MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
1, 2 (1964)

WYZNACZANIE NAPRĘŻEŃ NA PODSTAWIE POMIARÓW TYLKO JEDNEJ SKŁADOWEJ ODKSZTAŁCENIA

WOJCIECH SZCZEPIŃSKI (WARSZAWA)

Dla pełnego wyznaczenia na drodze doświadczalnej rozkładu naprężeń w elementach płaskich dokonuje się zwykle pomiaru trzech składowych odkształcenia. Najczęściej stosowaną metodą jest naklejanie w szeregu punktów badanego obszaru tzw. *rozetek tensometrów oporowych*. Każda z rozetek składa się z trzech tensometrów różnie skierowanych na płaszczyźnie. W przypadkach bardziej złożonych, gdy w badanym obszarze występują otwory lub wprowadzane są skupione siły zewnętrzne, zachodzi konieczność użycia wielkiej liczby tensometrów, co znacznie podnosi koszt badania i przedłuża czas pomiarów. W niniejszej pracy zaproponowano nową metodę wyznaczania rozkładu naprężeń na podstawie pomiarów tylko jednej składowej tensora odkształcenia, na przykład ε_x.

W rozpatrywanym obszarze przyjmujemy prostokątny układ współrzędnych kartezjańskich (x, y). Następnie obieramy odpowiednio gęstą prostokątną siatkę linii $x = \text{const}$ i $y = \text{const}$ i w jej węzłowych punktach naklejamy tensometry oporowe skierowane równolegle do osi x. Zamiast zwykle stosowanych trzech tensometrów w węzłach siatki mamy zatem tylko jeden.

Stan naprężenia w każdym punkcie określony jest trzema składowymi naprężenia σ_x, σ_y i τ, które muszą spełniać warunki równowagi:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau}{\partial x} = 0. \tag{1}$$

Znając z pomiarów wielkość składowej odkształcenia ε_x, która związana jest z naprężeniami σ_x i σ_y zależnością

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y), \tag{2}$$

gdzie E jest modułem Younga, a ν współczynnikiem Poissona, możemy niewiadomą σ_x wyrazić przez ε_x i σ_y:

$$\sigma_x = E\varepsilon_x + \nu\sigma_y. \tag{3}$$

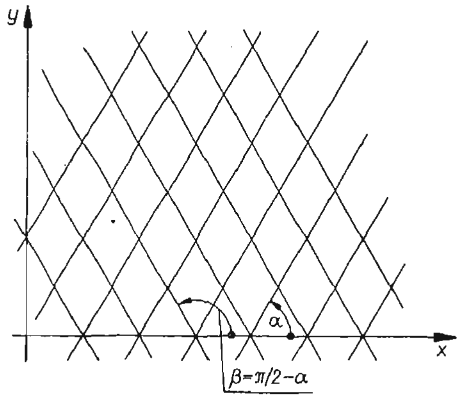
Podstawiając wyrażenie (3) do pierwszego z równań równowagi otrzymujemy liniowy układ dwóch równań różniczkowych cząstkowych z dwiema niewiadomymi funkcjami σ_y i τ:

$$\nu\frac{\partial \sigma_y}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} = -E\frac{\partial \varepsilon_x}{\partial x}; \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau}{\partial x} = 0. \tag{4}$$

Układ ten jest zawsze hiperboliczny, a więc ma dwie rodziny charakterystyk rzeczywistych, określonych równaniami

$$(5) \qquad y = +\frac{x}{\sqrt{\nu}} + C, \quad y = -\frac{x}{\sqrt{\nu}} + C.$$

Charakterystyki są więc prostoliniowe i tworzą sieć złożoną z dwóch rodzin równoległych prostych. Kąt ich nachylenia względem osi x zależy od wartości współczynnika Poissona ν. Dla $\nu = 1/3$ charakterystyki pierwszej rodziny, określonej równaniem (5), tworzą z osią x kąt $\alpha = 60°$, a charakterystyki drugiej rodziny—kąt $\beta = 180° - \alpha = 120°$ (rys. 1).



Rys. 1

Wzdłuż charakterystyk muszą być spełnione zależności różniczkowe

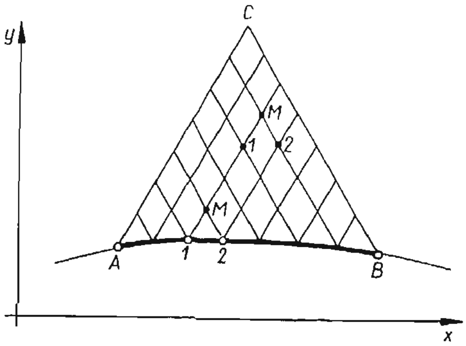
$$(6) \qquad \begin{aligned} \nu d\sigma_y + \sqrt{\nu}\, d\tau &= -E\frac{\partial \varepsilon_x}{\partial x}dx, \\ \nu d\sigma_y - \sqrt{\nu}\, d\tau &= -E\frac{\partial \varepsilon_x}{\partial x}dx. \end{aligned}$$

Górna zależność odnosi się do pierwszej rodziny, a dolna do drugiej rodziny charakterystyk.

