

## DOŚWIADCZALNE BADANIA STATECZNOŚCI PŁYT TRÓJKĄTNYCH(\*)

JAROSŁAW SOBIESZCZAŃSKI (WARSZAWA)

### Wstęp

W pracy niniejszej omówione są doświadczenia przeprowadzone nad wyboczeniem płyt trójkątnych. Doświadczenia te zostały wykonane w latach 1964–1965 w laboratorium Instytutu Lotnictwa Politechniki Norweskiej w Trondheim, kierowanym przez prof. Johna Lockwooda TAYLORA.

Program doświadczeń został sfinansowany przez NTNf — organizację rządu norweskiego, powołaną do spraw popierania badań naukowych. Rezultaty doświadczeń zostały porównane z wynikiem teorii opracowanej przez *ing. Per V. PEDERSEN* [6].

Problem określenia obciążeń krytycznych dla płyty trójkątnej był przedmiotem wielu prac teoretycznych, w tym także i autorów polskich [7–10]. Wspólną cechą tych prac jest ograniczenie ich wyników do jednego lub kilku szczególnych przypadków obciążenia i proporcji trójkąta oraz rodzaju warunków brzegowych. Ścisłego rozwiązania obejmującego wszystkie możliwe kombinacje wchodzących w grę parametrów brak w literaturze.

Celem weryfikowanej pracy [6] jest stworzenie metody numerycznej, określającej wartość obciążenia krytycznego dla każdego dowolnego przypadku płyty trójkątnej, określonego zestawem parametrów podawanych na wejściu cyfrowej maszyny elektronicznej, zaprogramowanej według tej metody. Metoda sprowadza się do zastąpienia różniczkowego liniowego równania stateczności płyty równaniem różnic skończonych w trójkątnej siatce punktów węzłowych, co przy zastosowaniu rachunku macierzowego prowadzi do tzw. problemu ogólnego wartości własnych dla macierzy określającej postać ugięcia płyty.

Autor wyraża gorące podziękowanie tym wszystkim, którzy przyczynili się do wykonania programu badań, w szczególności zaś prof. J. L. TAYLOROWI, *ing. P. V. PEDERSENOWI* i organizacji NTNf.

### 1. Założenia ogólne i cel programu doświadczeń

Głównym celem doświadczeń była weryfikacja teorii określającej siły krytyczne dla płyt trójkątnych. Według tej teorii otrzymano szereg wartości liczbowych obciążeń krytycznych, które miały być porównane z wynikami doświadczeń. Ponieważ doświadczenia miały mieć charakter weryfikacji, uznano za możliwe ograniczyć ich liczbę do najbardziej typowych przypadków zakładając, że dobra zgodność z teorią, otrzymaną w tej ograniczonej liczbie eksperymentów, pozwala z wystarczającym prawdopodobieństwem ocenić

(\*) Praca została wyróżniona w r. 1965 jedną z dwóch równorzędnych drugich nagród na konkursie Zarządu Głównego PTMTS za najlepszą pracę doświadczalną.

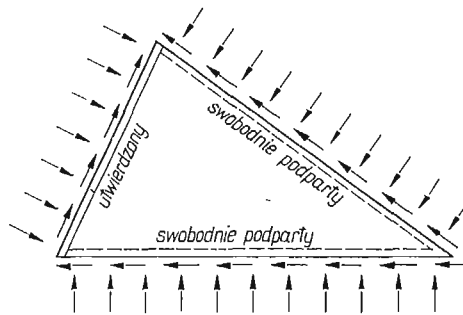
teorię jako dającą dostateczną dokładność również i w innych niezwyfikowanych doświadczalnie przypadkach. Teoria jest ogólna i pokrywa wszystkie możliwe proporcje trójkąta, rodzaje obciążenia i warunków brzegowych, a zatem jej doświadczalna weryfikacja oznacza rozwiązanie zagadnienia stateczności płyty trójkątnej.

Dodatkowym celem było opracowanie techniki doświadczalnej z uwzględnieniem jej ewentualnego szerszego zastosowania do badania podobnych zagadnień dla płyt innych niż płyty trójkątne.

## 2. Wymagania stawiane urządzeniu badawczemu

Dla przeprowadzenia doświadczeń było rzeczą niezbędną wykonanie specjalnych urządzeń umożliwiających:

- 1) zamocowanie płyty o dowolnym kształcie trójkątnym (w pewnych granicach poddyktowanych względami konstrukcyjnymi);
- 2) podparcie krawędzi płyty w sposób swobodny, swobodnie oparty, zamocowany;



Rys. 1. Dowolna płyta trójkątna obciążona w sposób dowolny na krawędziach z dowolną kombinacją warunków brzegowych

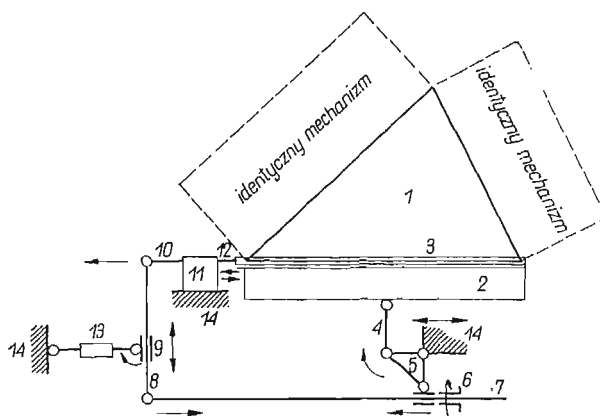
- 3) obciążenie płyty na jej krawędziach siłami normalnymi i stycznymi do krawędzi płyty, leżącymi w jej płaszczyźnie (rys. 1); obciążenie to jest samorzównoważone o zmiennych składowych stycznych i normalnych;
- 4) łatwy dostęp do obu powierzchni płyty dla ewentualnej realizacji obciążeń poprzecznych;
- 5) pomiar naprężeń i odkształceń płyty.

## 3. Schemat urządzenia

Zgodnie z wymaganiami sformułowanymi w poprzednim rozdziale zaprojektowano i wykonano urządzenie, którego schemat mechaniczny jest przedstawiony na rys. 2.

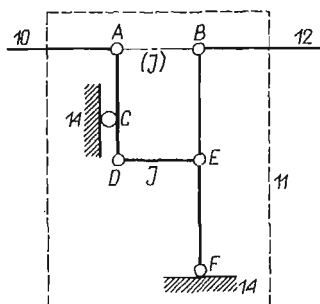
Płyta trójkątna 1 przedstawiona na rys. 2 znajduje się w pozycji poziomej. Każda jej krawędź obciążona jest siłami normalnymi za pośrednictwem elementu 2 i stycznymi przez element 3. Elementy 2 i 3 mogą poruszać się swobodnie w poziomie. Element 2 połączony jest dźwignią 5 ze sztywną ramą urządzenia.

Nakrętka 6 osadzona jest na długiej śrubie 7 przechodzącej przez otwór w ramieniu dźwigni 5 i połączonej z dźwignią 8, która łączy się z ramą urządzenia poprzez element dynamometryczny 13 i z elementu 3 za pośrednictwem prętów 10 i 12.



Rys. 2. Mechaniczny schemat urządzenia

Element 2 naciska krawędź płyty, jeśli nakrętkę 6 przesuwac wzdłuż śruby 7 na lewo, obracając ją w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara, ponieważ ruch nakrętki zmusza dźwignię 5 do obrotu. Równowaga śruby 7 jest zapewniona przez dźwignię 8, która obraca się wokół punktu 9 pociągając poprzez 10 i 11 element 3 realizujący styczne obciążenia krawędzi (w lewo).



Rys. 3. Mechanizm odwracający (nr 11 na rys. 2)

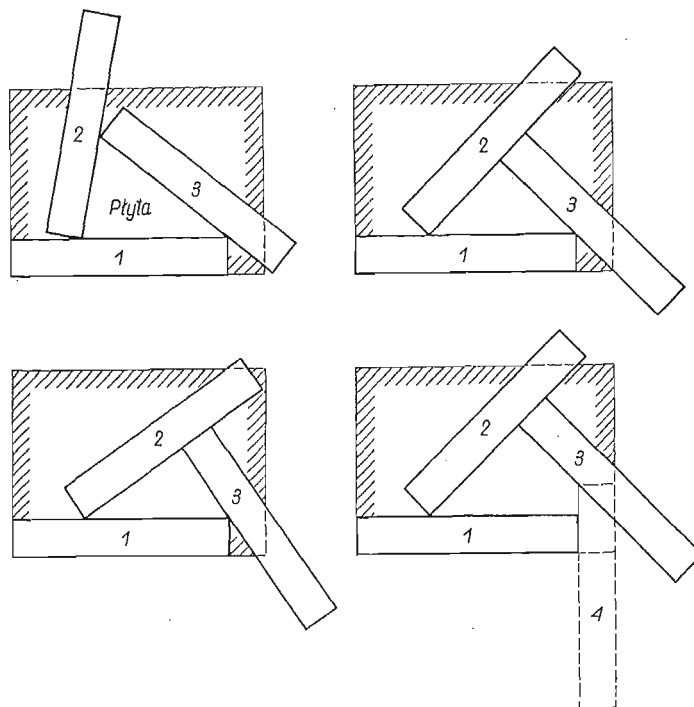
Punkt 9 można przesuwac wzdłuż dźwigni  $D$  zmieniając w ten sposób stosunek składowych normalnej i stycznej obciążenia. Pomiedzy pręty 10 i 12 wbudowano mechanizm odwracający (rys. 3). Mechanizm ten składa się z dwu dźwigni  $AD$  z punktem obrotu w  $C$  i  $BF$  z punktem obrotu w  $F$ . Łącznik  $J$  może być założony między  $AB$  lub  $DE$ . W pozycji  $AB$  łącznik  $J$  zmusza pręt 12 do postępowania za prętem 10. W pozycji  $DE$  łącznika 7 pręt 12 porusza się w kierunku przeciwnym do ruchu pręta 10 przy zachowaniu wartości przekazywanej siły, ponieważ  $AC:CD = BF:EF$ . W ten sposób ścinanie może być kierowane

w lewo lub w prawo, co ma zasadnicze znaczenie dla realizacji dowolnego przypadku obciążenia.

