MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
1, 3 (1965)

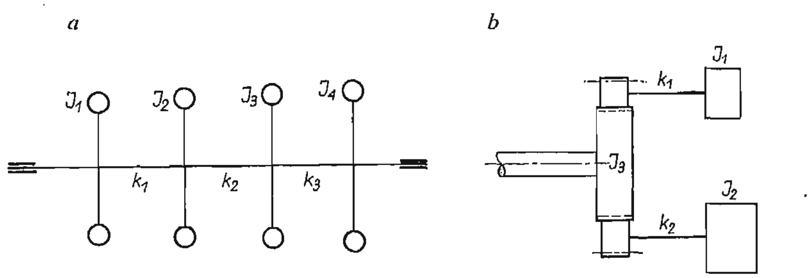
SYNTEZA KINETYCZNA OGÓLNEGO UKŁADU MECHANICZNEGO

WŁADYSŁAW BOGUSZ, JANISŁAW SKOWROŃSKI (WARSZAWA)

Wstęp

Zagadnienie konstruowania maszyn i urządzeń mechanicznych na podstawie warunków optymalnych jest jednym z podstawowych problemów w przemyśle maszynowym. Konstruktorzy muszą realizować coraz bardziej skomplikowane warunki stawiane maszynom odnośnie ich ciężaru, wytrzymałości, trwałości, bezpieczeństwa i dokładności ich pracy. Korzystają przy tym z wyników badań naukowych, pomiarów i teorii układów mechanicznych. Tok postępowania jest skomplikowany i prowadzi od analizy przypuszczalnego modelu układu do syntezy i powtórnej analizy.

W artykule zajmiemy się kinetyczną syntezą ogólnego układu mechanicznego. Po sformułowaniu problemu podamy przegląd wyników badań w tej dziedzinie w oparciu o współczesną literaturę oraz możliwe podejścia do konkretnych zagadnień. Sformułowanie problemu oprzemy na modelu układu mechanicznego, który rozważany jest w pracach [62, 63, 64]. Model zastępujący rzeczywisty układ mechaniczny jest układem punktów materialnych połączonych ze sobą sprężynami, tłumikami dodatnimi i częściowo ujemnymi i obciążonych uogólnionymi siłami zewnętrznymi. W praktyce stosuje się dwa typy modeli: o połączeniu prostym i rozgałęzionym. Modelami o połączeniu prostym zastępuje się np. wały wykorbione, mosty, dźwigi oraz maszyny, w których przekazywanie mocy jest jednoliniowe.



Rys. 1

Modelami rozgałęzionymi zastępuje się urządzenia mechaniczne, w których występuje rozgałęzienie strumienia mocy, jak np. napęd śruby okrętowej turbinami niskiego i wysokiego ciśnienia oraz konstrukcje, w których jeden element jest połączony przynajmniej z trzema innymi elementami za pomocą więzów sprężystych. Dwa takie modele przedstawione są na rys. 1. Model 1a przedstawia wał wykorbiony, a model 1b — napęd turbinami I_1 i I_2 śruby okrętowej. Przez I oznaczono momenty bezwładności, a przez k — połączenia sprężyste.

1. Zagadnienie syntezy kinetycznej

Ruch układu zastąpionego modelem może być opisany równaniem różniczkowym w postaci wektorowej

$$\ddot{q}+F(q,\dot{q},t)=0 \tag{1.1}$$

z warunkami początkowymi $(t_0, q_0, \dot{q}_0)\varepsilon\Omega_\alpha$, gdzie q, $\dot{q}$ oznaczają n-wymiarowe wektory, funkcja $F(q, \dot{q}, t)$ określa pole wektorowe w obszarze otwartym Ω, zawartym w czasoprzestrzeni $(2n+1)$-wymiarowej Euklidesa, zaś obszar Ω_α jest zawarty w Ω i określony jest w następujący sposób:

$$\Omega_\alpha\{|q_0|<\alpha,\ |\dot{q}_0|<\alpha,\ 0\leqslant t_0<+\infty\}, \tag{1.2}$$

gdzie α jest dowolną stałą. Dodatkowo przyjmiemy założenie, że dla układu (1.1) są spełnione warunki istnienia i jednoznaczności rozwiązań.

Zgodnie z własnościami przyjętego modelu mechanicznego operator $F(q, \dot{q}, t)$ może być przedstawiony w postaci różnicy operatora charakterystyk i operatora wymuszenia:

$$F(q,\dot{q},t)=\tilde{F}(q,\dot{q})-G(q,\dot{q},t). \tag{1.3}$$

Operator $\tilde{F}$ można przedstawić w postaci

$$\tilde{F}(q,\dot{q},)=\Phi^p(|q|,\dot{q})+\Phi^n(|q|,\dot{q})+\Psi(q), \tag{1.4}$$

gdzie Φ^p jest operatorem tłumienia dodatniego, Φ^n — operatorem tłumienia częściowo ujemnego, które jest wynikiem działania zewnętrznego źródła energii, a Ψ jest operatorem sił sprężystych.

Odnośnie tych operatorów uzasadniono w pracach [62, 63, 64] pewne ich dodatkowe własności. Na podstawie tych własności przyjmiemy następujące założenia (1.5) i (1.6)

$$\Phi^p\dot{q}\geqslant 0,\quad \Phi^p(|q|,0)=0,\quad \frac{\partial\Phi^p}{\partial\dot{q}}>0,\quad \frac{\partial\Phi^p}{\partial|q|}>0 \tag{1.5}$$

dla q i $\dot{q}$ należących do $2n$-wymiarowego podobszaru Δ zawartego w Ω;

$$\Phi^n\dot{q}>0,\quad \frac{\partial\Phi^n}{\partial\dot{q}}\geqslant 0,\quad \frac{\partial\Phi^n}{\partial|q|}\geqslant 0,\quad \Phi^n(|q|,0)=0 \tag{1.6}$$

dla $|\dot{q}|\varepsilon(Q,\infty)$ i $q<\infty$, gdzie Q jest pewną stałą, a q i $\dot{q}$ należą do Δ.

Nierówności (1.6) nie muszą być spełnione dla $|\dot{q}|<Q$, czyli Φ^n w tym przedziale może być dowolnym operatorem. Zakładamy jednak, że istnieje pewna stała M^* zależna od Q i taka, że spełniona jest nierówność

$$|\Phi^n|<M^*(Q)$$

dla każdego q i $\dot{q}$ należących do Δ.

