MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
1, 2 (1964)

PRZEGLĄD POLSKICH PRAC DOTYCZĄCYCH ZAGADNIEŃ Z MIESZANYMI WARUNKAMI BRZEGOWYMI W TEORII SPRĘŻYSTOŚCI

ZBIGNIEW OLESIAK (WARSZAWA)

W niniejszym przeglądzie omówimy pewną klasę zagadnień z mieszanymi warunkami brzegowymi, nazywaną czasem klasą zagadnień o nieciągłych warunkach brzegowych. Omawiać będziemy więc takie rodzaje mieszanych warunków brzegowych, przy których punkty nieregularne brzegu (załomy) nie pokrywają się z punktami rozgraniczającymi różne warunki brzegowe. Jednym z licznych przykładów zagadnień, których w tym przeglądzie nie będziemy rozpatrywać, będą płyty prostokątne o różnych warunkach brzegowych na poszczególnych bokach brzegu płyty, ale jednakowe na danym boku prostokąta.

Rozpatrywać będziemy zagadnienia z mieszanymi warunkami brzegowymi w mechanice ciała stałego w podanym powyżej sensie, opublikowane przez autorów polskich w czasopismach krajowych i zagranicznych. Prace te można grupować przyjmując za punkt wyjścia różne kryteria, a więc na przykład według działów mechaniki stosowanej jak teoria tarcz, płyt, powłok, klasyczna teoria sprężystości, termosprężystość itp. Można je również omawiać w porządku chronologicznym ich powstawania. W naszym przeglądzie odnośne prace będziemy rozpatrywać według zastosowanych metod matematycznych. Wymieńmy główne metody, którymi posługiwali się autorzy prac, a więc:

1) sprowadzenie zagadnienia do równań całkowych pierwszego rodzaju i następnie przybliżone lub ścisłe (w pewnych prostszych przypadkach) ich rozwiązanie;

2) sprowadzenie zagadnienia do równań całkowych drugiego rodzaju;

3) zastosowanie metody równań całkowych singularnych;

4) zastosowanie całek Fouriera lub Hankela lub metody transformacji całkowych z następującym rozwiązaniem układu dualnych równań całkowych lub wyznaczeniem współczynników w układzie dualnych szeregów;

5) zastosowanie metody Wienera–Hopfa.

Pracą, która w Polsce zapoczątkowała badania nad zagadnieniami o mieszanych warunkach brzegowych, był artykuł W. Nowackiego [1]. Zastosowana metoda sprowadzała zagadnienia płyty z mieszanymi warunkami brzegowymi do równania całkowego pierwszego rodzaju lub układu równań całkowych pierwszego rodzaju w zależności od tego, ile jest odcinków o różnych warunkach brzegowych. Autor wymienionej pracy zajmuje się więc, w danym konkretnym przypadku, rozwiązaniem równania biharmonicznego z następującymi warunkami brzegowymi:

$$
\begin{aligned}
&w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial n} = 0 \quad \text{na części brzegu płyty,} \\
&w = 0, \quad \nabla^2 w = 0 \quad \text{na pozostałej części brzegu płyty.}
\end{aligned} \tag{1.1}
$$

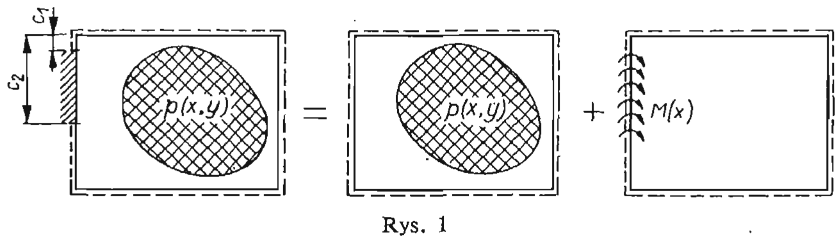
Powyższe warunki brzegowe odpowiadają płycie na części brzegu swobodnie podpartej, a na pozostałej—utwierdzonej zupełnie. Na wstępie rozważań został przyjęty tak zwany «układ podstawowy», jakim jest płyta na całym obwodzie swobodnie podparta. Dobór takiego, a nie innego układu podstawowego jest uwarunkowany znajomością prostego rozwiązania zagadnienia dla płyty swobodnie podpartej. Korzystając z zasady superpozycji ugięcie płyty można przedstawić jako sumę ugięcia od działającego obciążenia w_p dla układu podstawowego oraz ugięcia od momentów utwierdzenia. Oznacza to, że wymagana jest znajomość funkcji Greena, w tym przypadku ugięcia płyty spowodowanego działaniem skupionego momentu jednostkowego na brzegu płyty—układu podstawowego. Otrzymujemy następujące wyrażenie na ugięcie płyty:

$$
w(x, y) = w_p(x, y) + \int_{c_1}^{c_2} M(\xi)\, w_1(\xi, 0;\, x, y)\, d\xi, \tag{1.2}
$$

gdzie w_1 jest funkcją Greena od momentu jednostkowego, a $M(x)$ momentem na utwierdzonej części brzegu płyty. Nieznany rozkład momentu utwierdzenia zostanie wyznaczony z warunku, że kąt ugięcia na utwierdzonej części brzegu jest równy zeru, czyli z następującego równania całkowego pierwszego rodzaju:

$$
\int_{c_1}^{c_2} M(\xi)\, \frac{\partial w_1(\xi, 0;\, x, 0)}{\partial n}\, d\xi + \frac{\partial w_p}{\partial n} = 0. \tag{1.3}
$$

W innych przypadkach mieszanych warunków brzegowych, w szczególności dla podpór liniowych wewnątrz obszaru płyty, równanie posiada tę samą po-



Rys. 1

stać. Na ogół powyższe równania całkowe rozwiązuje się w sposób przybliżony sprowadzając je do układu liniowych równań algebraicznych. W pracy [1] przykład i dyskusję rozwiązania podano dla półpasma płytowego, w którym część krótszego brzegu jest utwierdzona zupełnie.

Metodę tę W. NOWACKI i inni autorzy rozszerzyli na szereg innych przypadków. Rozszerzenie to poszło w trzech kierunkach: pierwszy dotyczy innych kształtów płyt, drugi uwzględnia drgania i wyboczenie, wreszcie trzeci przenosi metodę na inne zagadnienia, mianowicie na teorię powłok, tarcz i klasyczne zagadnienia teorii sprężystości. Wymienimy prace W. NOWACKIEGO [2, 3] dotyczące płyt prostokątnych i płyt o kształtach, które można złożyć z prostokątów. Rozpatrzono tu między innymi przypadek płyty na części brzegu swobodnej, a na części swobodnie podpartej. Proste przykłady mieszanych warunków brzegowych w przypadku działania temperatury rozpatruje Z. THRUN [4]. Zagadnienia dynamiczne i utraty stateczności dla płyty prostokątnej zostały rozpatrzone w pracach [5 i 6], a dla płyty kołowej w pracach [7 i 8]. Zagadnieniami drgań i stateczności płyt podpartych w przęśle i o nieciągłych warunkach brzegowych zajmuje się S. KALISKI w pracach [11 i 12]. Z innych prac wymienimy [13 i 14], w których rozpatrzono podpory liniowe w obszarze płyty kołowej oraz pracę [15], w której zagadnienie zostało rozszerzone na przypadek mieszanych warunków brzegowych w powłoce walcowej. Rozszerzenie metody równań całkowych pierwszego rodzaju na mieszane zagadnienia brzegowe teorii sprężystości ma miejsce w pracach W. NOWACKIEGO [9 i 10].

Przez zastosowanie tego samego toku rozumowania co poprzednio do płyt ze sprężystym utwierdzeniem i podparciem oraz płyt spoczywających na sprężystym podłożu winklerowskim W. NOWACKI i S. KALISKI [16 i 17] uzyskali nowe rozszerzenie samej metody. Tym razem zagadnienie zostało sprowadzone do równania całkowego drugiego rodzaju lub układu tych równań. Referat na ten temat został wygłoszony na IX Kongresie Mechaniki Stosowanej (Bruksela, 1956).

Przypuśćmy dla przykładu, że tak jak poprzednio mamy do czynienia z płytą prostokątną, swobodnie podpartą jako układem podstawowym. Załóżmy obecnie, że na odcinku o–c płyta jest sprężyście utwierdzona (lecz sztywnie podparta); możemy wtedy przyjąć, że kąt nachylenia stycznej do powierzchni na zamocowanym odcinku jest proporcjonalny do momentów utwierdzenia. Otrzymujemy więc z tego warunku następujące równanie całkowe drugiego rodzaju

$$\frac{\partial w}{\partial n} = -\frac{1}{r} M(x) = \frac{\partial w_0}{\partial n} + \int_0^c M(\xi) \frac{\partial w_1(\xi, 0; x, 0)}{\partial n} d\xi, \tag{1.4}$$

skąd zostanie wyznaczony nieznany rozkład momentów sprężystego utwierdzenia.