Wypadkowe obciążenie (suma ścinania i ściskania) jest mierzone przez element 13 — pręt z naklejonymi tensometrami, cechowany na maszynie wytrzymałościowej. Dźwignię 5 można przesuwac wzdłuż krawędzi płyty dla utrzymania pręta 4 w środku jej długości.

Wszystkie części ruchome ułożyskowano na łożyskach kulkowych dla zredukowania tarcia, którego dalszą eliminację zapewnia elektromagnetyczny wzbudnik drgań, zamocowany do masywnej stalowej ramy urządzenia. Dzięki zastosowaniu wibratora otrzymano znikomą małą pętlę histerezy i wysoki stopień powtarzalności.

Opisany mechanizm obciążający *jedną krawędź* płyty został powtórzony trzykrotnie w trzech oddzielnych jednostkach przymocowanych do wspólnej bardzo sztywnej stalowej podstawy. Omówiony proces obciążenia ma miejsce na jednym z mechanizmów. Obciążenia



Rys. 4. Urządzenie ustawione do różnych kształtów badanej płyty

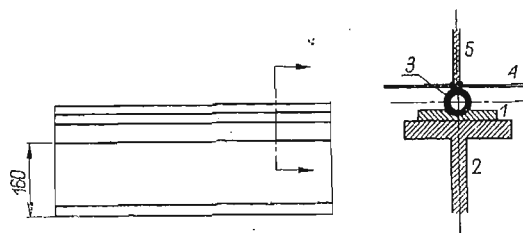
żenia pozostałych krawędzi wywołane są jako reakcje bierne. Wartości biernych reakcji zostały sprowadzone tensometrowaniem i porównane z wartościami wynikającymi z wartości sił czynnych i równań równowagi. Porównanie to wykazało dobrą zgodność, co potwierdza skuteczność drgań jako środka eliminującego straty tarcia. Przez właściwe usytuowanie trzech mechanizmów obciążających na wspólnej podstawie można je dopasować do płyty o dowolnym trójkątnym kształcie (rys. 3). Dodanie podobnego czwartego mechanizmu, który może być uproszczony jako dający tylko reakcje bierne, stwarza możliwość badania płyt czworokątnych o dowolnym nieregularnym kształcie.

#### 4. Opis konstrukcji urządzenia

Rysunki techniczne urządzenia przechowywane są w Instytucie Lotnictwa Politechniki Norweskiej. Niektóre szczegóły konstrukcyjne przedstawiają zdjęcia załączone w dodatku 1.

Niniejszy opis dotyczy niektórych rozwiązań istotnych dla zapewnienia równomierności rozkładu obciążenia wzdłuż krawędzi i właściwych warunków brzegowych.

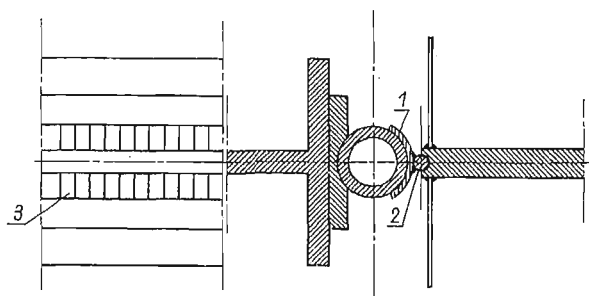
**4.1. Obciążenie ściskające. Przypadek krawędzi podpartych swobodnie. Dwa rozwiązania.** Siła kierana przez dźwignię 5 (rys. 2), rozkładana jest na równomierne obciążenie wzdłuż krawędzi przez belkę 2 przedstawioną na rys. 5



5. Belka i rura gumowa z wodą zapewniająca równomierność obciążenia

Na płycie znajduje się rura gumowa w specjalnym uchwycie. Rura zamknięta na końcach. Woda zgodnie z prawem Pascala zapewnia równość ciśnienia, które powstaje, gdy rura ściskana jest pomiędzy krawędzią

przepon 4 przylutowanych do płyty jest obciążenie krawędzi stykami (p. 4.2). Przepony te są dostatecznie wiotkie, aby można było wpływać na warunki brzegowe (jak wykazano w dodatku 2.2), a zatem rozwiązane na rys. 5 zapewnia z dostatecznym przybliżeniem warunki brzegowe swobodnego podparcia.



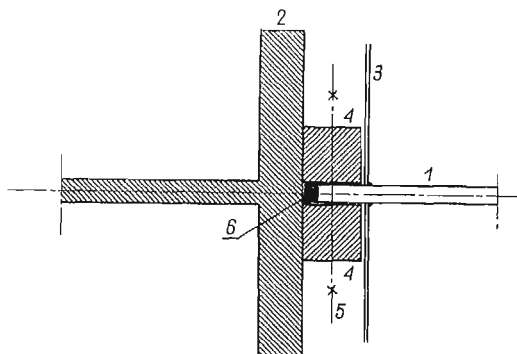
Rys. 6. Alternatywne rozwiązanie swobodnego podparcia

W rozwiązaniu tym istnieje możliwość regulacji mimośrodowość obciążenia ściskającego przez zmianę położenia płyty względem osi rury, co ułatwia zastosowanie metody Southwella (p. 6) do analizy wyników doświadczenia.

Inne rozwiązanie pokazano na rys. 6.

Modyfikacja polega na zastosowaniu zakrzywionego paska stalowego *1* przyklejonego do rury gumowej. Pasek ten pocięty jest poprzecznie na krótkie odcinki, co pozbawia go sztywności giętej w płaszczyźnie płyty. Ta sztywność gięta mogłaby zakłócić równomierność obciążenia. Druk 2 jest przylutowany do paska i wchodzi w rowek wycięty w grubości płyty wzdłuż krawędzi zapewniając jej podparcie pionowe i swobodny obrót. Rozwiązanie to okazało się w praktyce lepsze od poprzedniego.

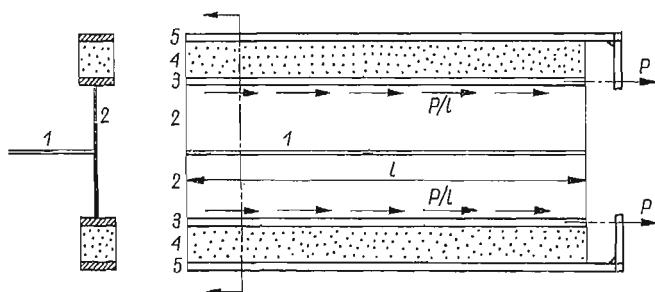
Przypadek krawędzi zamocowanej. Margines płyty *1*, wystający poza przepony *3*, tkwi w szczelinie pomiędzy dwoma obrobionymi listwami stalowymi *4*, lekko dociśniętymi do płyty śrubami *5*. Smarowanie szczeliny redukuje tarcie. Pasek gumy *6* zapewnia równomierność obciążenia. Obrót jest uniemożliwiony, a zatem warunki brzegowe odpowiadają zupełnemu zamocowaniu.



Rys. 7. Przypadek krawędzi zamocowanej

4.2. Obciążenie styczne do krawędzi płyty. Obciążenie styczne realizowane jest w sposób pokazany na rys. 8.

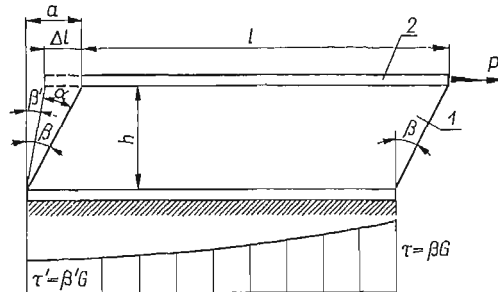
Jak powiedziano poprzednio do płyty przylutowano pionowe przepony 2 wzdłuż każdej krawędzi. Krawędź przepony jest usztywniona podłużnicą stalową 3, do której przyklejony jest pas gumowy 4. Do przeciwległej strony pasa gumowego przyklejona jest sta-



Rys. 8. Obciążenie styczne

lowa podłużnica 5 obciążona siłą  $P$ . Pas gumowy pracuje na ścinanie i zamienia siłę skupioną  $P$  na wydatek naprężeń stycznych, działających na podłużnicę 3. Równomierność rozkładu ścinania jest zapewniona przez bardzo małą sztywność gumy (rys. 9) w porównaniu ze sztywnością podłużnicy 5.

