są prostymi o kierunkach danych na powierzchni π przez pole wektorowe $\mathbf{g}_3$. Wektory bazy układu prostokreślnego określa równanie

(2.4) $$\hat{\mathbf{g}}_i = \frac{\partial \hat{\mathbf{r}}}{\partial \xi^i} = \hat{\mathbf{r}}_{,i}.$$

Kwadrat elementu liniowego z otoczenia powierzchni π zapiszemy wtedy w postaci

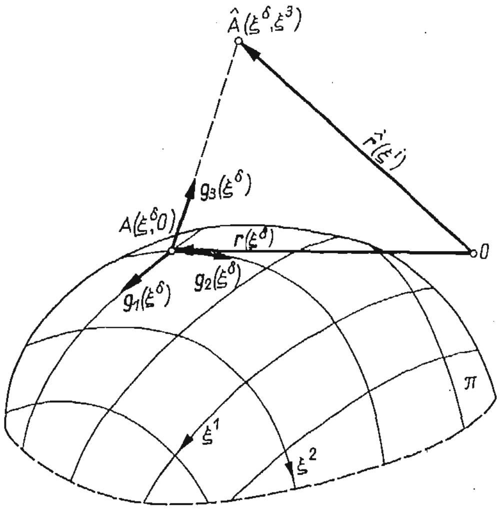
$$ds^2 = d\hat{\mathbf{r}} \cdot d\hat{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{r}}_{,i} \cdot \hat{\mathbf{r}}_{,j} d\xi^i d\xi^j = (\mathbf{r} + \xi^3 \mathbf{g}_3)_{,i} \cdot (\mathbf{r} + \xi^3 \mathbf{g}_3)_{,j} d\xi^i d\xi^j,$$

skąd po przekształceniach otrzymamy

$$ds^2 = \hat{g}_{ij}\, d\xi^i d\xi^j = [g_{ij} + 2\xi^3\, {}'g_{(ij)} + (\xi^3)^2\, {}''g_{ij}]\, d\xi^i d\xi^j, \tag{2.5}$$

gdzie $\hat{g}_{ij}$ jest tensorem metrycznym przestrzeni otaczającej powierzchnię π. Prócz tego w powyższym wzorze wykorzystano następujące oznaczenia:

$$\left\{\begin{array}{ll} g_{ij} \overset{\mathrm{df}}{=} \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j & \text{pierwszy tensor podstawowy powierzchni,} \\ {}'g_{ij} \overset{\mathrm{df}}{=} \mathbf{g}_{3,i} \cdot \mathbf{g}_j & \text{drugi tensor podstawowy powierzchni,} \\ {}''g_{ij} \overset{\mathrm{df}}{=} \mathbf{g}_{3,i} \cdot \mathbf{g}_{3,j} & \text{trzeci tensor podstawowy powierzchni.} \end{array}\right. \tag{2.6}$$



Rys. 1

Jak łatwo sprawdzić, trzeci tensor podstawowy można wyrazić przez drugi tensor podstawowy i składowe kontrawariantne pierwszego tensora podstawowego. Zależność ta ma postać:

$${}''g_{ij} = {}'g_{ik}\, {}'g_{jl}\, g^{kl}, \tag{2.7}$$

gdzie

$$g_{pl}\, g^{kl} \overset{\mathrm{df}}{=} \delta^k_p.$$

Bezpośrednio z definicji wynika, że składowe kowariantne drugiego tensora podstawowego tworzą następującą macierz:

$$[{}'g_{ji}] = \begin{bmatrix} {}'g_{\delta\lambda} & {}'g_{\delta 3} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{2.8}$$

3. W dalszym ciągu pracy będziemy również korzystać ze składowych kontrawariantnych tensora metrycznego $\hat{g}_{ij}$. Znajdziemy je w postaci rozwinięcia w szereg potęgowy:

$$\hat{g}^{kj} = \sum_{\Lambda=0}^{\infty} \frac{\overset{\Lambda}{g}{}^{kj}}{\Lambda!} (\xi^3)^{\Lambda}, \tag{3.1}$$

gdzie

$$g^{kj}_{A} \overset{\text{df}}{=} \frac{\partial^A \hat{g}^{kj}}{\partial(\xi^3)^A} \, (\xi^3 = 0). \tag{3.2}$$