A. KACNER, wykorzystując powyższy sposób sprowadzenia zagadnienia do równań całkowych drugiego rodzaju, uzyskał rozwiązanie zamknięte dla półpasma płytowego w pewnym szczególnym przypadku nieciągłości warunków podparcia i ustalił osobliwości poszukiwanej funkcji momentu brzegowego. Otrzymał on rozwiązanie przechodząc do granicy z wartością współczynnika podatliwości [18, 19, 20]. W pracy [21] rozwiązując odpowiednie równanie całkowe A. KACNER podał sposób eliminowania wpływu osobliwości jądra na dokładność wyniku. Prace [22, 23 i 24] tego autora oparte są na koncepcji dwóch układów podstawowych, z których uzyskuje się dwie grupy sprzężonych związków zawierających wszystkie nieznane wielkości brzegowe, zarówno statyczne, jak i geometryczne. Związki te pozwalają na ustalenie charakteru osobliwości funkcji rozwiązujących i na sprowadzenie zagadnienia do równań całkowych drugiego rodzaju.

Sformułowanie zagadnienia dla mieszanych warunków brzegowych w teorii sprężystości w oparciu o twierdzenie Bettiego z wykorzystaniem funkcji Greena podał W. NOWACKI w pracy [25].

H. ZORSKI [26–29] przedyskutował charakter osobliwości powstających przy różnych kombinacjach warunków brzegowych dla płyt w kształcie półpłaszczyzny, ćwiartki płaszczyzny i półpasma płytowego, uwzględniając również płyty anizotropowe [28]. Sposób rozwiązania zagadnień jest następujący: autor wprowadza dwa potencjały biharmoniczne, za pomocą których można wyrazić ugięcie i kąt nachylenia stycznej do powierzchni ugięcia płyty:

(1.5)
$$P_1(x,y) = \frac{y^2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(\xi)\,d\xi}{y^2+(\xi-x)^2}, \qquad P_2(x,y) = \frac{2y^3}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\psi(\xi)\,d\xi}{[y^2+(\xi-x)^2]^2},$$

gdzie

$$\varphi(x) = \frac{\partial}{\partial n}\,w(x,0), \qquad \psi(x) = w(x,0).$$

W podobny sposób wprowadzono dwa potencjały w przypadku, gdy na brzegu znane jest ugięcie i laplasjan ugięcia:

(1.6)
$$P_3(x,y) = \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\psi(\xi)\,d\xi}{y^2+(\xi-x)^2}, \qquad P_4(x,y) = \frac{y}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\ln[y^2+(\xi-x)^2]\,\mu(\xi)\,d\xi,$$

gdzie

$$\mu(x) = \nabla^2 w(x,0).$$

Po zbadaniu wartości brzegowych wprowadzonych potencjałów i ich pochodnych znalezione zostały odpowiednie wyrażenia na wielkości statyczne. W oparciu o otrzymane wzory na odcinku, na którym dane jest ugięcie i jego laplasjan, dobrano w ten sposób kąt ugięcia, aby był spełniony warunek na laplasjan ugięcia. W wyniku otrzymano równanie całkowe silnie osobliwe pierwszego rodzaju z jądrem Cauchy'ego:

$$\frac{1}{\pi}\int_L\frac{\varphi'(\xi)\,d\xi}{\xi-x} = f(x), \qquad x\in L. \tag{1.7}$$

Ponieważ jądro zawiera jedynie część charakterystyczną, równanie rozwiązuje się w postaci całek określonych. W podobny sposób H. ZORSKI otrzymał rozwiązanie dla brzegu na części utwierdzonego, a na pozostałej części swobodnego. Otrzymane wyniki pozwoliły na wyjaśnienie szeregu kwestii związanych z występującymi osobliwościami. Przytoczono szereg zamkniętych wyrażeń na wielkości statyczne i geometryczne. W przypadku ćwierćpłaszczyzny rozpatrzono zagadnienia, gdy jeden brzeg jest swobodnie podparty, a drugi podparty w sposób nieciągły. Wyniki pozwalają również na wyjaśnienie osobliwości w rogu płyty. Metodę równań całkowych singularnych wykorzystano jeszcze w pracy W. PIECHOCKIEGO i H. ZORSKIEGO dotyczącej termosprężystego zagadnienia klina [33].