Odnośnie operatorów Ψ i G założymy

$$\Psi(q)q>0,\quad \Psi(0)=0 \tag{1.7}$$

dla q i $\dot{q}$ należących do Δ, a

$$G(q, \dot{q}, t) \neq 0 \quad \text{dla} \quad t \neq 0. \tag{1.8}$$

W teorii drgań nieliniowych występują dwie grupy zagadnień. Do pierwszej należą zagadnienia istnienia ruchu rzeczywistego, opisanego równaniami, wyprowadzonymi na podstawie przyjętego modelu. Są to zagadnienia związane ze strukturą układu, charakterystykami oraz statecznością ruchu. Do drugiej grupy należy zagadnienie rozwiązania otrzymanych równań i oceny dokładności otrzymanych wyników. Na tle tych dwóch grup zagadnień rozwija się teoria analizy i syntezy.

Aby przejść od rzeczywistej konstrukcji do modelu i do równań opisujących ruch, stosujemy analizę strukturalną. Przy działaniu odwrotnym, a więc projektując konstrukcję na podstawie obranego modelu, stosujemy syntezę strukturalną. Oprócz tych dwóch operacji nad strukturą układu rozróżniamy jeszcze analizę kinetyczną i syntezę kinetyczną.

Analiza kinetyczna polega na badaniu przebiegu rozwiązań równań ruchu, zaś taki dobór operatorów w równaniu ruchu, aby otrzymać żądaną postać ruchu, jest syntezą kinetyczną. Do konstrukcji układu mechanicznego dochodzimy przez wielozwrotną analizę i syntezę kinetyczną i strukturalną.

Rozważmy jeden krok w tej procedurze, syntezę kinetyczną, zakładając że w wyniku analizy i syntezy strukturalnej otrzymaliśmy model zastępczy i równania ruchu w postaci (1.1) oraz analizą kinetyczną określiliśmy przebieg rozwiązania tych równań. Zadaniem syntezy kinetycznej jest wyznaczenie operatora $F(q, \dot{q}, t)$ z pewnej dopuszczalnej klasy funkcji określonych w pewnym obszarze Ω w ten sposób, aby ruch określony równaniami (1.1) spełniał z góry ustalone warunki. Oczywiście, że istnienie rozwiązania syntezy (istnienie operatora F) zależy od warunków, które mają być zrealizowane przez układ. Jeżeli istnieje rozwiązanie syntezy, układ mechaniczny nazywamy syntezowalnym ze względu na żądane warunki. Klasa funkcji dopuszczalnych, określających operator F, nazywa się zakresem syntezowalności, a obszar Ω — obszarem syntezowalności. Operator F spełniający warunki syntezy nazywa się funkcją syntezującą.

W celu rozwinięcia teorii tak określonej syntezy kinetycznej należy rozwiązać zagadnienia istnienia i jednoznaczności rozwiązań oraz opracować metodę otrzymania rozwiązania. Trudności związane z tymi zagadnieniami można scharakteryzować następująco.

Układ (1.1) otrzymany w wyniku syntezy strukturalnej zawiera operator F należący do pewnej klasy funkcji, a więc ruch opisany układem (1.1) ma pewne ogólne własności. Jeżeli warunki syntezy kinetycznej są sprzeczne z tymi własnościami, to rozwiązanie syntezy nie istnieje.

Przypuśćmy np., że układ (1.1) opisuje ruch układu zachowawczego. Żądanie wyznaczenia funkcji $F(q)$ w ten sposób, aby ruch zanikał, jest niemożliwe i synteza kinetyczna nie ma rozwiązania. Można oczywiście przytoczyć wiele przykładów, w których synteza nie ma rozwiązania i z tego względu każdą syntezę musi poprzedzać analiza kinetyczna w celu ustalenia zakresu syntezowalności i ogólnych własności ruchu.

Jeżeli operator F określa jedyną funkcję syntezującą, to synteza nazywa się brzegową, w przypadku zaś, gdy określa on pewną podklasę w zakresie syntezowalności, synteza jest wewnętrzną. Przykładem syntezy brzegowej może być dobór funkcji $\Psi(q) = k^2 q$ w równaniu drgań układu: $\ddot{q}+\Psi(q)+2h\dot{q} = A \sin\omega t$ tak, aby amplituda drgań osiągała maksimum przy danych $h > 0$ oraz ω. Jedyną odpowiedzią jest tu $k^2 = \omega^2$.

Przykładem syntezy wewnętrznej jest taki dobór funkcji $\Psi(\dot{q}) = 2h\dot{q}$, aby ruch opisany równaniem $\ddot{q}+2h\dot{q}+k^2 q = 0$ był oscylacyjny. Odpowiedź nie jest jedyną, gdyż otrzymujemy nierówność $k^2 - h^2 > 0$. W obu przykładach zakresem syntezowalności jest klasa funkcji liniowych.

Można ogólnie scharakteryzować syntezę brzegową jako rozwiązanie problemu przez dobór ustalonych parametrów lub postaci operatora F bez możliwości dalszych zmian. Przy syntezie wewnętrznej mamy możliwości wyboru parametrów lub funkcji spośród funkcji syntezujących, na przykład przez optymalizację. Z tego względu syntezę kinetyczną często niesłusznie nazywa się optymalizacją.

Optymalizacja rozwinięta w teorii układów automatyki ma odmienny sens. Mając dany sygnał na wejściu szuka się w teorii optymalizacji operacji matematycznych, które należy zastosować na tym sygnale po to, aby na wyjściu spełniał on żądany warunek. Operacje matematyczne są wprawdzie funkcjami optymalizującymi, ale realizacja ich przez konstruktora jest dowolna. Wymaga to dalszej pracy konstruktora, którą można nazwać syntezą, przy czym funkcja optymalizująca jest warunkiem syntezy.

Celem syntezy kinetycznej jest natomiast podanie konkretnych rozwiązań konstrukcyjnych dotyczących sił sprężystych, sił tłumienia lub sił wymuszających w modelu przedstawiającym maszynę. Zadaniem konstruktora jest jedynie dobranie elementów przedstawionych na modelu o określonych własnościach i zbudowanie z nich maszyny.