Ścinanie przekazywane jest dalej na płytę przez przeponę 2. Płytę z przeponami wykonano z brązu z uwagi na jego dobrą lutowalność. Pionowe przepony, jak wykazało doświadczenie, nie tracą stateczności przy największych realizowanych obciążeniach



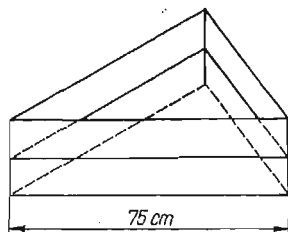
Rys. 9.  $\beta' < \beta$ , ponieważ  $\beta' = \beta - \alpha$ ;  $\alpha \approx \frac{\Delta l}{h}$ , a więc  $\tau' < \tau$ , ponieważ  $\tau = \beta G$  i  $\tau' = \beta' G$ . Jeśli  $\omega \gg \Delta l$  ( $\omega = \beta h$ )

co ma miejsce, jeśli 1 wykonano z gumy, a 2 ze stali, wtedy względna różnica  $\frac{\tau - \tau'}{\tau}$  staje się pomijalnie mała

Trzeba wspomnieć, że utrzymanie równomierności ścinania zależy także od odkształcenia płyty; wpływ tych odkształceń jest jednak nieznaczny, jak wynika z pomiarów (dodatek 2.1).

### 5. Płyta

Płyty (rys. 10) badane w opisanym urządzeniu zostały wykonane z brązu. Moduł  $E$  użytego brązu został zmierzony. Wynosi on:  $E = 1,12 \cdot 10^6$  kG/cm<sup>2</sup>. Grubość płyt



Rys. 10. Płyta

z brązu  $t = 1,5$  mm. Najdłuższy bok płyty był ograniczony przez konstrukcję urządzenia do 75 cm. Kształty zbadanych płyt są podane w p. 8.

### 6. Instrumenty pomiarowe

Doświadczenia obejmowały pomiar następujących wielkości:

- 1) naprężenia w wybranych punktach płyty po obu jej stronach (a także w pionowych przeponach dla kontroli równomierności rozkładu ścinania),
- 2) naprężenia w wybranych częściach urządzenia (rys. 2) dla kontroli obciążeń,
- 3) ugięcie środka płyty.

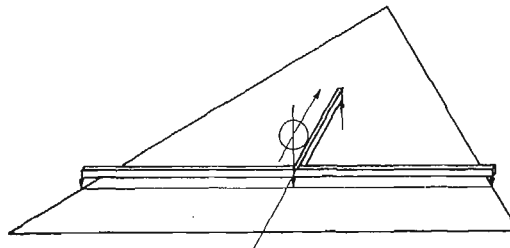
Pomiaru naprężeń dokonano tensometrami elektrooporowymi typu Standard PKL10—120 $\Omega$ , stała  $k = 2$  oraz rozeta 45° $\times$ 3 PR-50 tych samych danych oporowych.

Tensometry elektrooporowe połączone były z tensometrami kompensacyjnymi w system pół-mostka. W niektórych przypadkach dla pomiaru wyłącznie naprężeń zginających w płycie odpowiednie tensometry z obu stron płyty połączone jak czynny i kompensacyjny w system pół-mostka, co podwaja wskazania.

Zastosowano aparat pomiarowy typu Peekel (holenderski) z odczytem zerowym. Najmniejsza działka skali odpowiadała  $10 \mu S$  (mikrostrerinów,  $1 \mu S = 10^{-6}$  odkształcenia względnego), co pozwalało (po pewnej praktyce) odczytywać odkształcenia rzędu  $2,5 \mu S$ . Element dynamometryczny 13 odkształcał się  $572 \mu S/1000 \text{ kG}$  a więc  $2,5 \mu S$  odpowiadało  $4,37 \text{ kG}$ , co było najmniejszą mierzalną wartością obciążenia.

Ugięcia mierzono czujnikami warsztatowymi trzech różnych typów a także specjalnym czujnikiem przemieszczenia. Zastosowano czujniki warsztatowe:

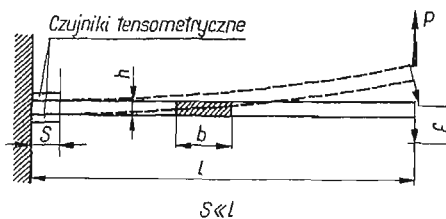
- typ 0 — 10 mm najmniejsza działka  $1/100 \text{ mm}$ ,
- typ 0 — 15 mm najmniejsza działka  $1/2000 \text{ mm}$ ,
- typ 0 — 1,5 mm najmniejsza działka  $1/1000 \text{ mm}$ .



Rys. 11.

Czujniki zamocowano na specjalnej belce (rys. 11), która eliminowała z ich wskazań ruch płyty jako ciała sztywnego. Do wad czujników warsztatowych należy konieczne użycie znacznej siły, potrzebnej do poruszenia ich mechanizmu (rzędu  $70 \text{ G}$ ) oraz występujące duże siły tarcia.

Jeśli czujniki pozostają w kontakcie z tak podatnym obiektem jak płyta, to siły te stają się dodatkowymi więzami wpływającymi na jej zachowanie (szczególnie na powtarzal-



Rys. 12. Czujnik przemieszczenia

ność wyników). Dla uniknięcia tych trudności zaprojektowano i wykonano specjalny czujnik przemieszczenia. Czujnik wykonany jest jako pasek plexiglasu pracujący jako wysięgnikowa belka zginana (rys. 12). Przesunięcie końca belki jest mierzone tensometrami u jej nasady.



Jak wiadomo, odkształcenie względne u nasady wynosi

$$\varepsilon = \frac{3}{2} \frac{h}{l^2} f.$$

Jeśli tensometry połączone są w układ czuły wyłącznie na zginanie, to wskazane  $\varepsilon_i$  wynosi

$$\varepsilon_i = 2\varepsilon = 3 \frac{h}{l^2} f.$$

Dla przyjętego maksymalnego ugięcia  $f_{\max}$  otrzymuje się siłę  $P_{\max}$ :

$$P_{\max} = \frac{3}{12} \frac{Ebh^3}{l^3} f_{\max}.$$

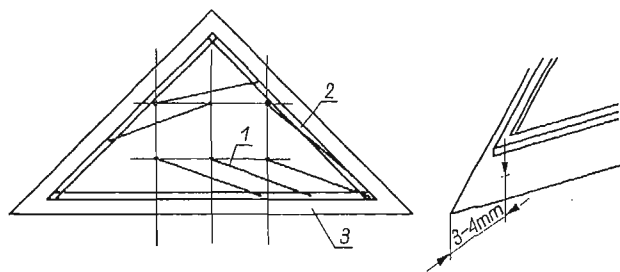
Dane zastosowanego czujnika przemieszczenia są następujące:  $l = 20$  cm,  $h = 0,1$  cm,  $b = 1$  cm,  $f_{\max} = 2,5$  cm,  $E = 3 \cdot 10^4$  kG/cm<sup>2</sup>. Z danych tych wynika:

$$\varepsilon_{i \max} = 1870 \cdot 10^{-6} = 1870 \mu S,$$

$$P_{\max} = 2,34 \cdot 10^{-3} \text{ kG}.$$

Wartość siły  $P_{\max}$  jest zatem tak mała, że jej wpływ na zachowanie się płyty może być pominięty. Najmniejsza działka  $10 \mu S$  odpowiada  $0,34$  mm, a jest możliwy odczyt  $1/4 \cdot 0,34 = 0,085$  mm, co zapewnia rozsądną dokładność dla dużych odkształceń.

Czujnik mierzy także ujemne (skierowane w dół) ugięcia płyty postępując za nią pod wpływem własnego ciężaru, a więc zakres mierzonych ugięć jest równy  $\pm 2,5$  cm.



Rys. 13. Wielopunktowy czujnik przemieszczenia

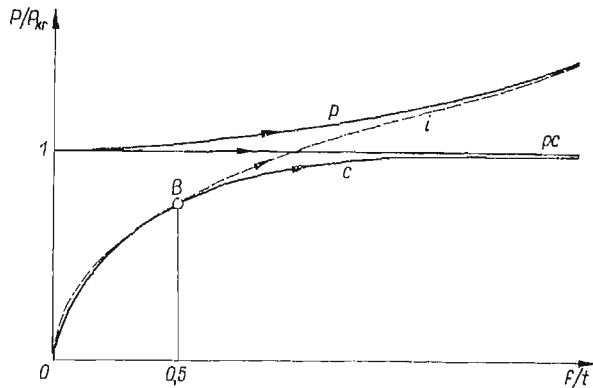
Wielopunktowy czujnik przemieszczeń pokazany jest na rys. 13. Polega on na zgrupowaniu wielu pojedynczych czujników, takich jak przedstawiony na rys. 12 przymocowany do ramy 2, opartej w trzech punktach na płycie 3, tak że czujniki reagują tylko na jej ugięcie, a nie na jej ruch jako ciała sztywnego.

## 7. Technika pomiarowa

Technikę pomiarów oparto na znanym zachowaniu się płyty ściskanej, posiadającej wstępne ugięcia (pofalowania), wywołane niedokładnościami jej wykonania.

7.1. Ściskanie płyty wstępnie pofalowanej. Zależność ugięcia od obciążenia ściskającego pokazuje rys. 14. Przez obciążenie ściskające rozumie się w tym przypadku obciążenie uogólnione w płaszczyźnie płyty, złożone ze składowych stycznych i normalnych do krawędzi, a określone wspólnym parametrem  $P$ .

Płyta doskonale płaska odkształca się wg. linii 0-1-*p*. Pręt ściskany, idealnie prosty odkształca się wg. linii 0-1-*pc* (wg. teorii małych ugięć). Pręt wstępnie odkształcony lub



Rys. 14. Rysunek przedstawia uogólnione obciążenie ściskające  $P$  w funkcji względnego ugięcia  $f/t$ :  $P$  — parametr uogólnionego obciążenia ściskającego,  $f$  — ugięcie,  $P_{kr}$  — krytyczne obciążenie ściskające,  $t$  — grubość płyty

mimośrodkowo obciążony odkształca się wg linii 0-*c*. Podobnie wstępnie pofalowana płyta odkształca się wg. linii 0-*i*.