W. NOWACKI [31] wykorzystując własności całek Hankela i przedstawiając rozkład temperatury w postaci takiej całki rozwiązał zagadnienie termosprężystości dla półprzestrzeni, w której na płaszczyźnie ograniczającej temperatura $T = T_0$ dla $r < a$, natomiast jej gradient $\partial T/\partial z = 0$ dla $r > a$. Metoda transformacji całkowych została zastosowana w wielu pracach. Sprowadzenie zagadnienie brzegowego do rozwiązywania dualnych równań całkowych zastosowano w kilku przypadkach zagadnień z mieszanymi warunkami brzegowymi; i tak zagadnienie termosprężystości dla szczeliny osiowo-symetrycznej w przestrzeni termosprężystej rozwiązano w pracy [35]. Na powierzchni szczeliny dana była temperatura albo jej gradient. Układ dualnych równań całkowych otrzymujemy w sposób następujący. Przypuśćmy, że rozpatrujemy przypadek półprzestrzeni sprężystej ogrzanej na powierzchni ograniczającej na kole $r < 1$ i izolowanej dla $r > 1$. Rozwiązanie zagadnienia stacjonarnego sprowadza się do rozwiązania równania Laplace'a z warunkami brzegowymi

$$T(r, 0) = v(r), \qquad \frac{\partial T(r, 0)}{\partial z} = 0.$$

Po wykonaniu transformacji Hankela zerowego rzędu na równaniu Laplace'a otrzymamy równanie różniczkowe zwyczajne

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \xi^2\right)\overline{T} = 0,$$

którego rozwiązaniem jest

$$\overline{T}(\xi, z) = A(\xi)e^{-\xi z}.$$

Po wstawieniu powyższego wyrażenia jako funkcji podcałkowej do wzoru na transformację odwrotną i wykorzystaniu warunków brzegowych otrzymamy następujące równania, zwane dualnymi równaniami całkowymi, z których wyznacza się nieznaną funkcję $A(\xi)$:

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty \xi A(\xi) J_0(r\xi)\, d\xi = C_1 y(r), \qquad && r < 1, \\ (1.8) \qquad &\int_0^\infty \xi^2 A(\xi) J_0(r\xi)\, d\xi = 0, && r > 1. \end{aligned}$$

Ponieważ rozwiązanie tego typu równań jest znane, wystarczy obecnie, przynajmniej z punktu widzenia formalnego, wstawić obliczone $A(\xi)$ do wzoru na $\overline{T}(\xi, z)$ i wykonać transformację odwrotną otrzymując rozkład temperatury. Podobny tok postępowania ma miejsce w innych przypadkach. Przykładem wykorzystania tej metody jest zastosowanie jej do zagadnień płytowych [34] oraz osiowo-symetrycznego zagadnienia w teorii sprężystości [36]. Prace Z. ORŁOSIA [37 i 38] również traktują o zagadnieniu szczeliny i naprężeniach w jej pobliżu.

R. SOLECKI [39] otrzymał rozwiązanie dla izotropowych płyt prostokątnych ze szczeliną równoległą do jednego z brzegów płyty. W pracy tej rozpatrzono drgania i zginanie płyty i podano przykłady oraz odpowiednie wykresy.

W ciągu ostatnich trzech lat rozwiązano szereg zagadnień dotyczących nieciągłych warunków brzegowych przez sprowadzenie ich do równania całkowego typu Wienera–Hopfa, które następnie rozwiązuje się w sposób przybliżony. Wykonanie transformacji Fouriera na równaniu różniczkowym cząstkowym sprowadza je na ogół do następującego problemu. Należy znaleźć nieznane funkcje $\Phi_+(\alpha)$ i $\Psi_-(\alpha)$ związane równaniem funkcjonalnym

