

ROLA MECHANIKI TEORETYCZNEJ I STOSOWANEJ W ROZWOJU POSTĘPU
TECHNICZNEGO

STEFAN ZIEMBA (WARSZAWA)

1

Założenia do planu gospodarczego na okres 1966–1970 i założenia do planu perspektywicznego na okres 1966–1980 przewidują między innymi wielokrotny wzrost produkcji przemysłowej, ze szczególnym uprzywilejowaniem przemysłu budowy maszyn.

Plany kształcenia kadry przewidują wielokrotny wzrost kadry naukowej, wielokrotny wzrost kadry inżynierskiej oraz poważną rozbudowę instytutów naukowo-badawczych i laboratoriów fabrycznych.

Założenia postępującej mechanizacji, automatyzacji, programowania z zastosowaniem maszyn matematycznych nie tylko do sterowania lecz także do kierowania i podejmowania decyzji, rozwoju systemów adaptacyjnych, maszyn samouczących się, czyli ogólnie rzecz ujmując założenia intensywnego rozwoju cybernetyki technicznej przewidują konieczność wykształcenia projektantów-konstruktorów nowego typu, posiadających z jednej strony dobre przygotowanie w dziedzinie regulacji automatycznej, z drugiej zaś strony mających należytą znajomość technologii procesów produkcyjnych sterowanych automatycznie. W niemniejszym stopniu konstruktorzy powinni umieć uwzględniać technologię procesów wytwarzania samych maszyn, bowiem technologia konstrukcji stanowi podstawowy postulat, bez przestrzegania którego nie można dziś myśleć o postępie technicznym w budowie maszyn.

Obecnie nasze wyższe uczelnie techniczne przygotowują zasadniczo specjalistów dwóch typów: konstruktorów o tradycyjnej konwencjonalnej sylwetce fachowej oraz technologów.

Ekspluatatorów przygotowuje samo życie, tzn. paroletnia praktyka przemysłowa w trakcie pracy po ukończeniu studiów na uczelni. Natomiast ani organizacja studiów, ani programy nauczania nie przewidują przygotowania specjalistów-badaczy (Forschungsingenieur, research-engineers). W praktyce szkoli ich życie w toku pracy po dyplomie czy to w katedrach, czy w instytutach naukowo-badawczych. Tymczasem coraz dotkliwszy brak tego typu specjalistów odczuwają nie tylko zakłady naukowo-badawcze, ale cały rozwijający się przemysł ze swoimi biurami projektowymi i konstrukcyjnymi, jak też powstającymi laboratoriami fabrycznymi.

Podejmowane próby stworzenia wydziałów czy sekcji z programem i profilem bardziej podstawowym w rodzaju sekcji zastosowań matematyki na uniwersyte-

tach, wydziału fizyki technicznej na uczelniach technicznych w rzeczywistości nie wyszły poza sferę projektów lub nieśmiałyh czy niesprecyzowanych prób.

Coraz częściej mówi się o studiach podyplomowych, o rozmaitych kursach doskonalenia kadry inżynierskiej. Za granicą ogromne sumy poświęcane są na tzw. letnie (wakacyjne) doszkalaćcie inżynierów na uczelniach. Rzecz ciekawa, że np. w USA inicjatorem takiego douczania nie są uczelnie, lecz przemysł i jego biura projektowo-konstrukcyjne. Z punktu widzenia dobrze pojętego interesu uczelni i jej składu naukowego jedno wydaje się nie ulegać wątpliwości i nie może być odkładane na dalszą przyszłość, mianowicie organizacja i uruchomienie produkcji i doskonalenia pracowników naukowo-badawczych na własne potrzeby rozwojowe i dydaktyczne. Jak dotychczas większość procesów produkcyjnych będą wykonywały maszyny; będą to nie tylko obrabiarki, maszyny przemysłu przetwórczego, transportu, maszyny górnicze, hutnicze, budowlane, drogowe, ziemne itd., lecz również szeroko rozumiane maszyny elektryczne, aparatura chemiczna itp.

Od maszyn tych wymagać będziemy coraz większej wydajności, coraz lepszej sprawności przy należytej niezawodności pracy i ekonomii ich eksploatacji. Coraz silniej wysuwane są wymagania, żeby nowe konstrukcje cechowała nowoczesność, technologiczność, lekkość i niezawodność.

