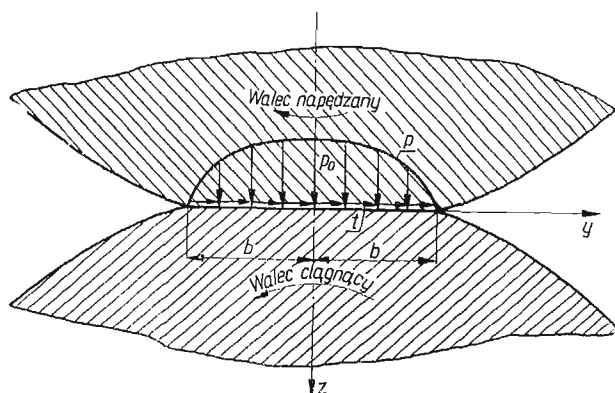


O MOŻLIWOŚCIACH WYKORZYSTANIA METODY ELASTOPTYCZNEJ
DLA BADAŃ WYŁĘŻENIA MATERIAŁU I ROZKŁADU NAPRĘŻEŃ
W ZAGADNIENIACH KONTAKTOWYCH

STANISŁAW PYTKO (KRAKÓW)

1. Wstęp. Celem pracy było zbadanie stanu naprężeń w obszarze styku dwóch walców obciążonych oprócz sił normalnych także siłami stycznymi (rys. 1). Dla potwierdzenia wyników otrzymanych na drodze teoretycznej wykonano pewne badania elastoptyczne na dociskanych w odpowiedni sposób krążkach. Badania



Rys. 1

te jak też ich wyniki były referowane na I symposium z zakresu elastoptyki w r. 1962 [1, 2]. Ażeby wyniki z badań płaskiego stanu naprężenia można było wykorzystać dla rozważania płaskiego stanu odkształcenia, przeprowadzono analizę opisaną poniżej. Wyniki tej analizy miały dać odpowiedź, na ile słuszne są dane otrzymane z badań elastoptycznych przy rozważaniach wyłężenia materiału w obszarze styku dwóch dociskanych do siebie walców. Jak wiadomo, dokładny obraz stanu naprężeń w takich elementach możemy otrzymać metodą zamrażania badając obciążone dwa walce z mas optycznie czułych. Brak stanowiska do badania metodą zamrażania zmusił autora do badania stanu naprężeń metodą elastoptyczną w obciążonych tarczach okrągłych (krążkach), zamiast w obciążonych modelach walcowych.

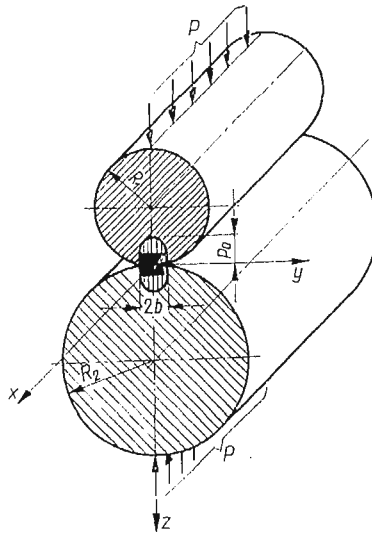
2. Analiza. W przypadku złożonych stanów naprężeń o wyłężeniu materiału wg hipotezy τ_{\max} decydować będą maksymalne wartości naprężeń stycznych określone wzorem

$$(2.1) \quad \tau_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3),$$

gdzie σ_1 jest największym naprężeniem głównym, a σ_3 najmniejszym naprężeniem głównym.

Jeżeli główne naprężenia w rozpatrywanym punkcie dociskanych do siebie dwóch walców są odpowiednio równe, $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, a zarazem $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, to największe naprężenie styczne obliczyć można ze wzoru (2.1). Naprężenie to działa w płaszczyźnie nachylonej pod kątem 45° do płaszczyzny maksymalnego i minimalnego naprężenia głównego.

Rozpatrzmy stan naprężeń w obszarze styku dociskanych do siebie dwóch walców jak na rys. 2.