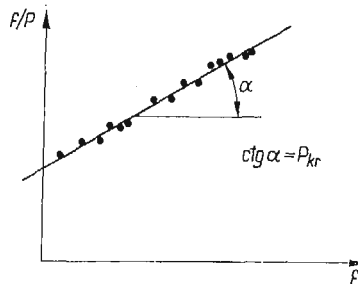
7.2. Wykres Southwella. Jak wiadomo, wykres 0-*c* wyraża się analitycznie w sposób następujący:

$$\frac{f}{t} = \frac{f_0}{t} \frac{1}{1 - P/P_{kr}},$$

gdzie  $f_0$  jest uogólnionym wstępnym ugięciem. Wychodząc z tego wyrażenia i wprowadzając zmienne  $f/P$  i  $f$  Southwell wykazał, że:

$$\frac{f}{P} = A + \frac{1}{P_{kr}} f,$$

co można przedstawić jako tzw. wykres Southwella (rys. 15). Ze zmierzonych wartości  $f$  i  $P$  można łatwo określić wartość  $P_{kr} = \operatorname{ctg} \alpha$  unikając w ten sposób konieczności osiągnięcia tej wartości podczas doświadczenia [1, 2].



Rys. 15. Wykres Southwella

MARGUERRE i DONNELL wykazali, że  $c$  oraz  $i$  pokrywają się z techniczną dokładnością dla dostatecznie małych ugięć pomiędzy punktami  $O$  i  $B$  na rys. 14.

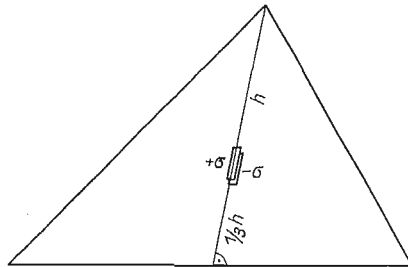
BLEICH podaje odciętą punktu  $B$ :

$$(7.1) \quad \left( \frac{f}{l} \right)_{gr} = 0,5.$$

Oznacza to, że zachowanie się niedoskonałej płyty i niedoskonałego pręta jest bardzo podobne dla małych ugięć, a zatem wykres Southwella można zastosować do określenia  $P_{kr}$  dla płyty podobnie jak dla pręta, jeśli w doświadczeniu nie przekroczono  $(f/P)_{gr}$ . Tego rodzaju postępowanie daje zadowalające wyniki, jak wykazuje wieloletnia praktyka [1,2].

Można także udowodnić wychodząc z ogólnego równania wyboczenia płyty, że metodę tę można zastosować do płyty o dowolnym kształcie i obciążeniu oraz o dowolnych warunkach brzegowych (por. dodatek 2.3). Trzeba podkreślić, że zamiast  $f$  można użyć każdej innej wielkości fizycznej proporcjonalnej do  $f$  takiej jak na przykład moment zginający albo zginające naprężenia w dowolnym punkcie płyty.

**7.3. Opis doświadczeń i procesu przetwarzania danych doświadczalnych.** Do opracowania wyników doświadczenia zastosowano metodę Southwella. Ugięcia płyty przy ściskaniu wywołane były przez jej wstępne (naturalne) pofalowanie, a także przez mimośrodowość obciążenia, która była regulowana w jednym z rozwiązań swobodnego podparcia krawędzi (rys. 5). W pewnych przypadkach udało się zaobserwować moment wyboczenia i bezpośrednio zanotować  $P_{kr}$ , ponieważ nastąpiła przypadkowa wzajemna kompensacja mimośrodowości obciążenia i wstępnego pofalowania (por. p. 8). Celem doświadczeń było określenie obciążenia krytycznego  $P_{kr}$ , a także, jako zadanie uboczne, zbadanie poprawności wa-



Rys. 16. Pomiar naprężeń zginających  $\sigma$  w środku płyty

runków brzegowych i równomierności rozkładu obciążenia. To ostatnie zadanie zostało sprawdzone tensometrami we wstępnej fazie cyklu doświadczeń. Wyniki podane w dodatku 2.1 wykazują, że równomierność ściskania jest  $100\% \pm 2,7\%$ , a ściskania  $100\% \pm 4\%$ . Dla osiągnięcia celu zasadniczego, mianowicie określenia wartości obciążeń krytycznych, notowano wartości naprężeń zginających w środku płyty jako funkcję stopniowo zwiększonego obciążenia (rys. 16); jednocześnie prowadzono pomiar ugięć środka płyty dla uniknięcia przekroczenia granicznego ugięcia  $(f/l)_{gr}$ .

Rezultatem każdego cyklu obciążania był zbiór odpowiadających sobie wartości  $\sigma$  i  $P$ .

Jedno doświadczenie składało się z 3 do 5 (zależnie od obserwowanej powtarzalności) cykli obciążenia. W jednym cyklu notowano zwykle 8–15 odczytów  $\sigma$  i  $P$  (oraz  $f$ ), a więc

w jednym doświadczeniu otrzymywano zbiór danych obejmujący 24–75 wartości dla  $\sigma$  i  $P$  (oraz  $f$ ), które następnie przetwarzano metodą Southwella.

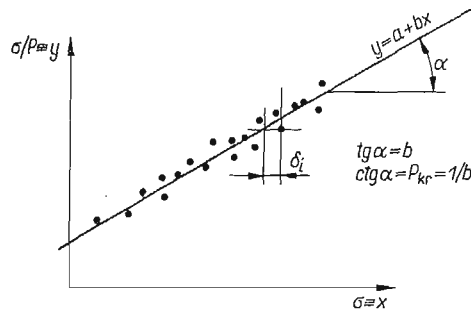
Przetwarzanie danych doświadczalnych. Dane otrzymane z jednego doświadczenia przedstawia zbiór (7.2)

$$(7.2) \quad \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_i, \dots, \sigma_n; \quad P_1, P_2, \dots, P_i, \dots, P_n,$$

z którego można obliczyć:

$$(7.3) \quad \frac{\sigma_i}{P_i}, \quad i = 0, \dots, n.$$

Z wartości  $\sigma_i/P_i$  i  $\sigma_i$  można zbudować wykres Southwella (rys. 17) dla danego doświadczenia (przypadku obciążenia, kształtu płyty i jej warunków brzegowych).



Rys. 17. Wykres Southwella

Przypadkowe błędy powodują rozrzut punktów doświadczalnych w pasmo, zawierające teoretyczną prostą Southwella. Dla wyznaczenia tej prostej trzeba zastosować metodę przybliżoną; w tym przypadku zastosowano metodę najmniejszych kwadratów.

Oznaczmy  $\sigma/P = y$ ,  $\sigma = x$  (rys. 17), a zatem wyniki doświadczeń reprezentowane są zbiorem punktów  $(x_i, y_i)$   $i = 1, \dots, n$ . Przez punkty te należy przeprowadzić prostą:

$$(7.4) \quad y = a + bx,$$

tak aby zminimalizować:

$$(7.5) \quad \sum_{i=1}^n (y_i - y)^2.$$

Wyrażenie (7.5) osiąga minimum, jeśli

$$(7.6) \quad a = \bar{y} - b\bar{x},$$

$$(7.7) \quad b = \frac{S_1 - \bar{x}\bar{y}}{S_2 - \bar{x}^2},$$

gdzie

$$(7.8) \quad \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad y = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i,$$

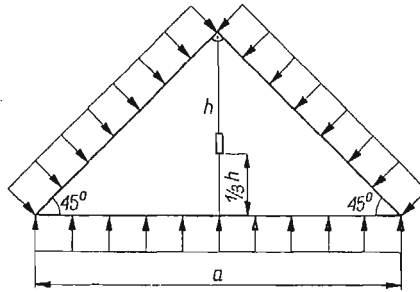
$$S_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i, \quad S_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2,$$

jak podaje [5].

Pamiętając, że  $P_{kr} = \text{ctg } \alpha$  (rys. 15) widać, że

$$(7.9) \quad P_{kr} = 1/b$$

W ten sposób z danych doświadczalnych (7.4) otrzymuje się obciążenie krytyczne (7.9) poprzez wykonanie prostych operacji arytmetycznych (7.4)–(7.7) i (7.8).



Rys. 18. Badana płyta

Dla przykładu weźmy jedno z doświadczeń dla przypadku pokazanego na rys. 18. Pierwszą czynnością eksperymentatora było ustawienie trzech zespołów obciążających zgodnie z kształtem płyty (rys. 4), a następnie regulacja dźwigni  $\delta$  zgodnie z założonym obciążeniem. Po takim dostosowaniu urządzenia do badanego przypadku rozpoczęto pomiary. Pomierzone dane przytoczono w dodatku 2.4.

Obciążenie podane jest bezpośrednio w wartościach  $\varepsilon$  elementu dynamometrycznego (relacja  $572 \mu\text{S}/1000 \text{ kG}$ ). Naprężenie zginające  $\sigma$  zastąpiono odkształceniem  $\varepsilon$  (co jest rzeczą możliwą, ponieważ wartość  $\sigma$  była znacznie niższa od granicy proporcjonalności), pokazywanym przez dwa tensometry połączone w system pół-mostka, a naklejane po obu stronach płyty w jej środku. Tensometry pokazywały więc podwójne odkształcenie zginania eliminując odkształcenie błonowe. Z wartości  $P$  i  $\varepsilon$ , podanych w tabelcy 1, otrzymujemy wartości  $x_i$ ,  $y_i$  w tabelcy 2. Z wartości tych obliczamy:

$$\bar{x} = 32,0, \quad \bar{y} = 0,1485, \quad S_1 = 6,94, \quad S_2 = 1625,$$

stąd

$$b = \frac{6,94 - 32 \cdot 0,1485}{16,25 - 32^2} = 0,00364,$$

(7.10)

$$P_{kr} = \frac{1}{0,00364} = 275 \mu\text{S}$$

albo

$$(7.11) \quad P_{kr} = \frac{275}{572} \cdot 1000 \text{ kG} = 480,05 \text{ kG}.$$

Jest to wypadkowa siła  $P$ , która przyłożona do krawędzi  $a$  wywołuje wyboczenie płyty. Wykres Southwella dla tego przypadku podano w dodatku 2.4. (rys. 34 i 35).