Z kolei rzeczy warunkiem postępu w budowie maszyn jest opanowanie przez konstruktora na wysokim poziomie mechaniki teoretycznej. Nie przypadkowo powstała w ZSRR oddzielna dyscyplina «teoria maszyn» oparta na wybranych zagadnieniach z mechaniki teoretycznej. W ramach ogólnego systemu produkcyjnego poszczególne układy, urządzenia, konstrukcje, maszyny mają do spełnienia określone czynności produkcyjne. Konstruktor maszyny, projektant urządzenia musi znać dokładnie ich czynności; w tym celu konieczne jest pełne porozumienie z technologiem danego rodzaju produkcji. Stosownie do rodzaju czynności produkcyjnych w oparciu o zasady teorii maszyn i mechanizmów konstruktor wybiera najlepszy schemat geometryczno-kinematyczny danego układu. Dla tego schematu i przewidzianych czynności maszyny konstruktor ustala w sposób przybliżony przebieg obciążeń; znając działanie przedmiotu obrabianego na narzędzie konstruktor wyznacza siły działające na poszczególne ogniwa mechanizmu od narzędzia roboczego aż do napędu. Na tej podstawie konstruktor buduje pierwszą wersję modelu mechanicznego.

Przy rozpatrywaniu maszyny lub konstrukcji jako układu materialnego dla zbadania zachodzących w nim procesów dynamicznych należy uwzględnić następujące etapy:

- 1) konstrukcji modelu mechanicznego,
- 2) konstrukcji schematu strukturalno-funkcjonalnego, w postaci schematu blokowego,
- 3) wyznaczania zastępczych mas, więzów i ich charakterystyk, obciążeń tak od strony organu roboczego jak i od strony napędu, czyli wymuszeń,
- 4) opisu matematycznego układu,

5) badania układu, będącego bądź zadaniem analizy, bądź syntezy kinetycznej, które można prowadzić na drodze teoretyczno-obliczeniowej, eksperymentalnej lub modelowania.

W wyniku badań otrzymujemy przebieg obciążeń i przemieszczeń w czasie; stąd wyznaczamy naprężenia, odkształcenia, stosunki energetyczne, ocenę sztywności statycznej i dynamicznej, charakter stateczności itd. Dokładna znajomość warunków pracy maszyny, zwłaszcza przebiegu obciążeń poszczególnych elementów jej mechanizmów, pozwala ustalić możliwie racjonalny zakres jej pracy, przy którym efekty dynamiczne będą możliwie najniższe, pozwala konstruktorowi zbadać szereg konkretnych rozwiązań konstrukcyjnych w poszukiwaniu tych, przy których obciążenia dynamiczne będą możliwie najmniejsze. Szczególnie dużych nadwyżek dynamicznych w pracy maszyny oczekiwać należy w przypadku zmiany reżimu obciążenia przy puszczeniu maszyny w ruch, przy hamowaniu, przy nawrotach, przy nakładaniu czy odejmowaniu obciążenia, wtedy bowiem na skutek istnienia nieuchronnych luzów w węzłach łańcucha kinematycznego (łożyska, koła zębate) wystąpić mogą udary, a zatem obciążenia o dużej dynamiczności. Złożona na ogół struktura elementów wykonawczych maszyn, w szczególności roboczych maszyn ciężkich, często nie pozwala na bezpośrednie zetawienie prostych równań dla celów obliczeniowych opisujących procesy dynamiczne i ruch. Zmuszeni jesteśmy szukać schematów bardziej uproszczonych; w tym celu pomijamy nieistotne szczegóły mające drugorzędny wpływ na charakter ruchu mechanizmu i zestawiamy możliwie prosty model mechaniczny, który stosunkowo łatwo można opisać układem równań różniczkowych. Ów model mechaniczny przyjmuje się w postaci układu punktów materialnych (dyskretnych mas) połączonych więzami sprężystymi. Oprócz tych ostatnich można wprowadzić więzy dające dysypację energii (tłumiki). Takie przyjęcie oznacza, że w praktyce np. wały sprężyste mają masę, którą można pominąć, a elementy ich w postaci masywnych krążków i walców o małej długości traktuje się jako doskonale sztywne.