Wykorzystamy teraz związek wiążący składowe kontra- i kowariantne tensora metrycznego

$$\hat{g}_{ik}\hat{g}^{kj} = \delta^j_i. \tag{3.3}$$

Po podstawieniu do równań (3.3) zależności (2.5) i (3.1) oraz po przyrównaniu współczynników przy tych samych potęgach ξ^3 otrzymujemy:

$$\hat{g}^{kj} = g^{kj} - 2\xi^3\, 'g^{(kj)} + (\xi^3)^2(4\, 'g^{(kn)}\, 'g^{(ji)} - 'g^{kn}\, 'g^{ji})g_{in} + \dots . \tag{3.4}$$

Wykorzystano tu równości $(2.7)_2$ oraz związek

$$'g^{kj} \overset{\text{df}}{=} 'g_{mn} g^{km} g^{jn}. \tag{3.5}$$

4. Przejdziemy obecnie do określenia operacji różniczkowania w otoczeniu powierzchni π. Do wyznaczenia pochodnej kowariantnej musimy znać symbole Christoffela. Można je znaleźć w sposób prosty korzystając ze związków:

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{g}}_{\delta,\lambda} = \hat{\mathbf{r}}_{,\delta\lambda} = \mathbf{g}_{\delta,\lambda} + \xi^3 \mathbf{g}_{3,\delta\lambda}, \\ \hat{\mathbf{g}}_{\delta,3} = \hat{\mathbf{r}}_{,\delta 3} = \mathbf{g}_{3,\delta}, \\ \hat{\mathbf{g}}_{3,\delta} = \hat{\mathbf{r}}_{,3\delta} = \mathbf{g}_{3,\delta}, \\ \hat{\mathbf{g}}_{3,3} = \mathbf{g}_{3,3} = 0. \end{cases} \tag{4.1}$$

Ponieważ (por. np. [2], str. 26)

$$\widehat{[ij; k]} = \hat{\mathbf{g}}_k \cdot \hat{\mathbf{g}}_{i,j}, \tag{4.2}$$

więc dla $\xi^3 = 0$ otrzymamy następujące wzory:

$$\begin{cases} [\delta\lambda; \sigma] = \widehat{[\delta\lambda; \sigma]}_{(\xi^3=0)} = \frac{1}{2}(g_{\delta\sigma,\lambda} + g_{\lambda\sigma,\delta} - g_{\delta\lambda,\sigma}), \\ [\delta\lambda; 3] = \widehat{[\delta\lambda; 3]}_{(\xi^3=0)} = g_{3(\delta,\lambda)} - 'g_{(\delta\lambda)}, \\ [\delta 3; i] = \widehat{[\delta 3; i]}_{(\xi^3=0)} = 'g_{\delta i}, \\ [33; \delta] = [33; 3] = 0. \end{cases} \tag{4.3}$$

Przez podniesienie wskaźnika pierwszym tensorem podstawowym powierzchni dochodzimy do zależności:

$$\begin{cases} \left\{ {\sigma \atop \delta\lambda} \right\} = g^{i\sigma}[\delta\lambda; i] = g^{\sigma\varphi}[\delta\lambda; \varphi] + g^{\sigma 3}(g_{3(\delta,\lambda)} - 'g_{(\delta\lambda)}), \\ \left\{ {3 \atop \delta\lambda} \right\} = g^{i3}[\delta\lambda; i] = g^{\varphi 3}[\delta\lambda; \varphi] + g^{33}(g_{3(\delta,\lambda)} - 'g_{(\delta\lambda)}), \\ \left\{ {i \atop 3\delta} \right\} = g^{ij}[3\delta; j] = 'g_\delta^{\ i}, \\ \left\{ {\delta \atop 33} \right\} = \left\{ {3 \atop 33} \right\} = 0. \end{cases} \tag{4.4}$$

Wykorzystując powyższe związki mamy na przykład dla pola tensorowego T_{ij} na powierzchni ($\xi^3 = 0$) następujące wzory:

$$
(4.5)\qquad \begin{cases}
T_{ij}|_{\varphi} = T_{ij,\varphi} - \left\{ {k \atop i\varphi} \right\} T_{kj} - \left\{ {k \atop j\varphi} \right\} T_{ik}, \\
T_{\delta\lambda}|_{3} = T_{\delta\lambda,3} - \left\{ {k \atop \delta 3} \right\} T_{k\lambda} - \left\{ {k \atop \lambda 3} \right\} T_{\delta k}, \\
T_{\delta 3}|_{3} = T_{\delta 3,3} - \left\{ {k \atop \delta 3} \right\} T_{k3}, \\
T_{3\lambda}|_{3} = T_{3\lambda,3} - \left\{ {k \atop \lambda 3} \right\} T_{3k}, \\
T_{33}|_{3} = T_{33,3}.
\end{cases}
$$