Rys. 2

Wartości naprężeń głównych dla strefy styku dwóch dociskanych do siebie walców (rys. 2) obliczyć można wg wzorów (2.2)–(2.4):

$$(2.2) \quad \sigma_1 = \sigma_x,$$

$$(2.3) \quad \sigma_1 = \sigma_2 = \frac{\sigma_y + \sigma_z}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_y - \sigma_z)^2 + 4\tau_{yz}^2},$$

$$(2.4) \quad \sigma_{11} = \sigma_3 = \frac{\sigma_y + \sigma_z}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_y - \sigma_z)^2 + 4\tau_{yz}^2}.$$

Według wzorów (2.2)–(2.4) obliczyć można naprężenia główne dla płaskiego stanu naprężenia, które oznaczono indeksami rzymskimi oraz dla płaskiego stanu odkształcenia, oznaczone indeksami arabskimi. Wartość największego głównego naprężenia σ_1 wg oznaczeń wzorów (2.2)–(2.4) jest dla pewnych obszarów styku walców równa σ_x . Wartości naprężeń $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ i τ_{yz} dla obszaru styku obliczyć można wg wzorów (2.5)–(2.8)

$$(2.5) \quad \sigma_x = -p_0 2\nu \frac{z}{b} \left[\sqrt{\frac{b^2 + \lambda}{\lambda}} - 1 \right],$$

$$(2.6) \quad \sigma_y = -p_0 \frac{z}{b} \left[\sqrt{\frac{b^2 + \lambda}{\lambda}} \left(2 - \frac{b^2 z^2}{\lambda^2 + b^2 z^2} \right) - 2 \right],$$

$$(2.7) \quad \sigma_z = -p_0 \frac{bz^3}{\lambda^2 + b^2 z^2} \sqrt{\frac{b^2 + \lambda}{\lambda}},$$

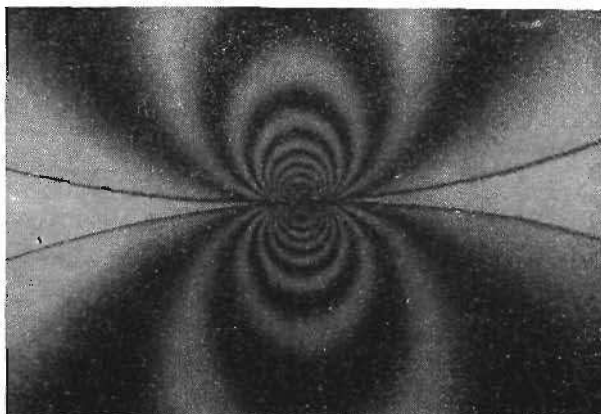
$$(2.8) \quad \tau_{yz} = -p_0 \frac{byz^3}{\lambda^2 + b^2 z^2} \sqrt{\frac{\lambda}{b^2 + \lambda}},$$

gdzie λ jest największym pierwiastkiem równania

$$\frac{y^2}{b^2 + \lambda} + \frac{z^2}{\lambda} = 1;$$

b oznacza pół szerokości powierzchni styku walców, ν jest współczynnikiem Poissona, p_0 — największym naciskiem na powierzchni styku.

Porównując wartości naprężeń głównych obliczonych wg wzorów (2.2)–(2.5) można było stwierdzić, że spełniają one nierówności $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ tylko w warstwie do głębokości $0,2b$. Poniżej tej warstwy wartość naprężenia $\sigma_1 = \sigma_x < \sigma_2$, czyli



Rys. 3

między naprężeniami głównymi zachodzi tam zależność, $\sigma_2 \geq \sigma_1 \geq \sigma_3$, wobec czego wartość τ_{\max} (dla płaskiego stanu odkształcenia w naszym przypadku) można obliczyć zgodnie z wcześniejszym oznaczeniem naprężeń wg wzoru:

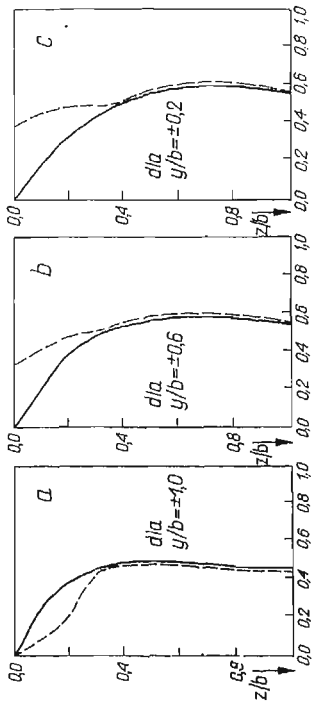
$$(2.9) \quad \tau_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_3) = \frac{1}{2}(\sigma_I - \sigma_{II}).$$