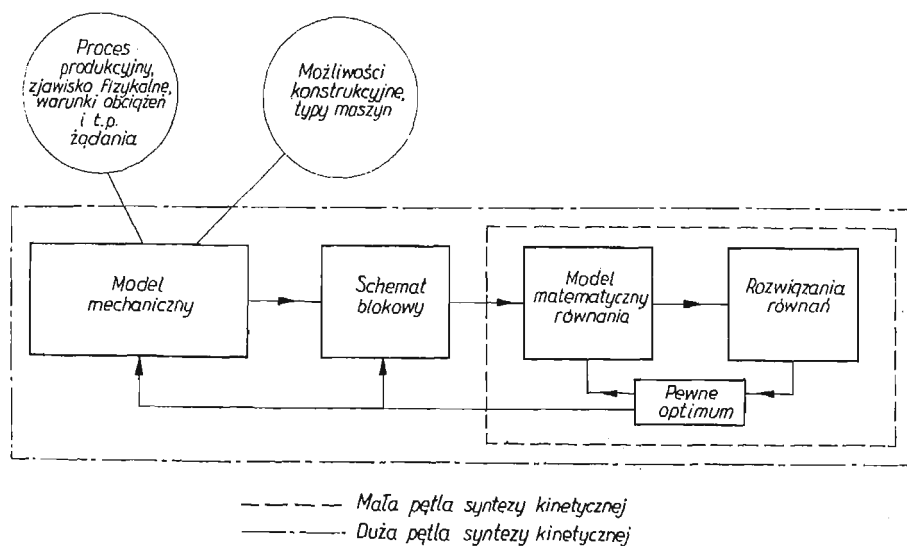
Przy budowie modelu mechanicznego maszyny czy konstrukcji pierwszym krokiem jest wybór miejsca geometrycznego dla mas skupionych i oczywiście liczba tych punktów, która określa liczbę stopni swobody układu. Następnie do tych punktów należy zredukować masy elementów konstrukcji, sprężystości i ewentualnie tłumienie oraz siły przyłożone do elementów konstrukcji.

Dla tak ustawionego modelu nie trudno już napisać układ równań różniczkowych, opisujący własności dynamiczne modelu, a więc pośrednio rozpatrywanej maszyny czy konstrukcji. Tak zwana teoria «maszyn abstrakcyjnych» (abstract machines) zajmuje się badaniem prawdopodobieństwa fizykalnego istnienia ruchu konstrukcji czy maszyny wzdłuż rozwiązań tych równań. W tym sensie nauka ta jest przedłużeniem mechaniki teoretycznej.

Zbudowany model mechaniczny i odpowiedni układ równań różniczkowych dają podstawę do badania procesów zachodzących lub mogących zachodzić w obiekcie rzeczywistym. Istotną sprawą jest kierunek, w jakim mają być prowadzone te badania. Zależy to w pierwszym rzędzie od zadań, do jakich maszyna jest przeznaczona. Oprócz podstawowej sprawy realizacji postawionego zadania produkcyjnego

przy możliwie dokładnym uwzględnieniu warunków eksploatacyjnych niemniej ważne są wymagania dotyczące wytrzymałości, niezawodności pracy, sprawności, wydajności, ekonomii itd.

Ani model mechaniczny reprezentujący rozpatrywaną konstrukcję, ani opisujący układ równań różniczkowych nie ujmują i nie wyrażają tego pełnego splotu zagadnień stojących przed projektantem nowej konstrukcji. Z tych względów bardzo pożyteczne okazuje się sporządzenie schematu *strukturalno-funkcjonalnego*, któryby w sposób umowny, łatwo czytelny, wyrażał zarówno właściwości (charakter) samej konstrukcji, jak też podawał funkcję (zadanie) oraz warunki, w jakich ona powinna być realizowana. Najprościej będzie wzorując się na sposobach stosowanych w teorii regulacji automatycznej zbudować taki obraz w postaci *schematu blokowego*.