5. Podane powyżej symbole Christoffela pozwalają napisać równania istnienia powierzchni przy nieortogonalnym najeżeniu. Punktem wyjścia będzie tu własność przestrzeni euklidesowej, stanowiącej otoczenie powierzchni π. Wiemy mianowicie, że w tej przestrzeni tensor krzywizny Riemanna-Christoffela jest równy zeru [2]. Można to zapisać w postaci

$$
(5.1)\qquad \hat{R}_{prst} = 0,
$$

gdzie

$$
(5.2)\qquad \hat{R}_{prst} = \frac{1}{2}(\hat{g}_{pt,rs} + \hat{g}_{rs,pt} - \hat{g}_{ps,rt} - \hat{g}_{rt,ps}) + \hat{g}^{mn}([\hat{rs}; m][\hat{pt}; n] - [\hat{rt}; m][\hat{ps}; n]).
$$

Związki (5.1) i (5.2) prowadzą do następujących zależności:

$$
(5.3)\qquad \begin{aligned}
\hat{R}_{1313}(\xi^3 = 0) &= R_{1313} = 0, \\
\hat{R}_{2323}(\xi^3 = 0) &= R_{2323} = 0, \\
\hat{R}_{1323}(\xi^3 = 0) &= R_{1323} = 0, \\
\hat{R}_{1212}(\xi^3 = 0) &= R_{1212} = 0, \\
\hat{R}_{2312}(\xi^3 = 0) &= R_{2312} = 0, \\
\hat{R}_{1321}(\xi^3 = 0) &= R_{1321} = 0.
\end{aligned}
$$

Wykorzystując związki (4.3), równania $(5.3)_1$ i $(5.3)_2$ zapiszemy, jak następuje:

$$
R_{\delta 3\delta 3} = \frac{1}{2}(4\,'g_{(3\delta),\delta} - 'g_{\delta}^{\cdot k}\,'g_{\delta k} - g_{33,\delta\sigma}) + g^{mn}[3\delta; m][3\delta; n] = 0 \qquad (\delta \text{ — niesumowane!}),
$$

natomiast równanie $(5.3)_3$ przyjmuje postać

$$
R_{1323} = \frac{1}{2}(2\,'g_{(13),2} + 2\,'g_{(23),1} - 2\,'g_{1}^{\cdot k}\,'g_{2k} - g_{33,12}) + g^{mn}\,'g_{2m}\,'g_{1n} = 0.
$$

Powyższe zależności można napisać w postaci układu równań

$$
(5.4)\qquad g_{33,\delta\lambda} = 'g_{\delta 3,\lambda} + 'g_{\lambda 3,\delta}.
$$

Składowa R_{1212}, opisująca zakrzywienie powierzchni π, po rozwinięciu przyjmuje postać

$$
\begin{aligned}
(5.5)\qquad R_{1212} &= \frac{1}{2}(2g_{12,12} - g_{11,22} - g_{22,11}) + g^{mn}([12; m][12; n] - [22; m][11; n]) = \\
&= \frac{1}{2}(2g_{12,12} - g_{11,22} - g_{22,11}) + g^{\delta\lambda}([12; \delta][12; \lambda] - [22; \delta][11; \lambda]) + \\
&+ g^{\delta 3}\{[12; \delta](g_{3(1,2)} - 'g_{(12)}) - [22; \delta](g_{31,1} - 'g_{11})\} + g^{\delta 3}\{[12; \delta](g_{3(1,2)} - 'g_{(12)}) - \\
&- [11; \delta](g_{32,2} - 'g_{22})\} + g^{33}\{(g_{3(1,2)} - 'g_{(12)})(g_{3(1,2)} - 'g_{(12)}) - \\
&- (g_{32,2} - 'g_{22})(g_{31,1} - 'g_{11})\} = 0.
\end{aligned}
$$

Wprowadźmy oznaczenie

$$(5.6)\quad R^*_{1212} \overset{\mathrm{df}}{=} -g^{\delta 3}\{-2[12;\delta]\,'g_{(12)}+[22;\delta]\,'g_{11}+[11;\delta]'g_{22}\}+g^{33}\det{}'g_{(\varphi\psi)}-$$
$$-g^{33}\{-2g_{3(1,2)}\,'g_{(12)}+g_{32,2}\,'g_{11}+g_{31,1}\,'g_{22}\}.$$

Równanie (5.5) określa teraz zależność

$$(5.7)\quad R^*_{1212} = -\frac{1}{2}(g_{11,22}-2g_{12,12}+g_{22,11})+g^{\delta\lambda}([12;\delta][12;\lambda]-[22;\delta][11;\lambda])-$$
$$-g^{\delta 3}([22;\delta]g_{31,1}-2[12;\delta]g_{3(1,2)}+[11;\delta]g_{3,22})+g^{33}(g_{3(1,2)}g_{3(1,2)}-g_{31,1}g_{32,2}).$$

Ostatnie dwa równania istnienia powierzchni otrzymamy z warunku zerowania się składowych R_{2312} i R_{1321} tensora Riemanna-Christoffela.