Ogólnie znany wzór na wartość τ_{\max} dla płaskiego stanu naprężenia ma postać:

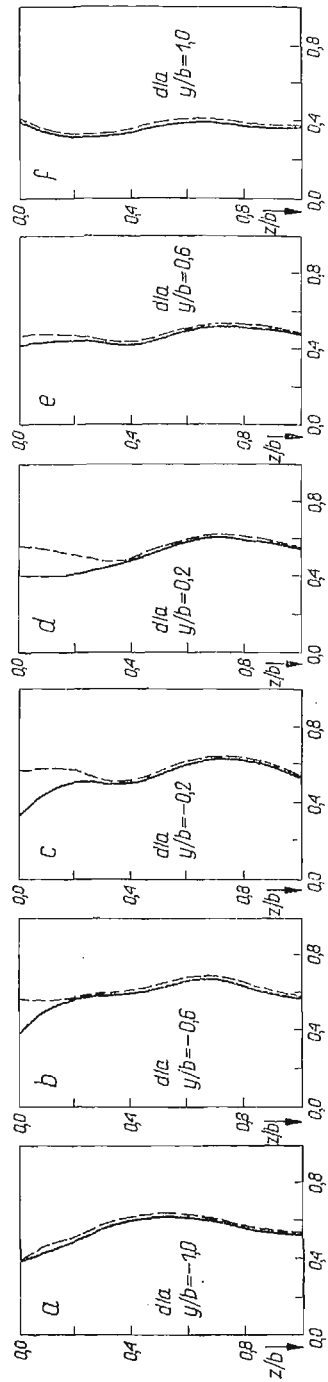
$$(2.10) \quad \tau_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_I - \sigma_{II}).$$

Wartość naprężeń σ_I i σ_{II} dla tego stanu obliczyć można wg wzorów (2.3) i (2.4).

Wartość τ_{\max} wg wzoru (2.10) otrzymać można również na drodze badań elastoptycznych. Ponieważ wzór (2.9) jest identyczny ze wzorem (2.10) przy rozpatrywaniu warstw na głębokości $> 0,2b$, możemy zatem uzyskać wyniki dla τ_{\max} wg wzoru (2.9) na podstawie badań elastoptycznych. Dla potwierdzenia tych wyników wykonano badania elastoptyczne otrzymując obraz izochrom jak na rys. 3.



Rys. 4



Rys. 5

Podobnie jak dla obciążenia tylko normalnego dwóch walców przeprowadzono rozważania teoretyczne dla przypadku obciążenia jak na rys. 1. Wartości naprężeń σ_x , σ_y , σ_z i τ_{yz} od obciążenia tylko stycznego można obliczyć wg wzorów [4]:

$$(2.11) \quad \sigma_x = \frac{4\nu T}{\pi b} e^{-\xi} \cos \eta,$$

$$(2.12) \quad \sigma_y = \frac{2T}{\pi b} \left[2e^{-\xi} \cos \eta - \operatorname{sh} \xi \sin \eta \frac{\sin 2\eta}{\operatorname{ch} 2\xi - \cos 2\eta} \right],$$

$$(2.13) \quad \sigma_z = -\frac{2T}{\pi b} \operatorname{sh} \xi \sin \eta \frac{\sin 2\eta}{\operatorname{ch} 2\xi - \cos 2\eta},$$

$$(2.14) \quad \tau_{yz} = \tau_{zy} = \frac{2T}{\pi b} \left[e^{-\xi} \sin \eta - \operatorname{sh} \xi \sin \eta \left(1 - \frac{\operatorname{sh} 2\xi}{\operatorname{ch} 2\xi - \cos 2\eta} \right) \right],$$

gdzie $T = \mu P$, P jest obciążeniem normalnym walców, ν oznacza współczynnik Poissona, μ współczynnik tarcia (sczepienia),