Mimo tej różnicy między optymalizacją a syntezą kinetyczną, metody stosowane w optymalizacji można przenieść do syntezy zależnie od warunku syntezy oraz od modelu mechanicznego. Przypuśćmy dla przykładu, że w procesie syntezy kinetycznej należy otrzymać ruch opisany daną funkcją czasu dla danego modelu mechanicznego. W tym przypadku metoda minimum kwadratu średniej odchyłki stosowana w teorii optymalizacji może być przeniesiona bez modyfikacji do syntezy kinetycznej.

Omówimy obecnie pewne grupy zagadnień związanych z syntezą kinetyczną. W modelu mechanicznym, którego ruch opisuje układ równań (1.1), występują dwa operatory $\tilde{F}(q, \dot{q})$ i $G(q, \dot{q}, t)$. Pierwszy z nich określa charakterystyki układu, drugi jest operatorem wymuszającym ruch. Wiele zagadnień syntezy kinetycznej dotyczy wyznaczenia operatora $\tilde{F}$ przy danym wymuszeniu G i żądanym przebiegu ruchu. Oznacza to, że mając model mechaniczny należy ustalić typ układu (liniowy, nieliniowy) oraz wyznaczyć jego charakterystyki sił sprężystych i tłumienia.

Z tego rodzaju zagadnieniem spotykamy się przy konstrukcji amortyzatorów i tłumików w pojazdach mechanicznych. Wymuszenie ruchu przez nierówności jezdni można dla pewnych typów jezdni określić, a następnie w procesie syntezy można wyznaczyć charakterystyki amortyzatorów i tłumików przy warunku jazdy bez wstrząsów.

Tok rozwiązania tego zagadnienia powinien przebiegać następująco. Pojazd mechaniczny należy zastąpić modelem i ułożyć ogólne równania ruchu. Ten proces jest przedmiotem analizy i syntezy strukturalnej. Syntezę kinetyczną można przeprowadzić metodą kolejnych przybliżeń. W pierwszym przybliżeniu można przyjąć układ liniowy i ustalić własności możliwych do zrealizowania ruchów. Jeżeli w zakresie tych własności można zrealizować żądany przebieg jazdy, to przystępujemy do określenia charakterystyk liniowych amortyzatorów i tłumików.

Z praktyki wiadomo, że ten prosty narzucający się tok postępowania, nie prowadzi do zadowalających wyników. W drugim przybliżeniu można przyjąć układ jako nieliniowy i uzupełnić funkcje liniowe wyrazami nieliniowymi.

Pozytywne rozwiązanie zagadnienia zależy w dużym stopniu od ujęcia matematycznego warunku syntezy. tzn. od matematycznego opisu jazdy spokojnej bez wstrząsów. Z tego opisu otrzymujemy równania, z których wyznaczamy operator $\tilde{F}(q, \dot{q})$. Do tej grupy zagadnień należą syntezy maszyn wibracyjnych, obrabiarek, dźwigarów, mostów, suwnic itd. przy odpowiednich warunkach syntezy.

Druga grupa zagadnień związana jest z wyznaczeniem operatora wymuszeń $G(q, \dot{q}, t)$ przy danym operatorze $\tilde{F}(q, \dot{q})$, a więc przy danym polu sił. W tym przypadku operator G można uważać za operator sterujący i stosować metody z teorii sterowania. Do tej grupy należy zagadnienie przenoszenia pocisku z danego miejsca do celu. To zagadnienie przy przyjęciu specjalnej postaci równań (1.1) zostało rozwiązane w wielu pracach (np. [21, 23, 42]) i nazywa się sterowaniem «bangbang» lub «on-of».

W przemyśle hutniczym spotykamy się z tym zagadnieniem przy projektowaniu napędów: zwijarek blach, walcarek, młotów itd. Również do tej grupy zagadnień należą w przemyśle górniczym zagadnienia napędów maszyn wyciągowych, wrębiarek łańcuchowych, żerdzi wiertniczych itd. Oczywiście każde z tych zagadnień wymaga opracowania właściwej metody wyznaczenia funkcji syntezującej.

Trzecia grupa zagadnień łączy się z poprzednimi i dotyczy przypadków, gdy operatory $\tilde{F}$ i G są częściowo ustalone i należy je tak określić, aby rozwiązania układu (1.1) wchodziły do danego obszaru po skończonym czasie. Są to zagadnienia procesów przejściowych, a więc rozruch i zatrzymywanie agregatów, pomiar wielkości szybkozmiennych, dostrajanie odbioru do zasilania, regulacja biegu maszyn itd. Chodzi tu o przeprowadzenie układu z jednego stanu w drugi w skończonym czasie.

Odnośnie tego zagadnienia przytoczymy pewne wyniki syntezy kinetycznej na podstawie prac [64, 66]. Weźmy pod uwagę równanie (1.1). Pomnożymy lewą stronę przez $\dot{q}$ i korzystając z oznaczeń (1.3) i (1.4) oznaczymy przez $N(q, \dot{q}, t)$ funkcję

$$N(q, \dot{q}, t) = G\dot{q} - \Phi^n\dot{q} - \Phi^p\dot{q}, \tag{1.9}$$

gdzie $G\dot{q}$ jest mocą pochodzącą od sił zewnętrznych, $\Phi^n\dot{q}$ — mocą sił ujemnego tłumienia i $\Phi^p\dot{q}$ — mocą sił tłumienia dodatniego.

Oznaczymy jeszcze przez $N^p = G\dot{q} - \Phi^n\dot{q}$ moc zewnętrzną, a przez $N^n = -\Phi^p\dot{q}$ moc sił tłumienia. Przy tych oznaczeniach otrzymamy:

$$N = N^p + N^n. \tag{1.10}$$

Oprócz założeń od (1.2) do (1.8) przyjmiemy dodatkowe, które można uzasadnić własnościami fizycznymi układów mechanicznych:

a) rozważamy obszar Ω_α taki, że dla każdego $t = \text{const}$ N jest monotoniczną funkcją q, $\dot{q}$;

b) istnieje takie $M > 0$, że zachodzi nierówność $|N^p(q, \dot{q}, t)| < M$ dla $(q, \dot{q})\varepsilon\Omega_\alpha$ czyli że moc sił zewnętrznych jest ograniczona;

c) w otoczeniu punktu O istnieje taki podobszar określony nierównością

$$0 < \varepsilon < q^2 + \dot{q}^2 < \eta^2(\mu),$$

że wzdłuż każdego rozwiązania należącego do tego podobszaru zachodzi nierówność

$$G\dot{q} - \Phi^n\dot{q} \geqslant \Phi^p\dot{q} + \mu^2,$$

gdzie ε, μ są stałymi, a η jest stałą zależną od μ.