Pierwsze z nich zapiszemy w postaci

$$R_{2312} = \frac{1}{2}(2\,'g_{22,1}+g_{31,22}-2\,'g_{(21),2}-g_{32,21})+g^{mn}('g_{1m}[22;n]-'g_{2m}[21;n]),$$

drugie natomiast jako zależność

$$R_{1321} = \frac{1}{2}(2\,'g_{11,2}+g_{32,11}-2\,'g_{(12),1}-g_{31,12})+g^{mn}('g_{2m}[11;n]-'g_{1m}[12;n]).$$

Po przyrównaniu tych związków do zera otrzymujemy:

$$(5.8)\qquad \frac{1}{2}g_{3[2,1]\varphi} = 'g_{(\varphi[2),1]}+[\varphi[2;|\delta|]\,'g_{1]}{}^{\delta}+(g_{3(\varphi,[2)}-'g_{(\varphi[2)})\,'g_{1]}{}^{3}.$$

6. Przytoczymy jeszcze związki określające pochodne cząstkowe wektorów bazy $\mathbf{g}_\delta$, $\mathbf{g}^\delta$ i wektorów $\mathbf{g}_3$ oraz $\mathbf{g}^3$. Odpowiadają one klasycznym wzorom Weingartena-Gaussa. Można je otrzymać bezpośrednio ze związku (por. np. [2], str. 25)

$$(6.1)\qquad \mathbf{g}_{i,j} = [ij;k]\mathbf{g}^k,\quad \mathbf{g}^i_{.,j} = -\left\{{i \atop jk}\right\}\mathbf{g}^k.$$

W naszym przypadku przyjmuje on postać:

$$(6.2)\qquad \begin{cases} \mathbf{g}_{\delta,\lambda} = [\delta\lambda;\varphi]\mathbf{g}^\varphi+(g_{3(\delta,\lambda)}-'g_{(\delta\lambda)})\mathbf{g}^3, \\ \mathbf{g}_{3,\delta} = 'g_{\delta i}\mathbf{g}^i, \\ \mathbf{g}^\delta_{.,\lambda} = -g^{\delta\psi}[\lambda\varphi;\psi]\mathbf{g}^\varphi-g^{\delta 3}(g_{3(\lambda,\varphi)}-'g_{(\lambda\varphi)})\mathbf{g}^\varphi-'g_\lambda{}^{\delta}\mathbf{g}^3, \\ \mathbf{g}^3_{,\delta} = -g^{\varphi 3}[\delta\lambda;\varphi]\mathbf{g}^\lambda-g^{33}(g_{3(\delta,\lambda)}-'g_{(\delta\lambda)})\mathbf{g}^\lambda-'g_\delta{}^3\mathbf{g}^3. \end{cases}$$

7. Na zakończenie wykażemy, że przyjęcie pola wektorowego $\mathbf{g}_3$ ortonormalnie do powierzchni Π prowadzi do układu współrzędnych normalnych. Zgodnie z definicją (2.6) tensor metryczny $\hat{g}_{ij}$ posiada wtedy pięć składowych niezerowych

$$(7.1)\qquad [\hat{g}_{ij}] = \begin{bmatrix} \hat{g}_{\delta\lambda} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

i na powierzchni $\xi^3 = 0$ można przyjąć pierwszy tensor podstawowy w postaci

$$(7.2)\qquad g_{\delta\lambda} \overset{\mathrm{df}}{=} \hat{g}_{\delta\lambda}(\xi^3 = 0).$$

W drugim tensorze podstawowym znikają przy powyższym przyjęciu składowe $'g_{\delta 3}$. A więc układ pierwszego i drugiego tensora podstawowego powierzchni π jest wtedy taki sam, jak we współrzędnych normalnych. Po wykorzystaniu uproszczeń wynikających z ortonormalności g_3 symbole Christoffela, określone wzorami (4.3) i (4.4), mają postać

$$
\begin{aligned}
&[\delta\lambda;\sigma] = \frac{1}{2}(g_{\delta\sigma,\lambda}+g_{\lambda\sigma,\delta}-g_{\delta\lambda,\sigma}),\\
&[\delta\lambda;3] = -'g_{\delta\lambda},\\
&[\delta 3;\lambda] = 'g_{\delta\lambda},\\
&[33;\delta] = [\delta 3;3] = [33;3] = 0,
\end{aligned}
\tag{7.3}
$$