Rys. 1

O ile model mechaniczny był wykonany jedynie z punktu widzenia mas i sił, o tyle schemat strukturalny ustawiamy z punktu widzenia czynności «operacji» ujmując w jeden blok zespół mechanizmów realizujących daną operację oraz ze względu na przyczynowo-czasową kolejność tych operacji i wzajemne powiązanie funkcjonalne poszczególnych bloków. Schemat strukturalny pozwala zanotować, które operacje przebiegają jednocześnie (równolegle), które kolejno — jedna po drugiej (szeregowo), a które wreszcie częściowo równolegle i częściowo szeregowo.

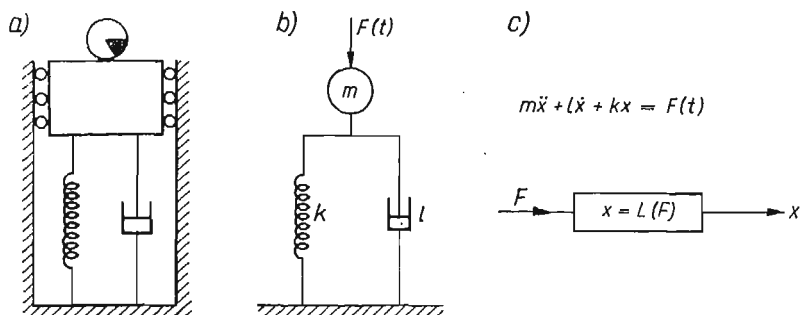
W czynnościach składających się na proces produkcyjny można wyróżnić operacje: a) ściśle robocze, kiedy zachodzi wzajemne oddziaływanie między obrabianym przedmiotem (materiałem) i narzędziem obrabiającym, b) transportowe, tzn. przemieszczanie obrabianego przedmiotu i narzędzia, c) ustalające (ustalenie czyli zamocowanie przedmiotu i narzędzia), d) operacje obsługi (zwykle między- lub wewnątrzcykliczne).

Całe zagadnienie można przedstawić schematycznie, jak to podaje rys. 1.

Tok postępowania zilustrujemy kilku przykładami.

1. Układ o jednym stopniu swobody.

a. Masywny fundament maszyny wirującej, traktowany jako układ drgający o jednym stopniu swobody, przedstawiony jest schematycznie na rys. 2a, przy czym m oznacza masę fundamentu z maszyną, traktowaną jako jedno ciało sztywne, mogące wykonywać jedynie ruch postępowy w kierunku pionowym; k jest współ-



Rys. 2

czynnikiem sprężystości podłoża (ewentualnie z podkładkami sprężysto-tłumiącymi), l współczynnikiem oporu dysypacyjnego podłoża; zarówno element sprężysty jak i tłumik traktujemy jako pozbawione masy.

b. Model mechaniczny układu przedstawia rys. 2b.

c. Schemat strukturalny otwarty jest złożony z jednego bloku. Na wejściu mamy siłę wymuszającą $F = F(t)$, na wyjściu zaś wychylenie $x = x(t)$, rys. 2c.

Operator, który funkcji $F(t)$ przyporządkowuje funkcję $x(t)$, nazywamy charakterystyką bloku i piszemy:

$$x(t) = L(F/t) \quad \text{lub} \quad x = L(F).$$

d. Dla tak zbudowanego modelu układamy równanie różniczkowe drgań fundamentu

$$m\ddot{x} + l\dot{x} + kx = F(t).$$

2. Układ o trzech stopniach swobody.

a. Jest to układ 3 krążków (mogą to być koła zamachowe, pasowe, zębate, wirniki lub zredukowane układy korbowe) osadzonych sztywno na jednym wale. Schemat takiego układu przedstawia rys. 3a. Zakładamy, że

1) krążki traktujemy jako doskonale sztywne, ich momenty bezwładności względem osi obrotu wynoszą odpowiednio, J_0, J_1, J_2 ;

2) pomijamy masę wału; przy odpowiednim ułożyskowaniu przyjmujemy, że sztywność na zginanie jest nieograniczona;