Dla porównania pokazano także odpowiedni wykres Southwella, oparty na pomiarze ugięcia  $f$  czujnikiem warsztatowym. Z wykresu tego otrzymuje się  $P_{kr} = 278\mu S$  — co zgadza się z wynikiem (7.10).

Z teorii ogólnej wyboczenia wiadomo, że niezależne od kształtu płyty

$$(7.12) \quad P_{kr} = k \frac{D}{A} \text{ kG/cm};$$

gdzie  $D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$  [kGcm] oznacza sztywność płyty,  $A$  — pole powierzchni płyty w  $\text{cm}^2$ ,  $p_{kr}$  — intensywność obciążenia krytycznego [kG/cm],  $p_{kr} = P_{kr}/a$ ,  $a$  — długość krawędzi płyty [cm].

Dla uogólnienia wyników doświadczenia obliczamy z (7.12) podstawiając otrzymaną wartość  $P_{kr}$  (7.11) bezwymiarowy współczynnik  $k$ , który nie zależy od sztywności i wielkości płyty.

Dla przykładu dane płyty wynoszą:  $E = 1,12 \cdot 10^6 \text{ kG/cm}^2$ ,  $t = 1,53 \text{ mm}$ ,  $\nu = 0,3$ ,  $a = 75 \text{ cm}$ ,  $A = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} = 1408 \text{ cm}^2$ ,  $D = 361 \text{ kG cm}$ ,

$$(7.13) \quad k = \frac{P_{kr}}{a} \frac{A}{D} = 49,9,$$

co odpowiada bardzo dobrze teoretycznie obliczonej wartości

$$(7.14) \quad k_t = 49,34.$$

W podobny sposób <sup>(1)</sup> otrzymano inne wartości współczynnika  $k$  i zestawiono je w p. 8.

**7.4. Ocena dokładności wyników.** Dokładność doświadczenia można ocenić na podstawie rozrzutu punktów na rys. 17, na którym też można zmierzyć odchyłkę  $\delta_i$ .

Metody statystyczne przy znajomości rozrzutu [4,5] pozwalają na ocenę szerokości pasma zawierającego prostą Southwella z pewnym prawdopodobieństwem. Prawdopodobieństwo to (poziom ufności) przyjęto 0,9 jak zwykle w doświadczeniach tej klasy. Odchyłki  $\delta_i$  dla doświadczenia przyjętego jako przykład zestawiono w tablicy 3 (dodatek 2.4)<sup>(2)</sup>.

Wskaźnik dokładności  $h = \frac{\sqrt{n(n-1)}}{\sqrt{\pi \sum |\delta_i|}} = 0,131\mu S$ , gdzie  $n$  oznacza liczbę punktów.

<sup>(1)</sup> Z wyjątkiem paru przypadków, w których moment wyboczenia zaobserwowano bezpośrednio.

<sup>(2)</sup> W niektórych przypadkach zastosowano kryterium Chauveneta [4] dla odrzucenia punktów o największym rozrzucie.

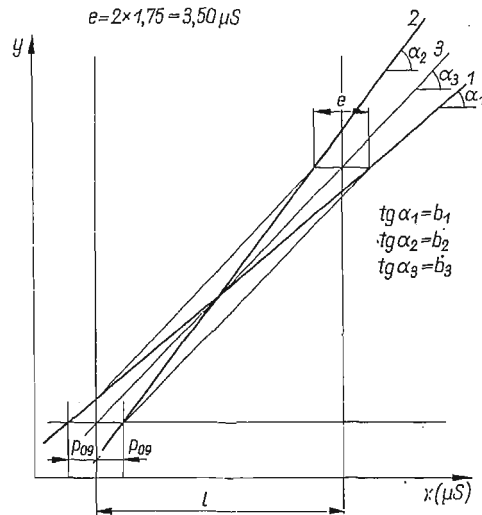
Prawdopodobny błąd wartości średniej wynosi

$$(7.15) \quad p_0 = \frac{0,845 \sum |\delta_i|}{n \sqrt{n-1}} = 0,608.$$

Wartość błędu ograniczająca przedział poziomu ufności 0,9 jest ([4], str. 1049, tablica C-2)

$$(7.16) \quad p_{0g} = 2,88 p_0 = 2,88 \cdot 0,608 = 1,75 \mu\text{S}.$$

Rezultat (7.16) oznacza fizycznie, że prawdziwa pozycja prostej Southwella znajduje się z prawdopodobieństwem 0,9 wewnątrz pasma symetrycznie położonego wokół linii minimum kwadratów (p. 7.3-1a). Szerokość tego pasma w kierunku  $x$  jest równa  $e = 2x p_{0g} = 2x \cdot 1,75 \mu\text{S} = 3,50 \mu\text{S}$ . Prosta Southwella może zatem z prawdopodobieństwem 0,9 przyjmować każde położenie pomiędzy położeniami skrajnymi 1 i 2. Pozycja 3 jest średnią ( $b_3 = b_{sr}$ ).



Rys. 19. Prawdopodobne położenie prostej Southwella

Z geometrii wynika

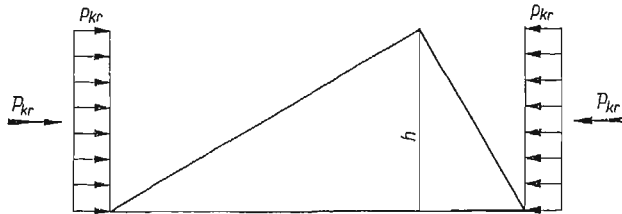
$$b_1 = b_{sr} \frac{l}{l+e} = b_{sr} \frac{1}{1+e/l}, \quad b_2 = b_{sr} \frac{l}{l-e} = \frac{1}{1-e/l},$$

ponieważ  $l = 88 \mu\text{S}$ ,  $e/l \approx 0,04$ , stąd  $b_{0g} = b_{sr} (1 \pm 0,04)$  lub  $b = b_{sr} \pm 4\%$ .

W ten sposób otrzymuje się krytyczne obciążenia  $P_{kr} = 1/b$  dla przytoczonego przykładu z dokładnością  $\pm 4\%$  dla poziomu ufności 0,9. Identyczną ocenę dokładności na poziomie ufności 0,9 przeprowadzono dla innych przypadków. Ocenione w ten sposób wartości odchyłek podano w p. 8 przy odpowiednich wartościach  $k$ . Odchyłki te są wszystkie tego samego rzędu kilku procent.

## 8. Wyniki doświadczeń

W tablicach 1 i 2 podano wyznaczone doświadczalnie wartości  $k$  występujące we wzorze  $p_{kr} = kD/A$ . Dla porównania podano także wartości otrzymane teoretycznie. Podano schematycznie kształt płyty, warunki brzegowe i obciążenie.



Rys. 20.

Tablica 1. Wszystkie brzozy swobodnie podparte(\*)

Przypadek						
$k_{daśw.}$	$24,95 \pm 4\%$	$28,75 \pm 3\%$	$35,7 \pm 3,5\%$	$43,5 \pm 3\%$	$56,65 \pm 2\%$	$28,1 \pm 1\%$
$k_{teor.}$	24,67	30,0	36,8	46,0	56,9	30,65

Przypadek				
$k_{daśw.}$	$23,5 \pm 3\%$	$41,7 \pm 1\%$	$41,0 \pm 1\%$	$60,2 \pm 1\%$
$k_{teor.}$	22,8	42,2	41,6	61,5

Przypadek				
$k_{daśw.}$	$32,2 \pm 3\%$	$91,9 \pm 6\%$	$90,6 \pm 10\%$	$38,5 \pm 8\%$
$k_{teor.}$	31,45	94,70	81,00	41,30

Przypadek			
$k_{daśw.}$	$22,85 \pm 3\%$	$49,8 \pm 3\%$	$37,5 \pm 3\%$
$k_{teor.}$	23,55	50,95	38,10

U w a g a. W przypadkach 2, 3 i 4 trójkąta  $60/60/60^\circ$  wybozczenie zaobserwowano bezpośrednio z dokładnością  $p_{kr} \pm 1\%$ .

(\*) Korekta tablicy: w górnej tablicy na rys. przypadek 2 zamiast 2/4 powinno być 3/4; na rys. poz. 4 przy naprężeniach stycznych należy dodać 3/4, a przy naprężeniach normalnych 1/4.



Tablica 2. Trójkąt prostokątny, równoramienny z zamocowanymi i swobodnie podpartymi krawędziami

Przypadek	$k_{teor.}$	$k_{dośw.}$
	69,0	64,8±5%
	144,4	118,6±10%
	67,31	82,0 <sup>(*)</sup>
	46,0	40,2±5%
	38,5	39,5±4,6%

————— brzeg utwierdzony  
 - - - - - brzeg swobodnie podparty

(\*) W tym przypadku płyta została zniszczona (pęknięcie szwu łączącego przepony pionowe z płytą) w drugim cyklu obciążenia. Liczba otrzymanych danych była zbyt mała dla oceny dokładności.