Przy tych założeniach wykazano w pracy [64, 66] następujące twierdzenia:

1) istnieje jedyny podobszar $\Omega_0 C \Omega_\alpha$ taki, że wszystkie rozwiązania wychodzące z Ω_α wchodzą do Ω_0 po skończonym czasie niezależnym od chwili początkowej $t = t_0$;

2) istnieje podobszar $\Omega_0' C \Omega_\alpha$ taki, że wszystkie rozwiązania wychodzące z Ω_α pozostają na zewnątrz obszaru Ω'_0 po skończonym czasie zależnym od warunków początkowych.

Podobszar Ω_0, do którego wchodzą rozwiązania, nazywamy obszarem granicznym. Granice tego obszaru oraz liczba jego wymiarów zależą od operatora tłumienia. Jak wynika z powyższych twierdzeń, w procesie syntezy kinetycznej stwierdzono istnienie obszaru granicznego. Warunkiem syntezy w tym przypadku było żądanie wchodzenia rozwiązań po skończonym czasie. Można wysunąć dalsze warunki syntezy, na przykład aby Ω_0 sprowadzał się do położenia równowagi lub do cyklu granicznego itd. Spełnienie tych warunków jest możliwe przez odpowiedni dobór operatora tłumienia.

2. Metody stosowane w syntezie kinetycznej

Odnośnie metod rozwiązywania syntezy kinetycznej ogólnego układu mechanicznego należy stwierdzić, że ogólna metoda nie została dotychczas opracowana. Można jednak korzystać z metod matematycznych opracowanych dla podobnych zagadnień mechaniki teoretycznej. Do nich np. należą:

1) metody stosowane w teorii optymalizacji układów automatyki;
2) zasady wariacyjne klasycznej mechaniki;
3) metoda syntezy parametrycznej;
4) metody kolejnych przybliżeń;
5) metody energetyczne;
6) metoda eksperymentalno-teoretyczna.

Trzy pierwsze dotyczą ogólnego przypadku syntezy, trzy zaś ostatnie — pewnych przypadków szczególnych. Pierwsza grupa metod ma ograniczony zakres zastosowań z tego powodu, że są one opracowane w literaturze przy założeniach liniowości układu równań ruchu. Wyczerpująco są te metody opisane w pracach [9–19].

Na szczególną uwagę zasługują metody opracowane dla rozwiązania nieliniowego problemu optymalizacji czasu przejścia układu z jednego położenia w drugie. Zagadnienie to rozwiązali w swoich pracach BUSHAW, BELLMAN, KRASSOWSKI, GAMKREILIDZE, PONTRIAGIN, BOLTIANSKI i LA SALLE.

Również analiza funkcjonalna znalazła zastosowanie do rozwiązania powyższego problemu. Optymalne ujęcia tej metody można znaleźć w pracach [27, 29, 30, 31].

Zastosowanie zasad wariacyjnych mechaniki klasycznej przedstawione jest w pracach [3, 38, 39, 40]. Podstawą metody rozwiązania syntezy jest teoria mnożników Lagrange'a. Bliżej objaśnimy tę metodę w dalszej części artykułu.

Synteza parametryczna polega na ustaleniu grupy parametrów określających charakterystyki układu w taki sposób, aby otrzymać warunek syntezy. Opisana jest ona w pracach [22, 23].

Wiele prac z mechaniki teoretycznej i stosowanej dotyczy problematyki związanej właściwie z syntezą kinetyczną, mimo że autorzy nie używają tej nomenklatury wyraźnie. Dla przykładu można wymienić prace, w których zagadnienia są rozwiązane metodą δ-delta. Jest to metoda pozwalająca na określenie parametrów układu równań ruchu ciągiem kolejnych przybliżeń. Metoda ta ma zastosowanie zwłaszcza w przypadku, gdy warunek syntezy jest sformułowany w postaci żądanej trajektorii ruchu.

Zastosowanie metod energetycznych w procesie syntezy opisane jest w pracy [24].

Ostatnia z wymienionych metod, metoda eksperymentalno-teoretyczna, znajduje obecnie coraz większe zastosowanie ze względu na możliwość wykorzystania aparatury pomiarowej, maszyn analogowych i cyfrowych. Konfrontacja wyników otrzymanych z eksperymentu z wynikami analizy kinetycznej prowadzi bardzo skutecznie do realizacji warunku syntezy. Przykłady zastosowania tej metody można znaleźć w pracach [25, 26].

Obecnie przejdziemy do bliższego opisania trzech pierwszych metod, gdyż na ich tle sens syntezy kinetycznej występuje najwyraźniej.

Zagadnienie optymalizacji czasu przejścia układu z jednego położenia w drugie można sformułować następująco. Rozważmy układ równań różniczkowych opisujących ruch układu materialnego:

$$\dot{x} = f(x, u, t), \tag{2.1}$$

gdzie x jest wektorem o współrzędnych $(x_1 \dots x_{2n})$ określonym w obszarze Δ, zawartym w przestrzeni E^{2n}, u jest wektorem o współrzędnych $(u_1 \dots u_r)$ określonym w obszarze U zawartym w przestrzeni E^r, f jest wektorem o współrzędnych $(f_1 \dots f_{2n})$, a f_i oraz $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ $(i, j = 1 \dots 2n)$ są funkcjami rzeczywistymi i ciągłymi swoich zmiennych. Wektor u nazywa się wektorem sterującym. Każdemu wektorowi u odpowiada rodzina trajektorii opisana rozwiązaniami układu (2.1).

Zajmiemy się tylko tymi trajektoriami, które przechodzą przez dwa ustalone położenia układu x_0 i x_1. Oczywiście nie każdemu wektorowi u musi odpowiadać rodzina trajektorii, w której taka trajektoria się znajduje. Inaczej mówiąc, nie każdy wektor musi przeprowadzać układ z położenia x_0 w położenie x_1. Z tego względu zajmiemy się tylko zbiorem takich wektorów u, które przeprowadzają układ z położenia x_0 do położenia x_1. Ten zbiór wektorów u nazywamy zbiorem dopuszczalnym. Przypuśćmy, że dana jest pewna funkcja $f_0(x, u, t)$ taka, że funkcjonał

$$I = \int_{t_0}^{t_1} f_0(x, u, t)dt \tag{2.2}$$

opisuje pewną własność ruchu.