$$A(\alpha)\,\Phi_+(\alpha)+B(\alpha)\,\Psi_-(\alpha)+C(\alpha)=0, \tag{1.9}$$

które jest spełnione w pasmie $\tau_- < \tau < \tau_+$, $-\infty < \sigma < \infty$ płaszczyzny zespolonej $\alpha = \sigma + i\tau$ (parametr transformacji). Przy tym $\Phi_+(\alpha)$ powinna być regularna w półpłaszczyźnie $\tau > \tau_-$, a $\Psi_-(\alpha)$ w półpłaszczyźnie $\tau < \tau_+$; funkcje $A(\alpha)$, $B(\alpha)$ i $C(\alpha)$ są znanymi funkcjami α regularnymi w rozpatrywanym pasmie. Podstawowe przyjęcie przy rozwiązywaniu powyższego równania, będącego przypadkiem szczególnym zagadnienia Riemanna–Hilberta, polega na tak zwanej faktoryzacji, to znaczy znalezieniu funkcji $K_+(\alpha)$ regularnej i nie posiadającej punktów zerowych w półpłaszczyźnie $\tau > \tau_-$ oraz funkcji $K_-(\alpha)$ regularnej i nie posiadającej zer w półpłaszczyźnie $\tau < \tau_+$ i spełniających związek:

$$\frac{A(\alpha)}{B(\alpha)} = \frac{K_+(\alpha)}{K_-(\alpha)}.$$

W prostszych przypadkach funkcje $K_+(\alpha)$ i $K_-(\alpha)$ udaje się odgadnąć. Istnieją również inne metody ich wyznaczania. W wielu zagadnieniach można posłużyć się sposobem przybliżonym polegającym na zastąpieniu funkcji $K_+(\alpha)$ i $K_-(\alpha)$ prostszymi spełniającymi następujące wymagania:

1) nowe funkcje $\overline{K}_+(\alpha)$ i $\overline{K}_-(\alpha)$ nie różnią się znacznie od $K_+(\alpha)$ i $K_-(\alpha)$ wzdłuż linii, względem których dokonujemy faktoryzacji,

2) zachowują się tak samo dla $|\alpha| \to 0$ i $|\alpha| \to \infty$,

3) są prostsze, jeżeli chodzi o rozkład pierwiastków równania $\overline{K}_+(\alpha) = 0$, $\overline{K}_-(\alpha) = 0$.

Stosując powyższą metodę M. SOKOŁOWSKI [40] podał rozwiązanie dla nieskończonego pasma płytowego swobodnie podpartego na szerokości $2b$, a na pozostałej części brzegu zamocowanego sprężyście. Z innych prac wymienimy pracę

M. SOKOŁOWSKIEGO [41]; rozwiązano w niej zagadnienia przewodnictwa cieplnego dla długiej warstwy, której krawędź dolna utrzymywana jest w stałej temperaturze, krawędź górna jest częściowo termicznie izolowana, a na pozostałej części wypływ ciepła jest proporcjonalny do temperatury brzegu warstwy. Praca [42] tego samego autora dotyczy nieciągłego zagadnienia brzegowego tarczy o kształcie klina na części brzegu podgrzanego, a na części izolowanego (zagadnienie przewodnictwa cieplnego). Naprężenia w sztywnie utwierdzonej warstwie sprężystej znaleziono w pracy [43]. Nieskończona warstwa sprężysta jest swobodna na części $x < 0$ i jest ściskana doskonale sztywnymi blokami o krawędziach ostrych lub zakrzywionych na części $x > 0$. Podobne zagadnienie warstwy sprężystej swobodnej dla $x < 0$ i ściskanej w ten sposób, że przemieszczenia u i v są odpowiednio proporcjonalne do naprężeń stycznych i normalnych rozwiązał M. MATCZYŃSKI [44]; ten sam autor rozwiązał również zagadnienie klina sprężystego z danymi przemieszczeniami na części brzegu [45]. M. MATCZYŃSKI i M. SOKOŁOWSKI rozwiązali ponadto zagadnienie pasma płytowego na części brzegu sprężyście utwierdzonego, a na części swobodnego [46].

Literatura cytowana w tekście

[1] W. NOWACKI, *Płyty prostokątne o mieszanych warunkach brzegowych*, Arch. Mech. Stos., **3**, 1951, 419.

[2] W. NOWACKI, *Płyty prostokątne o mieszanych warunkach brzegowych* (II), Arch. Mech. Stos., **5**, 1953, 193.