Parametr  $p_{kr}$  określa obciążenie krytyczne w sensie uogólnionym na przykład w przypadku pokazanym na rys. 20  $p_{kr} = P_{kr}/h$  i reprezentuje kombinację obciążeń normalnych i stycznych do krawędzi płyty.

## 9. Wnioski

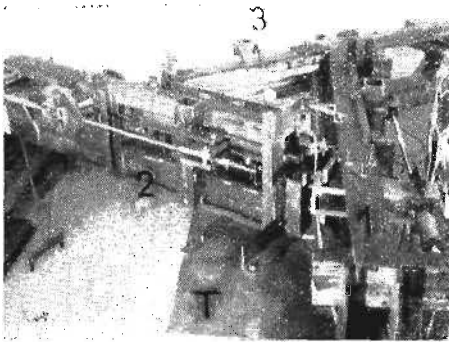
Konfrontacja rezultatów z wynikami teoretycznymi pokazuje ich bardzo dobrą zgodność w przypadku swobodnego oparcia krawędzi. Wartości otrzymane doświadczalnie są, jak można się było spodziewać, nieco mniejsze od teoretycznych. Rozbieżność dla krawędzi zamocowanych jest większa, ale i w tym przypadku można uważać wyniki teoretyczne za dobrze potwierdzone przez doświadczenie. Także i w tym przypadku doświadczalnie określone obciążenia krytyczne są mniejsze od przewidywanych teoretycznie; jak zwykle w tego rodzaju doświadczeniach jest to wynik niedoskonałego zamocowania krawędzi.

## 10. Streszczenie

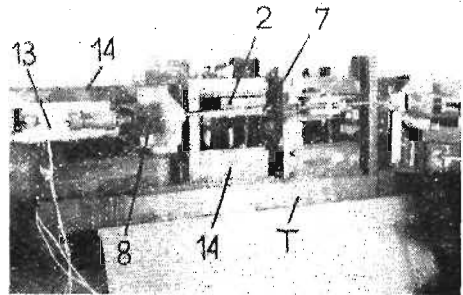
Skonstruowano i wykonano urządzenie do badania stateczności płyty trójkątnej w dowolnym kształcie pod dowolnym obciążeniem krawędzi. Urządzenie zapewnia możliwość zamocowania i swobodnego podparcia brzegów płyty, może być użyte do badania zachowania się płyty po utracie stateczności a także badania jej drgań. Po uzupełnieniu czwartym zespołem obciążającym może być użyte do badania dowolnych płyt czworobocznych.

Przeprowadzono badania stateczności płyt trójkątnych różnych proporcji, o różnych warunkach brzegowych i obciążeniach dla sprowadzenia wyników nowo opracowanej ogólnej numerycznej metody obliczeniowej.

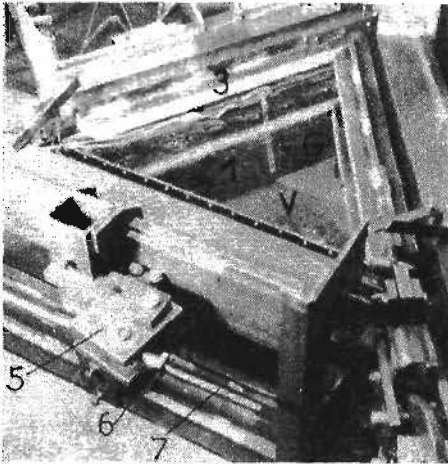
Dodatek 1. Fotografic urządzenia



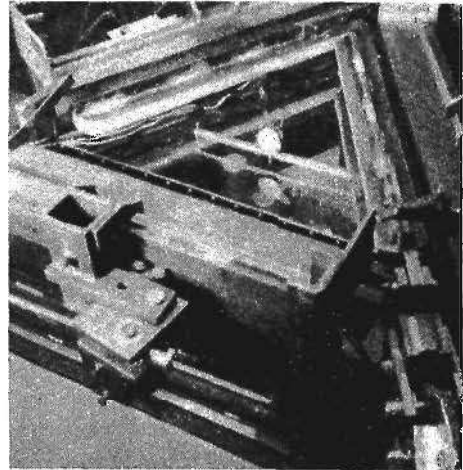
Rys. 21. Trzy zespoły urządzenia (1, 2, 3) i stalowy stół *T* użyty jako wspólna podstawa (tutaj numery odnoszą się do rys. 4)



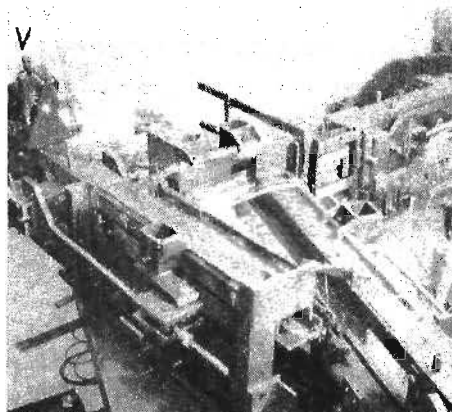
Rys. 22. Widok boczny jednego z trzech zespołów



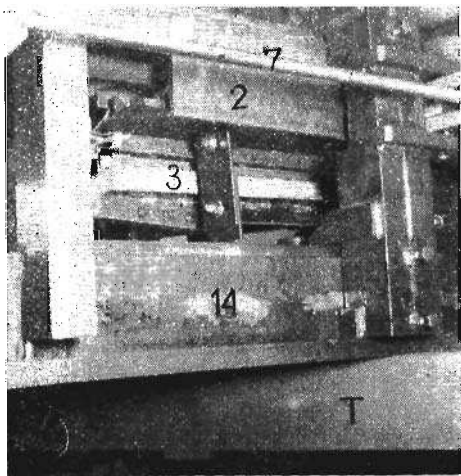
Rys. 23. Zbliżenie płyty *I* (płyta wykonana z plexi użyta tutaj jako makieta)



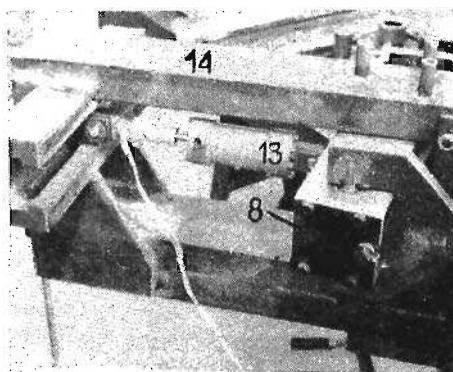
Rys. 24. Czujniki warsztatowe (zegarowe) i czujniki przemieszczeń



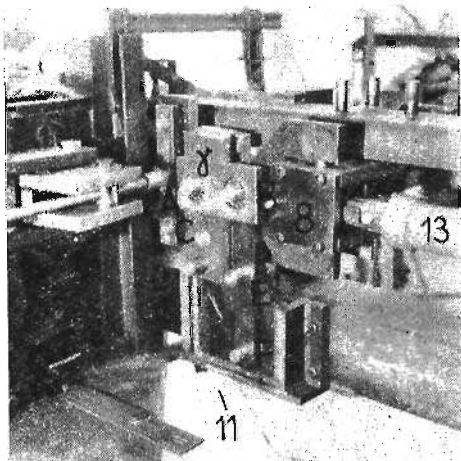
Rys. 25. Urządzenie dostosowane do płyty 90°/20°/70° (brązowej), *V* - wibrator



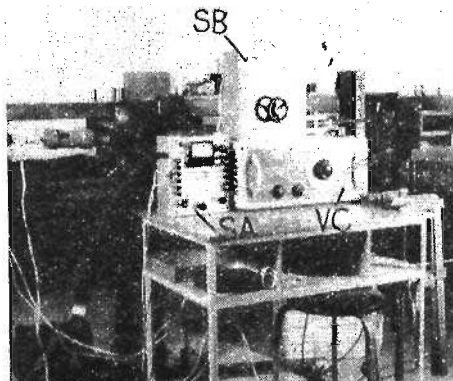
Rys. 26. Podparcie belki 2



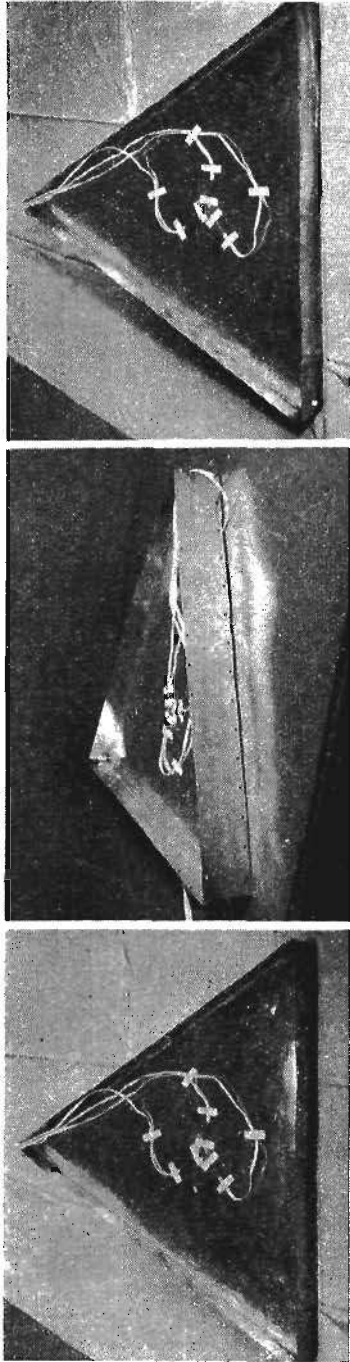
Rys. 27. Element dynamometryczny 13 umieszczony w środku dźwigni 8. Składowe normalne i styczne obciążenia równe sobie