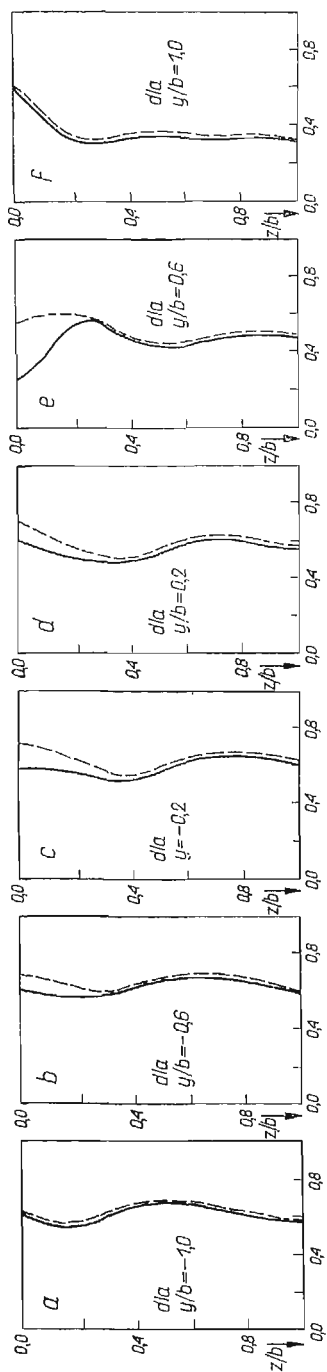
$$\zeta = \xi + i\eta, \quad y = b \operatorname{ch} \xi \cos \eta, \quad z = b \operatorname{sh} \xi \sin \eta.$$

Dla tak obciążonych walców (rys. 1) obliczono wartości naprężeń σ_x , σ_y , σ_z i τ_{yz} metodą superpozycji, a następnie wg wzorów (2.2)–(2.4) obliczono także wartości σ_1 , σ_2 i σ_3 dla $\mu = 0,2; 0,3$ i $0,5$.

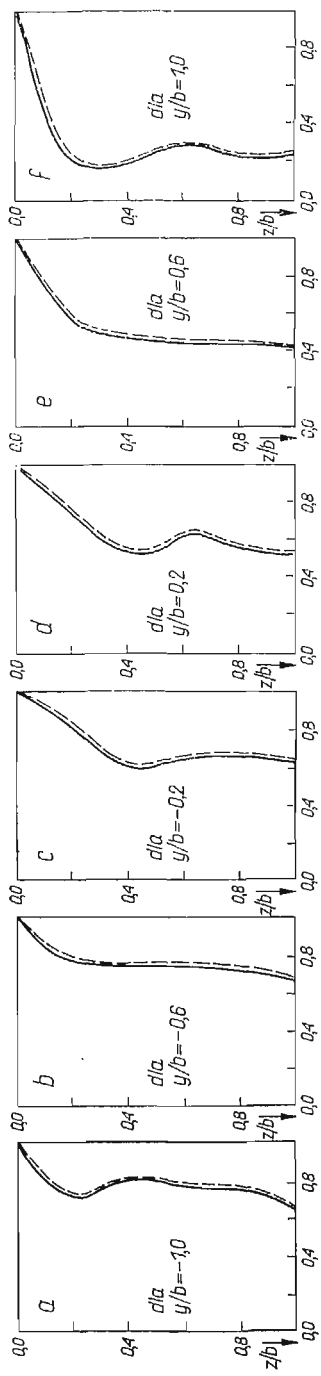
3. Wyniki. Dla potwierdzenia, że trzecia składowa naprężenia σ_x nie wpływa na wytyżenie materiału wg hipotezy τ_{\max} (oczywiście z wyjątkiem warstw tuż przy powierzchni i tylko dla pewnych wartości współczynnika μ), wykonano przeliczenia $\tau_{\max} = \sigma_{z\text{ast}}$ dla obszaru styku krążków, czyli dla płaskiego stanu naprężenia (na rys. 4–7 wartości $(\sigma_1 - \sigma_{11})/p_0$ przedstawiono linią ciągłą) oraz dla walców, czyli dla płaskiego stanu odkształcenia (na rys. 4–7 wartości $(\sigma_1 - \sigma_3)/p_0$ przedstawiono linią przerywaną). Wykresy na rys. 4a–4f są dla $\mu = 0,0$, wykresy na rys. 5a–5f dla $\mu = 0,2$, wykresy na rys. 6a–6f dla $\mu = 0,3$, wykresy na rys. 7a–7f dla $\mu = 0,5$. Na podstawie wyników przedstawionych przy pomocy wykresów można potwierdzić wniosek postawiony we wstępie: aby otrzymać obraz izochrom dla płaskiego stanu odkształcenia, możemy wykonać badania elastoptyczne na modelach w postaci tarczy otrzymując wyniki poprawne. Różnice pomiędzy wartościami naprężeń zastępczych, podanymi na wykresach, zarysowują się tylko dla obszarów blisko powierzchni styku walców do głębokości $z \leq 0,2b$, a w osi symetrii walców max. $0,4b$ dla współczynników $\mu = 0,0; 0,2; 0,3$, zaś dla $\mu = 0,5$ nie ma żadnych różnic (na wykresach linie przerywane podające wartości $(\sigma_1 - \sigma_3)/p_0$ pokrywają się z liniami ciągłymi przedstawiającymi wartości $(\sigma_1 - \sigma_{11})/p_0$).