Zagadnienie, które należy rozwiązać, polega na tym, aby ze zbioru wektorów dopuszczalnych u wybrać taki wekor, przy którym funkcjonał J posiada ekstremum. Przy ustalonym t_0 czas t_1 może być również ustalony lub można żądać, aby czas (t_1-t_0) był najkrótszy. Rozwiązanie tego zagadnienia różnymi metodami można znaleźć w pracach [12–21]. Powyższy problem można sformułować w odniesieniu do układu (1.1). Zamiast wektora sterującego u można podstawić operator wymuszenia $G(q, \dot{q}, t)$ i zachowując pozostałe założenia przyjąć jako warunek syntezy kinetycznej ekstremum funkcjonału (2.2).

Dowód istnienia rozwiązania tak sformułowanego problemu natrafia na istotne trudności. Warunki konieczne dla istnienia rozwiązania zagadnienia sformułowanego w odniesieniu do układu (2.1) nie mogą być spełnione w odniesieniu do układu (1.1). Z tego względu metody stosowane w optymalizacji czasu przejścia układu z jednego położenia w drugie nie mogą być bezpośrednio przeniesione do syntezy kinetycznej. Rozwiązanie tego problemu jest możliwe w oparciu o zasadę maksimum PONTRIAGINA [15, 19] i programowanie dynamiczne BELLMANA [18, 27]. Jak wykazano w pracy [32], istnieje duża analogia między tymi dwiema metodami. Chcąc zastosować jedną z nich w syntezie kinetycznej należy wektor sterujący przyjąć w postaci $u = Q(x)$ i rozważać układ

$$\dot{x} = f(x, t, Q(x)). \tag{2.3}$$

Podamy dwie metody, które można bezpośrednio zastosować w syntezie kinetycznej. Podstawą tych metod są równania Lagrange'a i Hamiltona. Równania (2.1) oraz funkcjonał J (2.2) napiszemy w postaci

$$g_i(x, \dot{x}, u, t) = \dot{x}_i - f_i(x, u, t) = 0, \qquad i = 1 \dots 2n; \tag{2.4}$$

$$I = \int_0^T L[x(t), u(t), t]dt. \tag{2.5}$$

Funkcję Lagrenge'a określimy wzorem

$$L_1 = L + \sum_{i=1}^{2n} \lambda_i g_i, \tag{2.6}$$

gdzie λ_i są mnożnikami, które rozważamy jako funkcje czasu.

Jeżeli $g_i(x, \dot{x}, u, t)$ są równe zeru, czyli wzdłuż rozwiązań układu (2.4) funkcja L_1 równa się L i obie te funkcje posiadają te same ekstrema. Funkcję L_1 można rozważać jako funkcję zmiennych (x_i, u_j, λ_i) i napisać równania Lagrange'a

$$\frac{\partial L_1}{\partial x_1} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_1}{\partial \dot{x}_i}\right) = 0, \quad i = 1 \dots 2n,$$

$$(2.7) \qquad \frac{\partial L_1}{\partial u_j} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_1}{\partial \dot{u}_j}\right) = 0, \quad j = 1 \dots r,$$

$$\frac{\partial L_1}{\partial \lambda_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_1}{\partial \dot{\lambda}_i}\right) = 0, \quad i = 1 \dots 2n.$$

Ponieważ funkcja L_1 nie zależy od $\dot{u}$ i $\dot{\lambda}$, układ r równań sprowadza się do układu

$$(2.8) \qquad \frac{\partial L_1}{\partial u_j} = 0,$$

układ $2n$ zaś ostatnich równań jest identyczny z układem (2.4). Ogółem otrzymujemy $(4n+r)$ równań, z których należy wyznaczyć $2n$ zmiennych x, r zmiennych u i $2n$ zmiennych λ.

Tok rozwiązania przebiega następująco. Z drugiej grupy równań, które są równaniami algebraicznymi, należy wyznaczyć u jako funkcję x i λ. Po podstawieniu u do pozostałych równań należy z nich wyrugować λ i wyznaczyć trajektorię x o warunkach brzegowych $x(0)$ i $x(T)$. Metoda powyższa jest teoretycznie prosta, lecz w zastosowaniach może prowadzić do bardziej skomplikowanych równań niż układ (2.4).

Druga metoda opiera się na równaniach Hamiltona. Przy oznaczeniach (2.4) i (2.5) dołączymy do układu (2.4) równanie

$$(2.9) \qquad \dot{x}_{n+1} = L[x, u, t] = f_{n+1}(x, u, t).$$

Funkcję Hamiltona przyjmujemy w postaci

$$(2.10) \qquad H = \sum_{i=1}^{n+1} p_i f_i(x, u, t),$$

gdzie p_i są funkcjami czasu.

Równania Hamiltona mają postać

$$(2.11) \qquad \dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad i = 1 \dots n+1,$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}.$$

Równania (2.11) należy rozwiązać przy warunku

$$(2.12) \qquad \frac{\partial H}{\partial u_j} = 0, \quad j = 1 \dots r.$$

Metoda rozwiązania układu (2.11) jest następująca. Z równań algebraicznych (2.12) obliczamy u jako funkcję x i p, a następnie wstawiamy do (2.11). Otrzymujemy $(2n+2)$ równań pierwszego rzędu. Do rozwiązania tych równań potrzeba $(2n+2)$

warunków brzegowych. Warunki te otrzymujemy z wartości x_i w czasie $t_0 = 0$ oraz przyjmując $p_1(T) = p_2(T) = \dots = p_n(T) = 0$, $p_{n+1}(T) = 1$. Wartość p_{n+1} przyjmujemy równą jedności, ponieważ zagadnienie polega na minimalizacji funkcji x_{n+1}.

Objaśnimy tę metodę na przykładzie.

Rozważmy układ o jednym stopniu swobody

$$\ddot{x} + F(x, \dot{x}) = 0. \tag{2.13}$$

Jako warunek syntezy przyjmiemy minimum funkcjonału

$$I = \int_0^{t_1} [F^2 + \dot{x}^2] dt, \tag{2.14}$$

gdzie t_1 jest ustalone.