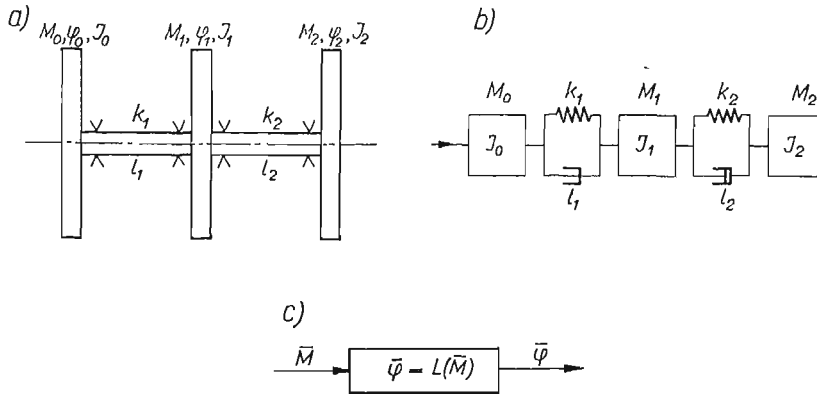
3) uwzględniamy sprężystą podatność wału na skręcanie i dopuszczamy tylko takie odkształcenia;

4) tarcie wewnętrzne w materiale wału skręcanego traktujemy jako czysto viskozne liniowe;

5) przyjmujemy, że do kół mogą być przyłożone wymuszające momenty skręcające, pochodzące zarówno od napędu jak i od obciążenia.

b) Schemat układu można przyjąć w postaci łańcucha punktów o masach uogólnionych J_0, J_1, J_2 , połączeniach sprężystych k_1, k_2 oraz tłumikach względnych l_1, l_2 . Model mechaniczny naszego układu przedstawia rys. 3b.

c) Schemat strukturalny, tj. schemat działania (action-schema) będzie podobny jak w poprzednim przykładzie z tym, że na wejściu będziemy mieli wektor $M/(M_0, M_1, M_2)$, a na wyjściu wektor $\Phi(\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2)$.



Rys. 3

d) Równania różniczkowe stanu dynamicznego przyjmuje się w postaci

$$J_0 \ddot{\varphi}_0 = -k_1(\varphi_0 - \varphi_1) - l_1(\dot{\varphi}_0 - \dot{\varphi}_1) + M_0(t),$$

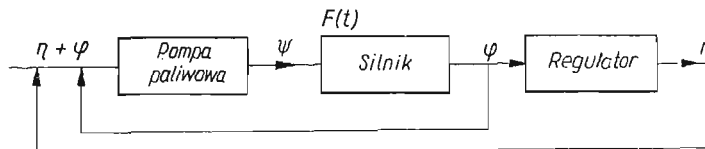
$$J_1 \ddot{\varphi}_1 = -k_1(\varphi_1 - \varphi_0) - l_1(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_0) - k_2(\varphi_1 - \varphi_2) - l_2(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) + M_1(t),$$

$$J_2 \ddot{\varphi}_2 = -k_2(\varphi_2 - \varphi_1) - l_2(\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1) + M_2(t),$$

gdzie $M_0(t), M_1(t), M_2(t)$ są momentami sił zewnętrznych.

Traktowanie maszyn lub konstrukcji jako układu dynamicznego jest nieodzowne szczególnie wtedy, gdy w maszynie działają różnego rodzaju regulatory.

Obiekt plus układ regulacji należy traktować łącznie jako jeden układ dynamiczny, przy tym tylko dynamiczne traktowanie takiego układu może dać prawidłową odpowiedź na to, jakie są jego właściwości i zachowanie. Objasnimy to na prostym przykładzie w schematycznym ujęciu silnika Diesla z automatyczną regulacją prędkości obrotu.



Rys. 4

Pomijamy schemat techniczny i model mechaniczny; schemat blokowy przedstawiony jest na rys. 4. Przy wyprowadzaniu równań dynamiki i układaniu schematu blokowego zasadnicze znaczenie ma prawidłowe ujęcie kierunku i charakteru działania wszelkiego rodzaju wymuszeń związanych z poszczególnymi ogniwami