[3]. W NOWACKI, *The problem of rectangular plates with mixed boundary conditions*, Biul. Pol. Akad. Nauk, seria IV, **1**, 1953, 10.

[4] Z. THRUN, *Termiczne stany odkształcenia i naprężenia w cienkich płytach*, Arch. Mech. Stos. **6**, 1954, 555.

[5] W. NOWACKI, *Zagadnienia dynamiki i stateczności płyty prostokątnej o mieszanych warunkach brzegowych*, Arch. Mech. Stos., **7**, 1955, 226.

[6] W. NOWACKI, *Free vibrations and buckling of a rectangular plate with discontinuous boundary conditions*, Biul. Pol. Akad. Nauk, seria IV, **3**, 1955, 159.

[7] W. NOWACKI, Z. OLESIAK, *Płyta kołowa na obwodzie częściowo utwierdzona zupełnie i częściowo swobodnie podparta*, Arch. Mech. Stos., **8**, 1956, 233.

[8] W. NOWACKI, Z. OLESIAK, *Vibrations buckling and bending of a circular plate clamped along part of its periphery and simply supported on the remaining part*, Biul. Pol. Akad. Nauk., seria IV, **5**, 1956, 247.

[9] W. NOWACKI, *O pewnych zagadnieniach brzegowych teorii sprężystości*, Arch. Mech. Stos. **7**, 1955, 483.

[10] W. NOWACKI, *On certain boundary problems of the theory of elasticity*, Biul. Pol. Akad. Nauk, seria IV, **3**, 1955, 175.

[11] S. KALISKI, *Drgania płyt podpartych w przęśle i o nieciągłych warunkach brzegowych*, Biul. WAT, 28, 1954.

[12] S. KALISKI, *Stateczność płyt podpartych w przęśle i o nieciągłych warunkach brzegowych*, Biul. WAT, 35, 1954.

[13] Z. OLESIAK, *A bent circular plate with linear supports inside the plate region*, Arch. Mech. Stos., **9**, 1957, 227.

[14] Z. OLESIAK, *Gebogene Kreisplatte mit linearen Stützen innerhalb der Platte*, Biul. Pol. Akad. Nauk, seria IV, **5**, 1957, 129.

[15] Z. OLESIAK, *Discontinuous boundary conditions and linear supports in statical problems of cylindrical shells*, Arch. Mech. Stos., **9**, 1957, 549.

[16] W. NOWACKI, S. KALISKI, *Some problems of structural analysis of plates with mixed boundary conditions*, Biul. Pol. Akad. Nauk, seria IV, **4**, 1956, 235.

[17] S. KALISKI, W. NOWACKI, *Some problems of structural analysis of plates with mixed boundary conditions*, Arch. Mech. Stos., **8**, 1956, 413.

[18] A. KACNER, *A closed solution in the case of a semi-infinite plate strip with discontinuous boundary conditions* (I), Arch. Mech. Stos., **9**, 1957, 371.

[19] A. KACNER, *A closed solution in the case of bending of a semi-infinite plate strip with discontinuous boundary conditions*, Biul. Pol. Akad. Nauk, seria IV, **6**, 1958, 7.

[20] A. KACNER, *A closed solution in the case of a semi-infinite plate with discontinuous boundary conditions* (II), Arch. Mech. Stos., **10**, 1958, 57.

[21] A. KACNER, *Metoda Nyströma-Gaussa w zastosowaniu do zagadnienia zginania płyt o nieciągłych warunkach brzegowych*, Arch. Inżyn. Lądow., **4**, 1958, 55.

[22] A. KACNER, *The method of successive approximations applied to bending of plates with discontinuous boundary conditions*, Biul. Pol. Akad. Nauk, seria IV, **6**, 1958, 251.

[23] A. KACNER, *Metoda kolejnych przybliżeń w zastosowaniu do zginania płyt o nieciągłych warunkach brzegowych*, Arch. Inżyn. Lądow. **4**, 1958, 397.

[24] A. KACNER, *Bending of semi-infinite plate strips with discontinuous boundary conditions*, Arch. Mech. Stos., **12**, 1960, 451.

[25] W. NOWACKI, *Formulation of boundary problem of the theory of elasticity with mixed boundary conditions*, Biul. Pol. Akad. Nauk, seria IV, **10**, 1962, 71.

[26] H. ZORSKI, *Plates with discontinuous supports*, Arch. Mech. Stos., **10**, 1958, 271.