4. Przykładowe obliczenia. Celem badań elastoptycznych było potwierdzenie wyników otrzymanych na drodze teoretycznej (rys. 8–10 i rys. 3).

a) Dla przykładu porównane zostaną wyniki otrzymane dla stosunków siły stycznej do normalnej $0,3; 0,2; 0,0$. Dane otrzymane z badań elastoptycznych dla $\mu = 0,3$ przedstawia obraz izochrom (rys. 10), wyniki zaś analizy teoretycznej przedstawiono wykreślnie na rys. 6.



Rys. 6



Rys. 7

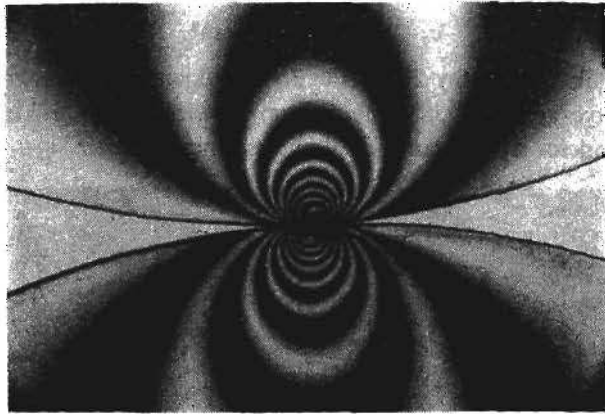
Na podstawie wykresu z rys. 6b stwierdzamy, że z wyjątkiem warstwy przypowierzchniowej największe wyłężenie materiału wynosi $0,680 p_0$, czyli możemy zgodnie ze wzorem (2.9) (ponieważ warstwa rozpatrywana leży poniżej $0,2b$) napisać:

$$(4.1) \quad \sigma_2 - \sigma_3 = 0,680 p_0.$$

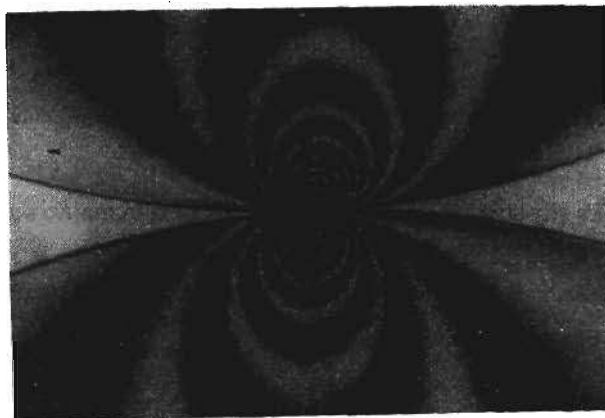
Wartość p_0 obliczono ze znanego wzoru Hertza dla wartości nacisku na osi symetrii w przypadku obciążenia normalnego

$$(4.2) \quad p_0 = 0,418 \sqrt{qE \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}},$$

gdzie q oznacza obciążenie normalne przypadające na cm długości krążka (walca), E jest modułem sprężystości, R_1 i R_2 oznaczają promienie krążków dociskanych.



Rys. 8



Rys. 9

W naszym przypadku przy badaniach elastoptycznych dane potrzebne do obliczenia wartości p_0 wynosiły: $q = 96,5 \text{ kG/cm}$, $E = 45 \cdot 10^3 \text{ kG/cm}^2$, $R_1 = R_2 = 8,6 \text{ cm}$.