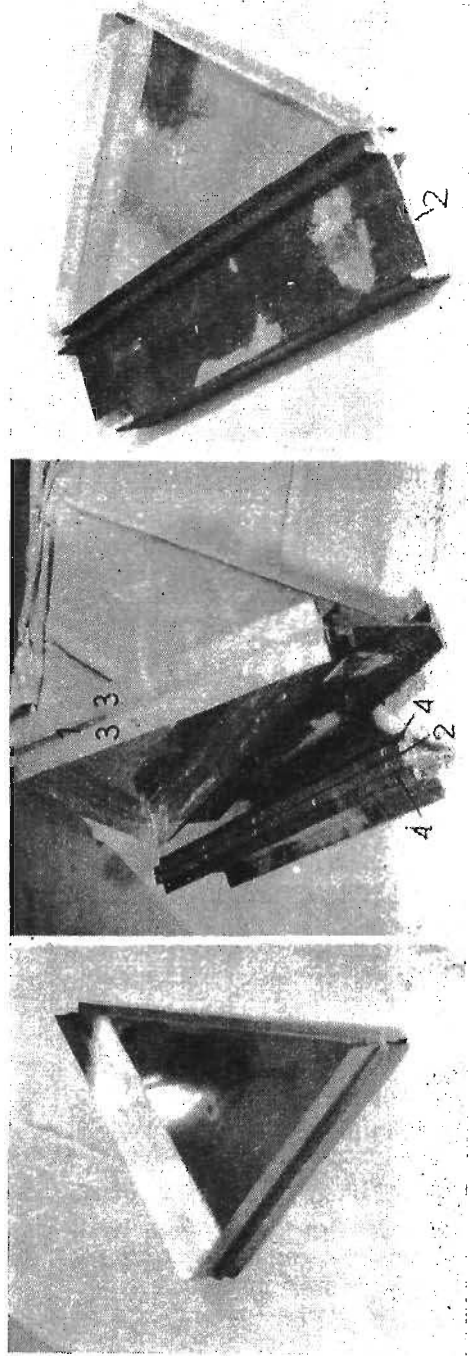
Rys. 28. Urządzenie odwracające 11. Element 13 umieszczony na końcu dźwigni 8. Obciążenie wyłącznie styczne, składowa normalna — zero



Rys. 29. SB - skrzynka przełączająca, SA - aparat tensometryczny VC - sterowanie wibratorem



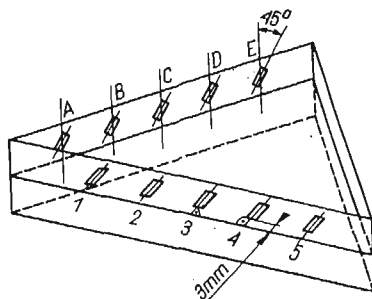
Rys. 30. Płyty używane do doświadczeń w przypadku krawędzi swobodnie opartych jak na rys. 5



Rys. 31. Płyty używane do doświadczeń w przypadku krawędzi swobodnie opartych jak na rys. 5

## Dodatek 2. Niektóre szczegóły obliczeń i doświadczeń

2.1. Równomierność obciążenia (do p. 4.1, 4.2, 7.3). Równomierność rozkładu obciążenia skontrolowano specjalnym zestawem tensometrów naklejonych jak na rys. 32. Tensometry

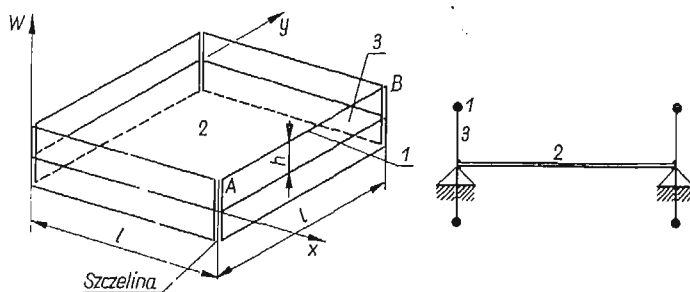


Rys. 32. Przypadek krawędzi zamocowanych. Płyta i belka 2 jak na rys. 7

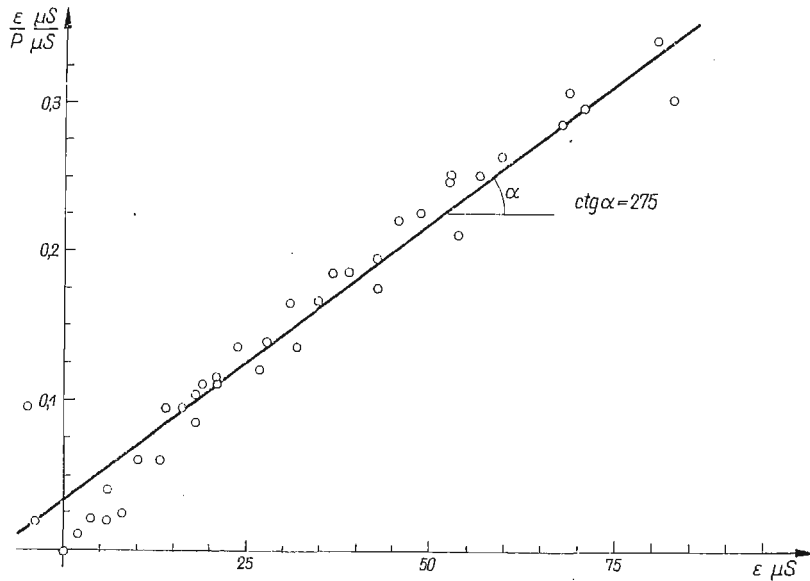
metry naklejono parami po obu stronach płyty i przepony pionowej. Każdy tensometr czynny połączony był z kompensacyjnym w system półmostka; w ten sposób można było wyeliminować wpływ lokalnego zginania. Pomiaru dokonano dla płyty:  $90^\circ/45^\circ/45^\circ$  i  $90^\circ/70^\circ/20^\circ$ . Wyniki podano w tablicy 3.

Tablica 3

$\frac{\text{kG}}{\text{cm}}$ w płaszczyźnie środkowej	Numer tensometru	1	2	3	4	5	$\frac{\text{max} - \text{min}}{\text{max} + \text{min}}$
		plyta 90/45/45	45,7 $\frac{\text{kG}}{\text{cm}}$	48,2	48,1	46,4	47,1
	plyta 90/20/70	50,1	49,2	49,2	52,0	51,5	2,73%
	numer tensometru	A	B	C	D	E	
kG/cm	90/45/45	62,0	58,5	59,8	60,4	62,5	3,30%
	90/20/70	72,0	71,6	70,8	68,2	66,6	3,90%



Rys. 33



Rys. 34 (wg tablicy 5)

2.2. Wpływ sztywności przepony pionowej na stateczność płyty (do p. 4.1). Oceny wpływu przepony dokonano jak następuje. Założono płytę prostokątną (dla uproszczenia obliczeń) jak na rys. 33. Przyjęta postać wybożenia płyty:

$$w = a \sin \frac{\pi x}{l} \sin \frac{\pi y}{l}.$$

Kąt prosty między przeponą a płytą zostaje zachowany (sztywne naroże) a brzeg przepony (np.  $AB$ ) pozostaje prosty, ponieważ połączony jest ze sztywną podłużnicą. Odształceniu płyty towarzyszą odształcenia przepony, która gromadzi pewną ilość energii sprężystej. Stosunek ilości energii zgromadzonej w przeponie do zgromadzonej w płycie jest proporcjonalny do wzrostu wartości obciążenia krytycznego w porównaniu z wartością dla krawędzi idealnie swobodnie opartej, jak wynika z energetycznego równania wybożenia:

$$\Delta V = L,$$

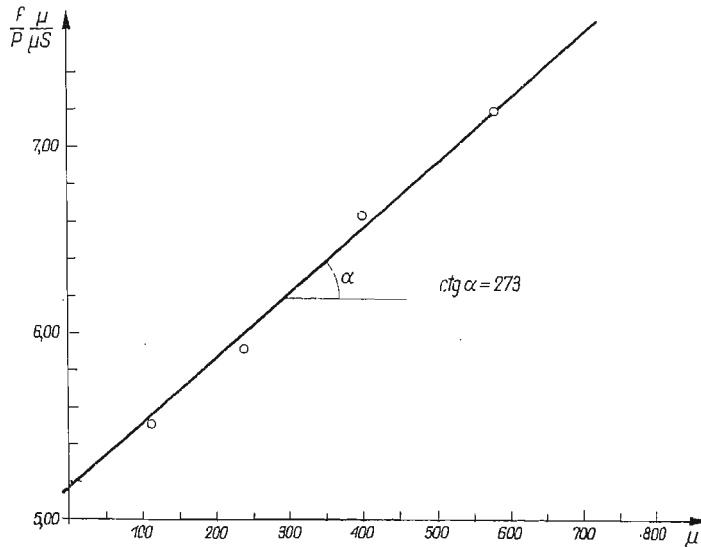
gdzie  $\Delta V$  jest energią zginania,  $L$  pracą obciążeń zewnętrznych. Oczywiście jest, że obecność przepony nie wpływa na wartość  $L$ , ale powiększa  $\delta \Delta V$  przyrost  $\Delta V$ .

Ponieważ  $p_{kr}$  zawarte jest w  $L$ , a zatem wzrasta ono wraz z  $\delta \Delta V$ .