łańcucha regulacji. Wymuszenia te mogą być bądź wynikiem działania przyczyn zewnętrznych (obciążenie silnika), bądź też oddziaływać wewnętrznych między ogniwami. Rozpatrywany układ składa się z silnika, pompy paliwowej i regulatora. Nastawianie silnika na różne żądane prędkości obrotu dokonuje się przez zmianę napięcia sprężyny regulatora. Przy budowie schematu strukturalnego uwzględniamy fakt, że przy zmianie obciążenia silnik daje wymuszenie na wejściu do regulatora. Regulator przetwarza wymuszenie i przekazuje na suwak pompy paliwowej. Podaż paliwa do wtryskiwaczy silnika ulega przy tym zmianie odpowiednio do nowego obciążenia silnika. Jednocześnie w procesie regulacji będzie się zmieniać wydajność pompy paliwowej wskutek zmiany prędkości obrotu silnika, który napędza pompę. Na schemacie strukturalnym przyjęto następujące oznaczenia: η jest wychyleniem elementu sterującego regulatora, φ — odchyleniem prędkości obrotu wału silnika, ψ — podażą paliwa.

Działanie silnika na pompę paliwową można traktować jako sprzężenie zwrotne obejmujące dwa ogniwa regulacji. Ruch całego układu, a więc charakter pracy, zmienność obciążeń, będzie zależał nie tylko od zmienności obciążenia zewnętrznego $F(t)$, które również w pewien sposób zależy od tego ruchu, ale od charakterystyki silnika, regulatora i pompy. Dopiero znajomość dynamicznych charakterystyk poszczególnych elementów schematu i analiza ruchu całego układu pozwoli ocenić wartość i charakter zmienności obciążeń, które są podstawą prawidłowego zaprojektowania całego układu, a między innymi wykonania obliczeń konstrukcyjno-wytrzymałościowych jego elementów.

Reasumując powyższe wywody stwierdzamy, że przy rozpatrywaniu konstrukcji pracującej w warunkach dynamicznych trzeba wykonać następujące zadania:

- 1) ustawić schemat dynamiczny ustroju (model mechaniczny),
- 2) wyznaczyć charakterystyki statyczne i dynamiczne całego ustroju i jego poszczególnych ogniw,
- 3) wyznaczyć rzeczywisty przebieg wymuszeń (obciążeń) poszczególnych elementów,
- 4) przeprowadzić odpowiednio do przebiegu obciążeń zaprogramowane badania zmęczeniowe materiałowe i w miarę potrzeby postaciowe,
- 5) zanalizować zachowanie się układu w warunkach przewidzianych obciążeń, w szczególności należy zbadać jego sztywność statyczną i dynamiczną, stateczność statyczną i dynamiczną oraz procesy przejściowe wywołane zmieniającymi się w czasie obciążeniami.

2

W celu dokonania analizy układu fizycznego konieczny jest jego opis matematyczny. Opis ten wymaga zdefiniowania pewnych wielkości w taki sposób, ażeby wartości liczbowe tych wielkości określały jednoznacznie stan układu w każdej chwili. Jeżeli wielkości te zmieniają się w czasie, wówczas czas będzie również wielkością potrzebną do opisanego układu. Dla układów fizycznych czas upływa w sposób ciągły niezależnie od innych zmian w układzie. Dlatego będzie on wielkością

niezależną lub zmienną niezależną. Jeżeli układ jest układem o parametrach skupionych (np. obwodem elektrycznym z elementami impedancyjnymi), czas jest jedyną zmienną niezależną. Jeżeli układ jest układem o parametrach rozłożonych (np. linią transmisyjną), należy uwzględnić drugą zmienną niezależną, którą będzie współrzędna położenia dowolnego punktu na linii.

W układzie fizykalnym istnieją również parametry, których znajomość jest konieczna, lecz które nie zmieniają się lub zmieniają się tylko w sposób określony. Do parametrów tych należy: oporność, indukcyjność, pojemność obwodu elektrycznego i napięcia zasilania doprowadzone do obwodu z generatora o znanej charakterystyce. Pozostałe wielkości opisujące układ zależą od wartości parametrów układu i od zmiennych niezależnych. Wielkości te są zmiennymi zależnymi układu. Układ opisuje się matematycznie za pomocą równań, w których występują wielkości zmienne, ich pochodne lub całki. Współczynniki tych równań są określone przez parametry układu. Opis skomplikowanego układu wymaga większej liczby równań tego typu. Liczba tych równań musi być równa liczbie zmiennych zależnych, które są wielkościami nieznanymi.