Równanie (2.13) napiszemy w postaci

$$\dot{x}_1 = x_1, \qquad \dot{x}_1 = -F(x_1, x_2). \tag{2.15}$$

Do tych równań dodajemy trzecie

$$\dot{x}_3 = F^2 + x_2^2. \tag{2.16}$$

Funkcję F oznaczymy przez u. Funkcja Hamiltona ma postać:

$$\begin{aligned} H &= p_1 x_2 - p_2 F(x_1, x_2) + p_3(u^2 + x_2^2), \\ H &= p_1 x_2 - p_2 u + p_3(u^2 + x_2^2). \end{aligned} \tag{2.17}$$

Równania (2.11) na $\dot{x}_i$ pokrywają się z (2.15) i (2.16). Napiszemy równania na p_i:

$$\begin{aligned} \dot{p}_1 &= -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0, \\ \dot{p}_2 &= -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -p_1 - 2p_3 x_2, \\ \dot{p}_3 &= -\frac{\partial H}{\partial x_3} = 0. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Oprócz tych równań muszą być spełnione równania (2.12)

$$\frac{\partial H}{\partial u} = -p_2 + 2p_3 u = 0. \tag{2.19}$$

Równania powyższe należy rozwiązać przy warunkach brzegowych:

$$\begin{aligned} & x_1(0) = x_1^0, \quad x_2(0) = x_2^0, \quad x_3(0) = x_3^0, \\ & p_1(t_1) = p_2(t_1) = 0, \quad p_3(t_1) = 1. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Z pierwszego równania (2.18) otrzymujemy $p_1 = 0$, z trzeciego $p_3 = 1$, a z równania (2.19) $p_2 = 2u$. Po podstawieniu tych funkcji do drugiego równania (2.18) otrzymamy $\dot{p}_2 = -2x_2$, a po zróżniczkowaniu

$$\ddot{p}_2 = -2\dot{x}_2 = 2u = p_2. \tag{2.21}$$

Po rozwiązaniu otrzymujemy

$$p_2 = C_1 e^t + C_2 e^{-t}. \tag{2.22}$$

Z warunków brzegowych $p_2(t_1) = 0$, $\dot{p}_2(0) = -2x_2^0$ obliczamy C_1 i C_2:

$$C_1 = -2x_2^0 \frac{e^{-2t_1}}{1+e^{-2t_1}}, \quad C_2 = 2x_2^0 \frac{1}{1+e^{-2t_1}}. \tag{2.23}$$

Po podstawieniu (2.13) do (2.12) otrzymamy rozwiązanie na p_2, a następnie u, x_2, x_1.

$$\begin{gathered} p_2 = \frac{2x_2^0}{1+e^{-2t_1}}[e^{-t} - e^{t-2t_1}], \quad u = \frac{p_2}{2}, \\ x_2 = \frac{x_2^0}{1+e^{-2t_1}}[e^{-t} + e^{t-2t_1}], \quad x_1 = \frac{x_2^0}{1+e^{-2t_1}}[e^{t-2t_1} - e^{-t}]. \end{gathered} \tag{2.24}$$

Z porównania x_1 i u otrzymujemy

$$-x_1 = u = F. \tag{2.25}$$

Ten sam wynik otrzymamy posługując się równaniami Lagrange'a.

Jak wynika z powyższego przykładu, metody stosowane w optymalizacji układów mogą być użyte w syntezie kinetycznej, jeżeli warunek syntezy kinetycznej można zapisać w postaci minimalizacji funkcjonału. W tych przypadkach synteza jest syntezą brzegową.

Omówimy obecnie syntezę parametryczną. Przypuśćmy, że ruch układu opisany jest równaniem pierwszego rzędu

$$\dot{x}_i = f_i(x_1 \ldots x_n, t, \mu_1 \ldots \mu_r). \tag{2.26}$$

gdzie $\mu_1 \ldots \mu_r$, są parametrami, które należy tak wyznaczyć, aby otrzymać żądaną własność ruchu. W odróżnieniu od poprzednio dyskutowanych zagadnień, w których występował wektor sterujący u zależny od czasu, parametry μ_j nie zależą ani od czasu, ani od położenia układu. Mogą one określać pewne własności reologiczne modelu zastępczego. Często są to współczynniki wielomianów określających charakterystyki sił sprężystych i sił tłumienia.

Warunki syntezy mogą być stawiane różnorodnie, zależnie od żądanego przebiegu ruchu. Mogą to być żądania okresowości rozwiązań, ograniczoności, stateczności w małym otoczeniu położenia równowagi, w skończonym otoczeniu lub w całym polu określoności funkcji f_i. Warunki te formułowane są za pomocą pewnych nierówności, które mają być spełnione przez parametry układu (2.26). W ten sposób otrzymujemy rozwiązanie syntezy w postaci pewnego obszaru parametrów $\mu_1 \ldots \mu_r$, ograniczonego lub nieograniczonego. Hiperpowierzchnia ograniczająca obszar rozwiązań dla parametrów $\mu_1 \ldots \mu_r$ nazywa się powierzchnią bifurkacji. Do parametrów tych należą np. prędkości krytyczne, tłumienie krytyczne, krytyczne przesunięcie układu itd, czyli takie wartości parametrów, dla których następuje zmiana jakościowa ruchu.

Parametryczna synteza ruchu jest przedmiotem wielu prac. Interesujące z punktu widzenia technicznego są przykłady omówione w pracach [48–61]. W tych wszystkich przypadkach synteza kinetyczna jest syntezą wewnętrzną.

Na zakończenie należy zwrócić uwagę na konieczność rozwiązania zagadnienia syntezy kinetycznej układów mechanicznych przy obciążeniach przypadkowych i charakterystykach określonych funkcjami przypadkowymi. Jak dotychczas na ten temat znane są jedynie wzmianki w literaturze, mimo że zagadnienie jest bardzo ważne, gdyż pracę taśmociągów koparek, kombajnów, walcarek itd. można prawidłowo rozpatrywać tylko przy założeniu obciążeń przypadkowych.

Literatura cytowana w tekście

1. С. Н. БЕРНШТАЙН, *Об уравнениях вариационного исчисления*, Усп. Мат. Наук, **8** (1961), 32–74.

2. C. LANCZOS, *The variational principle of mechanics*, Univ. of Toronto Press, Toronto 1949.

3. R. M. ROSENBERG, *An optimum rocket trajectories and the calculus of variations*, Aerospace Engng, 10, **19** (1960), 20–21.

4. V. G. SZEBEHELY, *The generalized universe problem of orbit computation*, Proc. II Intern. Space-Sci. Symp., Florence, April 10–14, 1961, North-Hohland Publ. Comp., Amsterdam 1961.