Postać ugięcia przepony określana jest warunkiem zgodności przemieszczeń na krawędzi płyty i warunkiem równowagi poprzecznej podłużnicy  $l$ . Obliczenie przeprowadzono dla następujących wartości:

płyta prostokątna  $50 \times 50$  cm grubości  $t_p = 1,5$  mm,  
 przepona  $h = 4$  cm  $t_m = 0,5$  mm,  
 wykazują wzrost  $p_{kr}$  o 1,2%.

Wynik ten z dużym prawdopodobieństwem można uważać za określający rząd wielkości wpływu przepony w przypadku płyty trójkątnej o tym samym polu powierzchni. Zauważmy, że wpływ przepony oczywiście zmniejsza się wraz ze zmniejszaniem pola powierzchni płyty (dla stałych  $h$  i  $t_m$ ).



Rys. 35. Wykres Southwella dla przypadku jak wyżej, ale oparty na bezpośrednim pomiarze ugięcia środka płyty

2.3. Możliwość zastosowania wykresu Southwella dla ogólnego przypadku obciążenia ściskającego  
Równanie równowagi (wg Bleicha)

$$\nabla^4 w_1 = \frac{1}{D} \left[ N_x \frac{\partial^2}{\partial x^2} (w_0 + w_1) + N_y \frac{\partial^2}{\partial y^2} (w_0 + w_1) + 2N_{xy} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (w_0 + w_1) \right];$$

$D$  oznacza sztywność płytową,  $w_1$  — ugięcie płyty (funkcja  $xy$ ) mierzone od wartości ugięcia wstępnego,  $w_0$  — parametr wstępnego ugięcia (pofalowania,  $N_x, N_y$  — zewnętrzne siły normalne w płaszczyźnie środkowej kG/cm,  $N_{xy}$  — zewnętrzne siły styczne w płaszczyźnie środkowej kG/cm, dane:  $w_0 = a_{11} f(xy)$ ;  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = r^2 f$ ;  $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -g^2 f$ ;  $r, g$  — stałe parametry.

Założenie:  $w_1 = a f(xy)$ .

Z równania (1) otrzymujemy:

$$(2) \quad A(g^4 + g^2 r^2 + r^4) = \frac{1}{D} [N_x a_{11} g^2 + N_y a_{11} r^2 - N_{xy} a_{11} g r] + A(N_x g^2 + N_y r^2 - N_{xy} g r),$$

Jeśli siły  $N_x$ ,  $N_y$ ,  $N_{xy}$  wzrastają jednocześnie, to można jedną z nich obrać jako wspólny parametr:

$$N_x = N_x, \quad N_y = kN_x, \quad N_{xy} = hN_x.$$

Wtedy równanie (2) przekształca się

$$(3) \quad A(g^4 + g^2r^2 + r^4) = \frac{N_x}{D} [a_{11}(g^2 + kr^2 - hgr) + A(g^2 + kr^2 - hgr)].$$

Jeśli  $a_{11} = 0$  (plyta idealnie płaska), to z (3) otrzymamy

$$(3a) \quad N_x = \frac{g^4 + g^2r^2 + r^4}{g^2 + kr^2 - hgr} D = N_{kr},$$

wtedy dla  $a_{11} \neq 0$  (plyta wstępnie pofalowana) wynika także na podstawie

$$(4) \quad A = a_{11} \frac{1}{D} \frac{N_x(g^2 + kr^2 - hgr)}{(g^4 + g^2r^2 + r^4) - N_x(g^2 + kr^2 - hgr)} \frac{1}{D}$$

oraz uwzględniając (3a) otrzymujemy

$$(5) \quad w_0 = a_{11} \frac{1}{1 - \frac{N_x}{N_{kr}}}.$$

Wyrażenie (5) jest podstawą metody Southwella i w tym przypadku otrzymaliśmy je dla ogólnego przypadku obciążenia zawierającego trzy składowe  $N_x$ ,  $N_y$ ,  $N_{xy}$ .

Powyższe rozważania ważne są dla płyty o dowolnym kształcie (nie tylko trójkątnym) i dowolnych warunkach brzegowych, ponieważ teoretycznie zawsze możliwe jest znalezienie funkcji  $f(xy)$  odpowiadającej kształtowi i warunkom brzegowym płyty.

#### 2.4. Dane liczbowe wybranego doświadczenia (do p. 7.3)

Tablica 4. Wypadkowa obciążenia ściskającego (w  $\mu S$ ) oraz odkształcenia zginania w środku płyty (por. p. 7.3, rys. 18). Dane bezpośrednio zmierzone w doświadczeniu

$P$	$\epsilon \mu S$ 1 cykl	$\epsilon \mu S$ 2 cykl	$\epsilon \mu S$ 3 cykl	$\epsilon \mu S$ 4 cykl
53	5			
103	4			
158	-6		-6	-14
168	-8		-10	-19
178	-16	0	-19	-24
188	-21	-2	-21	-31
198	-28	-4	-28	-37
208	-35	-13	-39	-46
218	-43	-18	-49	-53
228	-60	-27	-57	-69
238	-68	-32	-71	-81
248		-43		
258		-54		
268		-65		
278		-83		



Tablica 5. Proces przetwarzania danych

$$y = \frac{\varepsilon}{P} \left[ \frac{\mu S}{\mu S} \right], \quad x = \varepsilon[\mu S]$$

	$y_i$	$x_i$	$x_i^2$	$x_i y_i$
				$\cdot 10^{-2}$
1	0,096	-5	25	-48
2	0,018	-4	16	-7,2
3	0	0	0	0
4	0,01	2	4	2
5	0,02	4	16	8
6	0,02	6	36	12
7	0,04	6	36	24
8	0,023	8	64	18,4
9	0,060	10	100	60
10	0,062	13	169	80,5
11	0,095	14	196	133
12	0,095	16	256	152
13	0,0825	18	324	148,5
14	0,105	18	324	189
15	0,110	19	361	209
16	0,11	21	441	231
17	0,115	21	441	242
18	0,135	24	577	324
19	0,120	27	729	324
20	0,14	28	784	392
21	0,14	28	784	392
22	0,165	31	1081	512
23	0,167	35	1225	584
24	0,185	37	1359	684
25	0,185	39	1521	722
26	0,220	46	2116	1020
	2,5185	462	12985	6408,2
27	0,262	60	3600	15,7
28	0,285	68	4500	19,35
29	0,135	32	1025	4,32
30	0,175	43	1940	7,52
31	0,215	54	2920	11,6
32	0,245	65	4230	15,8
33	0,30	83	6900	24,9
34	0,225	49	2410	11,0
35	0,250	57	3260	14,25
36	0,295	71	5050	20,9
37	0,245	53	2820	13,0
38	0,305	69	4775	21,0
39	0,340	81	6850	27,5
$\sum_{i=1}^{39}$	5,796	1247	63265	270,920

Tablica 6. Odchyłki  $\delta_x$  punktów  $x, y$  od prostej najmniejszych kwadratów

	$x$
1	0
	21
	8
	7
	8
	10
	10
	4
	2
	5
	5
	1
	3
	2
	3
	1
	0
	2
	4
	2
	2
	4
	0
	3
	8
	4
	3
	3
	2
	6
	5
	4
	5
	3
36	3
	153

## Literatura cytowana w tekście

1. S. TIMOSHENKO, J. GERE, *Theory of elastic stability*, 1961.
2. F. BLEICH, *Buckling Strength of Metal Structures*, 1952.
3. G. GERARD, *Structural Stability Theory*, 1962.
4. M. HETENYI, *Handbook of Experimental Stress Analysis*, 1950.
5. W. LINNIK, *Metoda najmniejszych kwadratów*, 1962.
6. P. V. PEDERSEN, *Buckling and vibrations of triangular plates* (w przygotowaniu w NTH, Trondheim).
7. Z. KĄCZKOWSKI, *Obliczanie płyt anizotropowych metodą nakładania ugięć faldowych*, Arch. Mech. Stos., 3, 5 (1953), 455-496.
8. Z. KĄCZKOWSKI, *Drgania swobodne i wyboeczenie płyty trójkątnej*, Arch. Mech. Stos., 8 (1956), 13-28.
9. R. SOLECKI, *Rozwiązanie ogólne płyty trójkątnej 30°-60°-90° za pomocą transformacji właściwej*, Arch. Inżyn. Lądow., 2, 6 (1960).
10. R. SOLECKI, *Rozwiązanie ogólne płyty o kształcie trójkąta prostokątnego*, Rozpr. Inżyn., 2, 8 (1960).

## Резюме

## ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИСПЫТАНИЕ ТРЕХУГОЛЬНЫХ ПЛИТ

В работе представлен метод и результаты экспериментов по устойчивости треугольных плит, проведенных в лаборатории норвежского политехнического института.

Результаты экспериментально определенных критических сил составлено со значениями, полученными для этих сил численным методом, специально разработанным в институте. Констатируется, что эти теоретические значения вполне совпадают с экспериментальными.

## Summary

EXPERIMENTS ON TRIANGULAR PLATE STABILITY UNDER LOAD  
IN ITS OWN PLANE

A rig for arbitrary loading of triangular plate of various geometry was designed and constructed.

The rig provides simply-supported and clamped boundary conditions, and may be used for large-deflection investigations and, possibly, also vibration tests; after adding another unit, it may be used for a four-sided plate.

To check the theoretical results obtained by a newly developed general numerical method, the experiments on various plates and loading cases were carried out.

It was found that the experiments confirmed the theoretical results.

POLITECHNIKA WARSZAWSKA

*Praca została złożona w Redakcji dnia 26 października 1965 r.*