Po podstawieniu danych do wzoru (4.2) otrzymamy wartość $p_0 = 422 \text{ kG/cm}^2$. Jeżeli wartość p_0 wstawimy do wzoru (4.1), otrzymamy wartość maksymalnego wyciężenia materiału wg danych teoretycznych. A zatem

$$\sigma_2 - \sigma_3 = 422 \text{ kG/cm}^2 \cdot 0,680 = 288 \text{ kG/cm}^2.$$

Zbadajmy teraz, ile wynosi maksymalna wartość $\sigma_I - \sigma_{II}$ otrzymana na podstawie wyników badań elastoptycznych, tj. za pomocą obrazu izochrom.

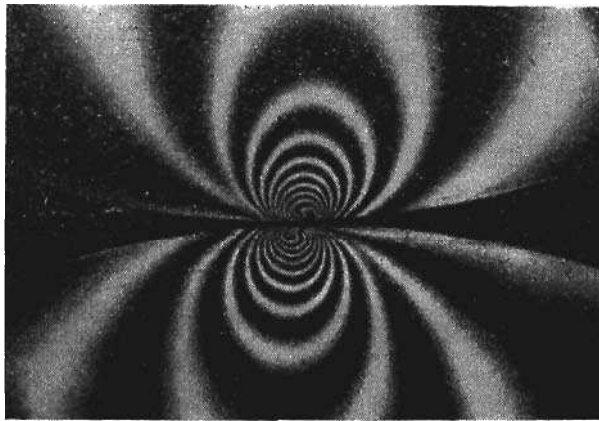
Na rysunku 10, przedstawiającym izochromy dla $\mu = 0,3$, najwyższy rząd izochromy wynosi $m = 10$, a zatem zgodnie ze wzorem (2.9) możemy napisać:

$$(4.3) \quad \sigma_I - \sigma_{II} = \sigma_2 - \sigma_3 = mK.$$

Jeżeli do wzoru (4.3) wstawimy rząd izochromy $m = 10$, a zamiast K (stałej modelowej) wartość $29,4 \text{ kG/cm}^2 \cdot \text{rz} \cdot \text{iz}$. otrzymamy:

$$\sigma_I - \sigma_{II} = 294 \text{ kG/cm}^2.$$

Porównując wynik teoretyczny 288 kG/cm^2 z wynikiem otrzymanym przy pomocy badań elastoptycznych 294 kG/cm^2 możemy stwierdzić, że różnica wynosi za-
ledwie 2%, co mieści się w granicach dopuszczalnego błędu.



Rys. 10

b) Dla stosunku siły stycznej do normalnej $\mu = 0,2$ ekstremalne wartości naprężeń zastępczych wynoszą zgodnie z wykresem na rys. 5b:

$$\sigma_2 - \sigma_3 = 0,660 p_0 = 0,660 \cdot 422 \text{ kG/cm}^2 = 278 \text{ kG/cm}^2,$$

wg zaś danych doświadczalnych (rys. 9)

$$\sigma_I - \sigma_{II} = K \cdot m = 280 \text{ kG/cm}^2.$$

Różnica pomiędzy wartością teoretyczną a doświadczalną jest bardzo mała.

c) Podobne obliczenia porównawcze można wykonać dla takiego samego obciążenia normalnego (walców-krażków) gdy $\mu = 0$. Wtedy $\sigma_2 - \sigma_3$ w punkcie zwanym często punktem «Bielajewa» wyniesie wg danych teoretycznych:

$$\sigma_2 - \sigma_3 = 0,6 p_0 = 0,6 \cdot 422 \text{ kG/cm}^2 = 253 \text{ kG/cm}^2,$$

zaś wg danych doświadczalnych (rys. 3)

$$\sigma_I - \sigma_{II} = K \cdot m = 250 \text{ kG/cm}^2,$$

a więc różnica jest znikoma.

5. **Wnioski.** 1. Najistotniejszym problemem, który został wyjaśniony przy pomocy badań elastoptycznych, jest fakt, że w miarę wzrostu siły stycznej punkt największego wyciężenia materiału zmienia położenie przesuując się wzdłuż linii łączącej punkt «Bielajewa» ze skrajnym punktem zetknięcia.

Pęknięcia, jakie zachodzą podczas pracy elementów takich jak walce, mają kierunek zgodny z kierunkiem przesuwania się punktu maksymalnego wyciężenia.