Obliczenie rozkładu naprężeń w konkretnych przypadkach polega na rozwiązywaniu zagadnień brzegowych typu Cauchy'ego lub mieszanych dla równań (6). Omówimy tu bardziej szczegółowo zagadnienie typu Cauchy'ego.

Jeżeli rozpatrywany obszar ma swobodną nieobciążoną krawędź, to najwygodniej jest rozpoczynać obliczenia od tej krawędzi. Załóżmy, że na odcinku AB (rys. 2) nieobciążonej krawędzi zmierzono naprężenia za pomocą naklejonych wzdłuż niej tensometrów. Znane są więc na tym odcinku wartości naprężeń σ_x, σ_y i τ. Dla określenia tych naprężeń w dowolnym punkcie krawędzi wystarczy oczywiście tylko jeden tensometr, gdyż jedno z naprężeń głównych jest z założenia równe zeru, a kierunek drugiego naprężenia głównego pokrywa się z kierunkiem krawędzi.

Należy jednak podkreślić, że odcinek AB, od którego rozpoczynamy rozwiązywanie zagadnienia Cauchy'ego, może leżeć również wewnątrz badanego obszaru. W takim przypadku należy w poszczególnych punktach tego odcinka



Rys. 2

przyklejać rozetki tensometrów w celu wyznaczenia wszystkich trzech składowych σ_x, σ_y i τ. Jeżeli wybrany odcinek AB jest osią symetrii, to wystarczy wzdłuż niego przyklejać po dwa tensometry w poszczególnych punktach, gdyż kierunki główne są na nim oczywiście znane.

W przyjętym układzie współrzędnych prostokątnych x i y prowadzimy z punktu A charakterystykę pierwszej rodziny, a z punktu B charakterystykę drugiej rodziny aż do przecięcia się w punkcie C. Kąty nachylenia charakterystyk są określone wartością współczynnika Poissona ν. Następnie rysujemy wewnątrz pola ABC siatkę charakterystyk w taki sposób, aby jej punkty węzłowe stanowiące jeden szereg leżały na wspólnej prostej $y = \text{const}$. Wzdłuż otrzymanych w ten sposób prostych $y = \text{const}$ naklejamy w odpowiednio dobranych odległościach tensometry, a następnie po obciążeniu mierzymy wielkości odkształcenia ε_x. Wartości pochodnej $\partial\varepsilon_x/\partial x$ w punktach węzłowych siatki wyznaczamy przez różniczkowanie wykreślne krzywych $\varepsilon_x = \varepsilon_x(x)$. Znajomość tych pochodnych w polu ABC oraz wielkości naprężeń σ_y i τ na linii AB wystarczają do wyznaczenia naprężeń w całym trójkącie ABC przez numeryczne całkowanie równań (6).

Przypuśćmy, że w dwóch sąsiednich punktach węzłowych 1 i 2 siatki charakterystyk znamy wielkości naprężeń σ_{y1} i τ_1 oraz σ_{y2} i τ_2. Podamy teraz sposób wyznaczenia wielkości naprężeń σ_{yM} i τ_M w punkcie węzłowym M sąsiadującym z punktami 1 i 2 (rys. 2).

Zastępując w równaniach (6) różniczki przez różnice skończone otrzymujemy układ równań z dwiema niewiadomymi σ_{yM} i τ_M

$$(7) \qquad \begin{aligned} \nu(\sigma_{yM}-\sigma_{y1})+\sqrt{\nu}\,(\tau_M-\tau_1) &= -\varepsilon'_{x1}(x_M-x_1), \\ \nu(\sigma_{yM}-\sigma_{y2})-\sqrt{\nu}\,(\tau_M-\tau_2) &= -\varepsilon'_{x2}(x_M-x_2). \end{aligned}$$