[27] H. ZORSKI, *A semi-infinite strip with discontinuous boundary conditions*, Arch. Mech. Stos., **10**, 1958, 371.

[28] H. ZORSKI, *Some cases of bending of anisotropic plates*, Arch. Mech. Stos., **11**, 1959, 71.

[29] H. ZORSKI, *Plates with discontinuous supports* (I), Biul. Pol. Akad. Nauk, seria IV, **6**, 1958, 127.

[30] H. ZORSKI, *Plates with discontinuous supports* (II), Biul. Pol. Akad. Nauk, seria IV, **6**, 1958, 133.

[31] W. NOWACKI, *A three-dimensional thermoelastic problem with discontinuous boundary conditions*, Arch. Mech. Stos., **9**, 1957, 319.

[32] W. NOWACKI, *A boundary problem of heat conduction*, Biul. Pol. Akad. Nauk, seria IV, **5**, 1957, 205.

[33] W. PIECHOCKI, H. ZORSKI, *Thermoelastic problem for a wedge*, Biul. Pol. Akad. Nauk, seria IV, **7**, 1959, 555.

[34] Z. OLESIAK, *Some cases of infinite isotropic plates with mixed boundary conditions*, Arch. Mech. Stos., **12**, 1960, 109.

[35] Z. OLESIAK, I. N. SNEDDON, *The distribution of thermal stress in an infinite elastic solid containing a penny-shaped crack*, Arch. Rat. Mech. Anal., **4**, 1960, 238.

[36] G. SZEFER, *Osiowo-symetryczny problem teorii sprężystości z mieszanymi warunkami brzegowymi*, Konferencja Zakładu Mechaniki Ośrodków Ciągłych w Krynicy w r. 1962, Zeszyty Naukowe Politechniki Krakowskiej, Nr 2, 1946.

[37] Z. ORŁOŚ, *Szczelina przykrawędziowa w półpłaszczyźnie sprężystej*, Arch. Inżyn. Lądow., **6**, 1960, 93.

[38] Z. ORŁOŚ, *Arbitrary inclined crack intersecting the edge of an elastic semi-plane*, Biul. Pol. Akad. Nauk, seria IV, **10**, 1962, 371.

[39] R. SOLECKI, *Bending and vibration of an isotropic rectangular plate with a hinged slot*, Acta Polytechnica Scandinavia, 318/1962.

[40] M. SOKOŁOWSKI, *Some problems of a plate strip with discontinuous boundary conditions*, Arch. Mech. Stos., **13**, 1961, 239.

[41] M. SOKOŁOWSKI, *A thermoelastic problem for a strip with discontinuous boundary conditions*, Arch. Mech. Stos., **13**, 1961, 337.

[42] M. SOKOŁOWSKI, *Heat flow in a wedge with discontinuous boundary conditions*, Arch. Mech. Stos., **13**, 1961, 433.

[43] M. SOKOŁOWSKI, *Stresses in a rigidly clamped plate strip*, Arch. Mech. Stos., **14**, 1962, 271.

[44] M. MATCZYŃSKI, *Plane state of stress in a plate strip with discontinuous boundary conditions*, Biul. Pol. Akad. Nauk, seria IV, **10**, 1962, 261.

[45] M. MATCZYŃSKI, *Klin sprężysty o nieciągłych warunkach brzegowych*, Arch. Mech. Stos., **15**, (1963), 833.

[46] M. MATCZYŃSKI, M. SOKOŁOWSKI, *On polynomial solutions of a certain discontinuous boundary value problem*, Biul. Pol. Akad. Nauk, seria IV, **12**, 1963

Резюме

ОБЗОР ПОЛЬСКИХ РАБОТ КАСАЮЩИХСЯ ЗАДАЧ С ПЕРЕРЫВНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ В ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Дается обзор приблизительно 50-ти работ польских авторов. Работы дисскутируются в согласии с математическими методами, при помощи которых решены задачи.

REVIEW OF THE POLISH PAPERS CONCERNING THE PROBLEMS WITH DISCONTINUOUS BOUNDARY CONDITIONS IN THE THEORY OF ELASTICITY

About 50 recent papers by Polish authors on the above problem are discussed. Some mathematical methods of solutions are presented.

ZAKŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGŁYCH
INSTYTUTU PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 19 października 1963 r.