5. Н.И. АНДРЕЕВ, *Метод определения оптимальной динамической системы по критерию екстремума функционала представляющего заданную функцию от нескольких других функционалов*, Труды I Конгресса IФАС, Москва 1960.

6. J. M. SKOWROŃSKI, *The possibility of synthesis of some strongly nonlinear mechanical systems*, Nonlin. Vibr. Problems, **1** (1960), 59–68.

7. J. M. SKOWROŃSKI, *The problem of size of limit domain for nonlinear mechanical system*, Proc. II Intern. Conf. on Nonlin. Vibr., Warsaw 1962, Nonlin. Vibr. Problems, **5** (1963).

8. W. BOGUSZ, J. M. SKOWROŃSKI, S. ZIEMBA, *The kinetic synthesis problem for general mechanical systems*, Bull. Politechnic Institute Jassy, Roumania, 1964, w druku.

9. R. E. KALMAN, *Physical and mathematical mechanisms of instability in nonlinear automatic control systems*, Trans. ASME, 3, **79** (1957), 553–566.

10. R. E. KALMAN, *On the general theory of control systems*, Automatic and Remote Control, Butterworths, London 1961.

11. K. MAGNUS, *Über ein Verfahren zur Untersuchung nichtlinearer Schwingungs und Regelungs Systeme*, VDJ-Forschungsheft 451, Ausgabe B, **21** (1955).

12. E. B. LEE, L. MARCUS, *Optimal control for nonlinear processes*, Arch. Rat. Mech. Anal., 1, **8** (1961), 36–58.

13. E. B. LEE, L. MARCUS, *On the existence of optimal controls*, Trans. ASME, Ser. D, 1, **84** (1962), 13–22.

14. Y. H. KU, *Nonlinear control systems*, Automatic and Remote Control, Butterworths, London 1961.

15. Р.Ю. БОЛТЯНСКИ, Р. ГАМКРЕЛИДЗЕ, Л.С. ПОНТРЯГИН, *Теория оптимальных процессов*, Изв. АН СССР, Мат., **24** (1960), 3–42.

16. Н.Н. КРАССОВСКИЙ, *Проблема оптимального управления в нелинейных системах*, Прикл. Мат.-Мех., 2, **23** (1959), 209–229.

17. E. B. LEE, *Methods of optimum feedback control*, Univ. of Minnesota, Thesis, Minneapolis 1960.

18. R. BELLMAN, *Dynamic programming*, Princeton University Press, 1957.

19. Л.С. ПОНТРЯГИН, *Математическая теория оптимальных процессов*, ГИФиз-Мат. Лит., Москва 1961.

20. А. ЛУРЬЕ, *Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования*, ГИТТЛ, 1951.

21. J. P. LA SALLE, *The time optimal control problem*, Contributions to Theory of Nonlinear Oscillations, V Ann. Math. Studies, Princeton Univ. Press, 1960.

22. IN. J. NEIMARK, *The dependence on parameters of periodical motions*, Automatic and Remote Control, Butterworths, London 1961.

23. N. N. KRASSOWSKI, *The parameter choice foi optimal stable systems*, Automatic and Remote Control, Butterworths, London 1961.

24. B.M. ПОНОМАРЕВ, *Энергетические характеристики процессов регуляции в автоматических системах*, Изв. АН СССР, ТН, **6** (1959), 134–140.

25. P. W. SMITH, C. J. MALME, C. M. GOGOS, *Nonlinear response of a simple clamped panel*, S. Acoust. Soc. Amer., **33** (1961), 1476–1482.

26. W. BOGUSZ, *The inverse problem of stability of certain mechanical system*, Proc. III Conference on Nonlin. Vibrations, Berlin 1964, to appear.

27. R. BELLMAN, *Functional equations in the theory of dynamic programming* — successively: Proc. Net. AC. Sci, USA, **43** (1957), 839–841; Proc. Amer. Math. Soc., **8** (1957), 435–440; Duke Math. J., **27** (1960), 55–70; Rendiconti Circ. Math. Palermo, Ser. II, **8** (1959), 1–3.

28. Ю.Е. ЦИПКИН, *Теория импульсных систем*, Москва 1958.

29. Н.Н. КРАССОВСКИЙ, *К теории оптимального регулирования*, Автом. и Телемех, **18** (1957), 960–970.

30. R. KULIKOWSKI, *Concerning the synthesis of the optimum nonlinear control systems*, Bull. Acad. Polon. Sci, 6, **8** (1959) 391–399.

31. R. KULIKOWSKI, *Synthesis of a class of optimum control systems*, Bull. Acad. Polon. Sci., 11, **7** (1959), 663–671.

32. S. L. CHANG, *Dynamic programming and Pontryagin's maximum principle*, AFOSR 865, (N. Y.-Univ., Dep. Electr. Engng TR 400-32), June 1961, 15.

33. Л. РЕЗОНЕР, *Принцип максимума Понтрягина в теории оптимальных систем*, Авт. и Телемех., 5, 10, 11, 12, **20** (1959).

34. R. BELLMAN, *The mathematical theory of control processes*, Modern Math. for Eng., Ser. II, New-York 1961, 194–212.

35. I.X. РОЙТЕНБЕРГ, *Некоторые задачи теории динамического программирования для нелинейных систем*, Прикл. Мат.-Мех., **26** (1962), 419–430, 613–630.

36. T. ODANAKE, *Prediction theory and dynamic programming*, S. Operations Res. Soc. Japan, **2** (1959), 80–92.

37. J. B. ROSEN, *The gradient projection method for nonlinear programming*, J. Soc. Indust. Appl. Math., **8** (1960), 181–217.

38. В.А. ТРОИЦКИЙ, *Задача Лагранжа вариационного исчисления и теория оптимальных систем*, Наук.-Техн. Информ. Бюл. Ленингр. Политехн. Инст., 7, 1961, 58–64.

39. В.А. ТРОИЦКИЙ, *Вариационные задачи оптимизации...* Прикл. Мат. Мех., **26** (1962), 29-38, 431-443.

40. ЧЖАН-СЫ-ИН, *К теории оптимального регулирования*, Прикл. Мат. Мех., **25** (1961).

41. А.М. ЛЕТОВ, *Аналитическое конструирование регуляторов*, Автом. и Телемех., 4, **21** (1961), 436–441; нр 5 — 561–568; нр 6 — 661–665; 4, **22** (1961), 425–435.