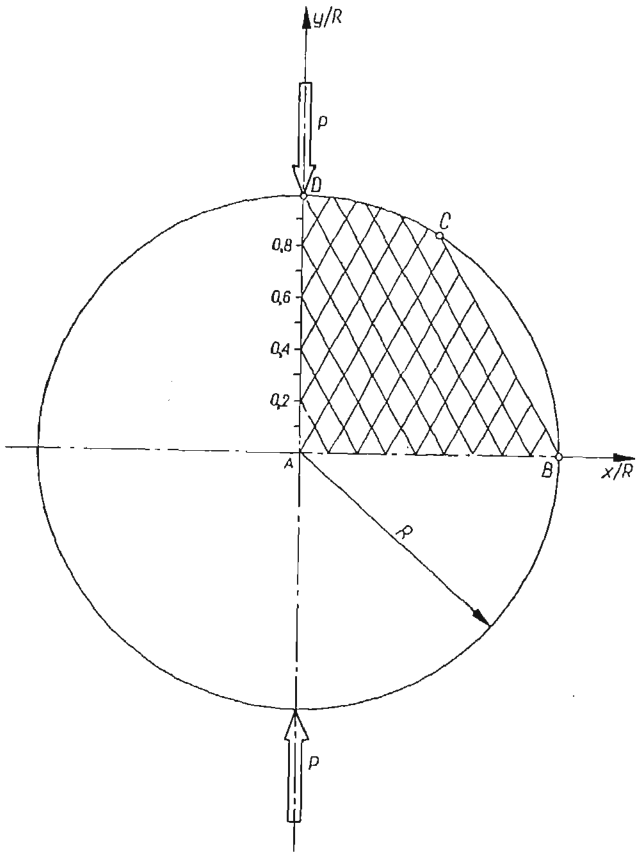
Przez ε'_{x1} i ε'_{x2} oznaczono wartości, jakie przyjmuje pochodna $\partial\varepsilon_x/\partial x$ odpowiednio w punktach 1 i 2. W celu uzyskania większej dokładności należy w równaniach

(7) podstawić zamiast ε'_{x1} i ε'_{x2} średnie wartości pochodnej $\partial\varepsilon_x/\partial x$ odpowiednio pomiędzy punktami 1 i M oraz 2 i M.

Wartości naprężeń w punkcie M obliczamy rozwiązując układ (7) względem σ_{yM} i τ_M. Składową naprężenia σ_{xM} wyznaczamy ze wzoru (3).

Obliczenia rozpoczynamy obierając kolejno pary punktów 1 i 2 na odcinku AB. Za pomocą równań (7) otrzymujemy wartości naprężeń w węzłach wewnętrznych siatki, sąsiadujących z linią AB. Tworzą one punkt wyjścia do obliczenia następnych punktów węzłowych również za pomocą równań (7). W ten sposób można otrzymać rozwiązanie w całym trójkącie ABC.

W celu sprawdzenia dokładności proponowanej metody obliczono przykład dla przypadku płaskiego krążka ściskanego dwiema siłami wzdłuż średnicy (rys. 3). Ze względu na symetrię rozpatrzono tylko ćwiartkę ograniczoną do-



Rys. 3

datnimi półosiami x i y. Jako podstawę obliczenia przyjęto teoretyczne wartości ε_x wzdłuż linii y = const otrzymane dla wartości y/R wzrastających od 0 do 1 co 0,1. Wzdłuż odcinka AB osi symetrii krążka przyjęto teoretyczny rozkład naprężenia σ_y. Naprężenie styczne τ jest na odcinku AB równe zeru. Dane te wystarczają do obliczenia naprężeń w całym obszarze ograniczonym charakterystyką drugiej rodziny BC oraz osiami symetrii AB i AD.

Rachunki przeprowadza się w podany powyżej sposób za pomocą równań różnicowych (7). Wartości σ_{yM} dla punktów położonych na osi symetrii AD znajdujemy bezpośrednio z drugiego z równań (7), gdyż dla punktów tych $\tau_M = 0$. Obliczenia wykonano przyjmując gęstość siatki charakterystyk jak na rys. 3. Dla zwiększenia dokładności obliczano średnie wartości pochodnej $\partial\varepsilon_x/\partial x$ pomiędzy poszczególnymi węzłami siatki. Obliczenia doprowadzono do prostej $y/R = 0{,}6$.

Porównanie otrzymanych w ten sposób naprężeń z ich wielkościami teoretycznymi wykazuje, że proponowana metoda jest bardzo dokładna. Różnice nie przekraczają 3%.

Резюме

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ НА ОСНОВЕ ЗАМЕРА ОДНОЙ КОМПОНЕНТЫ ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ

Представлен метод определения напряженного состояния на основе замера только одной компоненты тензора деформации, напр. ε_x. Основная система уравнений всегда гиперболического типа и имеет два семейства прямолинейных характеристик, описанных уравнениями (5) и (6). Напряжения определяются из решения соответствующей краевой задачи для характеристик. Дается численный пример, подтверждающий хорошую точность метода.

Summary

DETERMINING OF STRESSES BASED ON MEASURING OF ONE STRAIN COMPONENT ONLY

The method of determining the state of stress is presented when measurements of only one strain component, e.g. ε_x are known The fundamental system of equations(4) is always of a hyperbolic type and has two families of rectilinear characteristics determined by Eqs. (5) and (6). The stresses are found from the solution of the corresponding boundary value problem for characteristics. Good accuracy of the employed method is confirmed by a numerical example.

ZAKŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGŁYCH
INSTYTUTU PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 17 sierpnia 1963 r.