2. W przypadku badania wyciężenia w obszarze styku dwóch walców lub elementów o powierzchniach walcowych względnie do nich zbliżonych, jak np. powierzchnie zębów kół zębatych, krzywek itp., można badać metodą elastoptyczną odpowiednio obciążone tarcze otrzymując wyniki dość poprawne. Badanie elastoptyczne modeli płaskich jest łatwiejsze niż badanie elementów (w rozważanym przypadku) walcowych, które należy wcześniej «zamrażać», a następnie ciąć i dopiero badać pod polaryskopem. Metoda «zamrażania» jest nie tylko droższa, lecz także bardziej pracochłonna.

Literatura cytowana w tekście

1. Z. DYLAŁ, M. DAĆKO, Z. ORŁOŚ, S. PYTKO, *Elastoptyczne badania naprężeń kontaktowych w przypadku dwóch walców*, Streszczenie referatu w Materiałach I-go Sympozjum z Zakresu Elastoptyki, Warszawa 1962.
2. Z. DYLAŁ, Z. ORŁOŚ, S. PYTKO, *Badanie naprężeń w przypadku złożonego obciążenia dwóch walców*, Biul. WAT 1963, 11—12.
3. M. T. HUBER, *Teoria sprężystości*, t. 1, PWN, 1954.
4. S. PYTKO, *Miejsce największego wyciężenia w strefie kontaktu dwóch walców przy uwzględnieniu sił stycznych*, Zeszyty Naukowe AGH w Krakowie, nr 42, Elektr. i Mechaniz. Górn. i Hutn., z. 10, 1963.

Резюме

К ВОПРОСУ ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ МЕТОДА ФОТОУПРУГОСТИ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЙ НАПРЯЖЕННОСТИ МАТЕРИАЛА И РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НАПРЯЖЕНИЙ В КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧАХ

Задача состояла в исследовании напряженного состояния в области стыка двух цилиндров, нагруженных нормальными и касательными силами, с различным их отношением. Для подтверждения результатов, полученных из теоретических рассуждений, проводились контрольные фотоупругие исследования, прижимаемых друг к другу, двух круглых дисков. Упомянутые выше исследования описаны в докладе «фотоупругие исследования, контактных напряжений в случае двух цилиндров» на I Симпозиуме по фотоупругости в 1962 г.

Отсутствие стенда для исследований по фотоупругому методу «замораживания» вызвало необходимость исследования двух прижимаемых друг к другу дисков, в место двух при-

жимаемых цилиндров. Для того чтобы провести такие опыты, с целью подтверждения результатов вытекающих из теоретических исследований, проведен был анализ, который показал:

а) что различие между результатами, полученными на основе теоретических рассуждений и исследований, проведенными по методу фотоупругости, появляется лишь вблизи поверхности стыка, до глубины $0,2b$ (b — половина ширины поверхности стыка двух прижимаемых к себе цилиндров);

б) что с ростом касательной нагрузки слой с разными результатами уменьшается.

Ниже указанного слоя вычисленные по изображениям изохром значения напряжений должны согласовываться со значениями напряжений, полученными на основании теоретических рассуждений.

Это утверждение имеет очень важное значение в случае исследования распределения напряжений в очень малых областях контакта двух, прижимаемых друг к другу тел.

Summary

ON THE POSSIBILITY OF APPLICATION OF PHOTO-ELASTICITY TO THE ANALYSIS OF STRESS DISTRIBUTION IN CONTACT PROBLEMS

The aim of the paper is to analyse the stress distribution in the contact zone of two cylinders simultaneously loaded by normal and tangential forces for various ratios of both the forces. The theoretical results were verified by photo-elastic investigation, using as a model two flat discs in order to avoid the method of the "frozen" stress field.

Since the plane stress photo-elastic model is used for experimental verification of the plain strain solution, an analysis is given, which shows that:

- a) the differences between theoretical plane-strain and experimental plain-stress results appear only within the thin layer below the contact surface, the thickness of the layer being not greater than $0,2b$, where b is one half of the width of the contact surface.
- b) the thickness of the layer in which the differences are observed, decreases with the increase of the tangential force.

Below that layer the values of stresses obtained from the isochromatic pattern should be in agreement with their theoretical values.

This is an important point, in the case when the stress distribution is investigated within very small contact areas of two compressed bodies.

Praca została złożona w Redakcji dnia 9 kwietnia 1965 r.