$$
\begin{aligned}
&\left\{{\sigma \atop \delta\lambda}\right\} = g^{\sigma\varphi}[\delta\lambda;\varphi],\\
&\left\{{3 \atop \delta\lambda}\right\} = -'g_{\delta\lambda},\\
&\left\{{\lambda \atop 3\delta}\right\} = 'g^{\lambda}_{\delta},\\
&\left\{{3 \atop 3\delta}\right\} = \left\{{\delta \atop 33}\right\} = \left\{{3 \atop 33}\right\} = 0.
\end{aligned}
\tag{7.4}
$$

Zależności (7.3) i (7.4) są identyczne ze znanymi w układach normalnych [2].

Wreszcie równania istnienia powierzchni (5.4), (5.6) i (5.8) zmieniają się w sposób następujący: ponieważ

$$g_{\delta 3,\lambda} = 0, \tag{7.5}$$

więc trzy równania (5.4) przechodzą w tożsamości. Równanie (5.6) ma postać

$$R^{*}_{1212} = \det{}'g_{\varphi\psi}, \tag{7.6}$$

a więc otrzymujemy związek określający krzywiznę Gaussa mnożoną przez wyznacznik z tensora metrycznego. Podstawiając (7.1) i (7.5) do równań (5.8) otrzymamy

$$'g_{2\varphi,1}-'g_{1\varphi,2}+[2\varphi;\delta]\,'g^{\delta}_{1}-[1\varphi;\delta]\,'g^{\delta}_{2} = 0$$

lub

$$'g_{2\varphi,1}-\left\{{\delta \atop 1\varphi}\right\}'g_{2\delta}-\left\{{\delta \atop 12}\right\}'g_{\delta\varphi}-'g_{1\varphi,2}+\left\{{\delta \atop 2\varphi}\right\}'g_{1\delta}+\left\{{\delta \atop 12}\right\}'g_{\delta\varphi} = 0,$$

co prowadzi do równania Codazziego dla powierzchni parametryzowanej normalnym układem współrzędnych

$$'g_{2\varphi}|_1 = 'g_{1\varphi}|_2. \tag{7.7}$$

Literatura cytowana w tekście

1. C. TRUESDELL, R. A. TOUPIN, *The Classical Field Theories*, Encyklopaedia of Physics, v. III/1, Springer-Verag 1960.
2. A. E. GREEN, W. ZERNA, *Theoretical Elasticity*, London 1959.
3. C. WOŹNIAK, *Nieliniowa teoria powłok*, w druku.

Резюме

КООРДИНАТНЫЕ ЛИНЕЙЧАТЫЕ СИСТЕМЫ В ГЕОМЕТРИИ СРЕДИННЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК

Обсуждается геометрия срединной поверхности тонких оболочек при использовании координатной системы с произвольным направлением и длиной базисного вектора g_3. Введенная система координат, в виду принятой формы параметрической линии $\xi^\delta = \mathrm{const}$, названа линейчатой системой. Определяются основные тензоры поверхности (формулы(2.6)) и описывается операция ковариантного дифференцирования для $\xi_3 = 0$ в этой системе. В п. 5 выводится, исходя из тензора кривизны Римана-Христофеля, шесть уравнений существования поверхности при неортогональности базисного вектора g_3. В п. 7 показано, что нормальная система координат является, частным случаем линейчатой системы координат. Выведенные соотношения дают возможность применения сопутствующих координатных систем в теории оболочек, не удовлетворяющей геометрическим предложениям Кирхгоффа-Лява.

Summary

RULED COORDINATE SYSTEMS IN THE GEOMETRY OF THE MIDDLE SURFACES OF THIN SHELLS

The geometry of the middle surface of thin shells has been considered in the paper, the problem being parametrized by a coordinate system with base vectors g_3 of arbitrary length and direction. The system introduced is called „ruled system" due to the assumed form of the parametric line ξ^δ = const. The fundamental tensors of the surface (Eqs. 2.6) and the covariant differentiation operation for $\xi^3 = 0$ are defined in this system. Basing upon the Riemann-Christoffel curvature tensor, the six equations of existence of the surface with non-orthogonal rigging have been derived in p. 5. In p. 7 the normal coordinate system is shown to be a particular case of a ruled coordinate system. The derived formulae enable to apply the convectional reference frames in the theory of the surface which does not satisfy the Kirchhoff-Love assumptions.

POLITECHNIKA ŁÓDZKA

Praca zostala złożona w Redakcji dnia 23 czerwca 1965 r.