42. G. LEITMAN, *On a classe of variational problems in rocketflight*, J. Aerospace Sci, **9** (1959), 586–591.

43. В.А. ТРОИЦКИЙ, *Задача Майер-Болц вариационного исчисления и теория оптимальных систем*, Прикл. Мат. и Мех., **4**, **25** (1961), 668–679.

44. Е.Г. АЛЬБРЕХТ, *Об оптимальной стабилизации*, Прикл. Мат. Мех., **25** (1961).

45. R. E. KALMAN, J. E. BERTRAM, *Control system analysis and design via the second Liapunov method*, Trans. ASME, 2, **82 D** (1960), 371–400.

46. S. S. L. CHANG, *Kinetic Liapunov function for stability analysis of nonlinear control systems*, Trans. ASME, 1, **83 D** (1961), 91–94.

47. Л. РЕЗОНЕР, *О вариационных методах исследования качества систем управнения*, Труды I Конгресса ИФАЦ, Москва 1960.

48. В.В. БОЛОТИН, *Критические скорости в нелинейных проблемах аэро-упругости*, Наук. Докл. Высшей Школы Маш., 3, 1958, 25–29.

49. R. L. SWAIM, *A note of the effect of a time varying forward flight velocity on a bending torsion--stability of a supersonic wing*, J. Aero-Space Sci., 11, **28** (1961), 906–907.

50. R. WIŚNIEWIECKI, *Nonlineare optimization des serve*, Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., **44** (1958), 493–502.

51. IN. J. NEIMARK, *The parameter-dependence of periodical motions*, Automatic and Remote Control, Butterworths, London 1961.

52. N. N. KRASSOVSKI, *Optimal parameter selection for stable systems*, Automatic and Remote Control, Butterworths, London 1961.

53. D. G. LEVIS, *On the perturbation of a periodic solution when the variational system has non-trivial periodic solution*, I. Rot. Mech. Anal., 5, **4** (1955), 795–815.

54. П.А. КУЗМИН, *Устойчивость при параметрических возмущениях*, Прикл. Мат.-Мех., 1, **21** (1957), 129–132.

55. О.А. ЗЕНТЫКОВ, *Исчисляемый систем дифф-уравнений с изменяющимися параметрами*, Мат. Сборник, 49/91 (1959), 317–330.

56. M. HUKUHARA, *Sur les equ fonctionnelles contenant un parametre*, I. Fac. Sci, Hokkaido Imperial Univ., Ser. I, 3–4, **5** (1937), 107–122.

57. М.А. КРАСНОСЕЛЬСКИЙ, *Об исследовании точек бифуркации нелинейных уравнении*, Труды III Съезда Матем., АН СССР, **1** (1956), 204–205.

58. J. JARNIK, J. KURZWEIL. *Continuous dependence on a parameter*, Contrib. to the Theory of Nonlin. Oscill., Vol. 5, Princeton Univ. Press, 1960, 25–35.

59. А.М. САМОЙЛЕНКО, *Об одном случае непрерывной зависимости от параметра*, Укр. Мат. Журн., 3, **15** (1962), 289–298.

60. H. A. ANTOSIEWICZ, *Continuous parameter dependence*, University of Southern California T. Rep. 1960.

61. А.Н. ТИХОНОВ, *Зависимость уравнении от параметров*, Труды III Съезда Матем. АН СССР, **2** (1956).

62. J. M. SKOWROŃSKI, S. ZIEMBA, *Certain properties of mechanical model of structures*, Arch. Mech. Stos., 2, **11** (1959).

63. J. M. SKOWROŃSKI, *The damping influence on the character of strongly nonlinear mechanical systems*, Nonlin. Vibr. Problems, **2** (1960).

64. J. M. SKOWROŃSKI, *The character of motion of general mechanical systems*, Nonlin. Vibr. Problems, **4** (1962) 4–100.

65. J. M. SKOWROŃSKI, *Structural investigation...*, Nonlinear Vibr. Problems, **6** (1964).

66. J. M. SKOWROŃSKI, *Some remarks about the character of motions...*, Proc. IV Nat. US Congress of Appl. Mech., 1962, 387–390.

Summary

KINETIC SYNTHESIS OF GENERAL MECHANICAL SYSTEMS

The problem under consideration is connected with designing and constructing of machines and mechanisms. The designing data should include, besides the destination of the machine, the optimal requirements as regards the gabarites, endurance, precision of the process, power, expenses etc. The imposed requirements are fulfilled with the aid of the kinetic synthesis which consists in the proper choice and mutual connection of machine elements according to the assumed conditions.

Recent results concerning the problem have been presented. The considerations are confined to mechanical systems the motion of which can be described by a finite number of differential equations. Polish nomenclature of the synthesis problem has been introduced, the methods used in other fields of mechanical analysis with possible applications to the problem are quoted, and original results of the authors' research are given. In particular, the attention is drawn to the possibility of utilizing the results obtained in the steering and optimization theory of linear and non-linear systems. The method based upon the Hamilton equations is illustrated by an example.

In addition to the methods described above, other problems which can be solved by means of the kinetic synthesis have been formulated in the paper.

Резюме

КИНЕТИЧЕСКИЙ СИНТЕЗ ОБЩЕЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Задача рассмотренная в работе имеет связь с проектированием и конструированием машин и механических установок.

Проектные предположения должны заключать, кроме предназначений машины, условия оптимальности конструкционных решений, по габаритам, прочности, точности реализации процесса, мощности, стоимости и т.д. Реализация поставленных условий проводится в процессе кинетического синтеза, который состоит в соответствующем подборе элементов машины и их взаимной увязке согласно продиктованным условиям.

В работе представлены современные результаты исследовательских работ по постановке вопроса синтеза и методов его решения. В рассуждениях принималась во внимание только лишь механическая система, движение которой можно описать конечным числом обыкновенных дифференциальных уравнений, основываясь на литературе, вводится польская номенклатура понятий употребляемых в вопросах синтеза. Приводятся возможные для использования методы, применяемые в других областях анализа нелинейных систем и даются результаты исследований, проведенных авторами. В особенности, обращается внимание на возможность использования результатов исследований в теории уравнения и оптимализации линейных и нелинейных систем. Метод, основанный на уравнениях Гамильтона поясняется на примере.

Кроме приведенных методов в работе дается формулировка задач, которые можно решать в процессе кинетического синтеза.

ZAKŁAD BADANIA DRGAŃ
INSTYTUTU PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 10 listopada 1964 r.