Jeżeli do opisu układu wystarczy jedna zmienna niezależna, to w równaniach wystąpią tylko pochodne i całki względem tej zmiennej. Bardzo często całki można wyeliminować różniczkując równanie. Otrzymane tą drogą równanie, posiadające tylko pochodne względem jednej zmiennej niezależnej, będzie równaniem różniczkowym zwyczajnym. Jeżeli w równaniu jest więcej niż jedna zmienna niezależna, wystąpią w nim pochodne cząstkowe względem większej liczby zmiennych niezależnych i równanie będzie równaniem różniczkowym o pochodnych cząstkowych.

Jeżeli zmienne zależne lub ich pochodne występują w równaniu tylko w pierwszej potęgce, to równanie będzie liniowe; jeżeli w równaniu wystąpią zmienne zależne w potęgce wyższej niż pierwsza albo iloczyny zmiennych zależnych lub też iloczyny tych zmiennych i ich pochodnych, to równanie będzie nieliniowe. Ponieważ funkcję przestępną można przedstawić w postaci szeregu potęgowego, równanie zawierające funkcję przestępną zmiennej zależnej będzie również równaniem nieliniowym.

W najprostszym przypadku parametry układu są stałe, niezależne od stanu układu. Dla wielu układów parametry nie są wielkościami stałymi. Jeżeli parametry układu będą się zmieniać wraz ze zmianą jednej lub wielu zmiennych zależnych, równanie układu będzie równaniem nieliniowym. Jest to oczywiste, gdyż parametr będący funkcją zmiennej zależnej jest współczynnikiem albo przy tej zmiennej, albo przy innej zmiennej zależnej (względnie przy ich pochodnych). W efekcie pojawi się człon ze zmienną zależną w potęgce różnej od pierwszej albo z iloczynem pewnych zmiennych zależnych.

Parametry układu mogą się również zmieniać w pewien określony sposób ze zmianą zmiennej niezależnej. W tym przypadku równanie układu pozostaje liniowe, lecz jego współczynniki będą zmienne. Może się zdarzyć, że w tym samym równaniu wystąpią zarówno człony nieliniowe, jak i człony liniowe czy nieliniowe o współczynnikach zmiennych z czasem.

Rozwiązaniem układu równań różniczkowych są takie funkcje zmiennej niezależnej, które po podstawieniu do równań pierwotnych przekształcają je w tożsamości.

Znalezienie ogólnego rozwiązania równania różniczkowego jest na ogół bardzo trudne, a często w ogóle niemożliwe. Istnieją jednak pewne typy równań różniczkowych, dla których znalezienie rozwiązań nie nastęrcza trudności. Najczęściej spotykanym typem równania różniczkowego, którego rozwiązanie można znaleźć w prosty sposób, jest *równanie różniczkowe liniowe o współczynnikach stałych*. Równania tego typu można rozwiązać za pomocą pewnych stosunkowo prostych reguł. W tym celu stosuje się *metody operatorowe*. Jeżeli liczba zmiennych jest duża lub jeżeli równania są skomplikowane, stosowanie tych reguł może wymagać dużego nakładu pracy. Teoretycznie istnieje jednak zawsze możliwość otrzymania rozwiązania ścisłego. Zresztą problem pracochłonności stał się w zasadzie nieistotnym z chwilą wprowadzenia elektronowych maszyn liczących.

Najważniejszą właściwością równań liniowych jest to, że słuszna jest dla nich *zasada superpozycji*. Umożliwia ona otrzymanie skomplikowanego rozwiązania w postaci kombinacji liniowej rozwiązań prostych. Rozwiązanie ogólne równania jednorodnego, nie posiadającego członu odpowiadającego funkcji wymuszającej, można otrzymać w postaci sumy kilku funkcji wykładniczych, których liczba zależy od rzędu równania.

Równanie niejednorodne (z funkcją wymuszającą) posiada rozwiązanie ogólne będące sumą rozwiązania ogólnego odpowiedniego równania jednorodnego i pewnej całki szczególnej tego równania niejednorodnego. Skomplikowaną funkcję wymuszającą można rozłożyć na składniki prostsze i obliczać całki szczególne dla każdego z tych składników z osobna. Poszukiwana całka szczególna będzie wówczas sumą poszczególnych całek szczególnych odpowiadających poszczególnym składnikom funkcji wymuszającej. Korzystając z tej zasady można przedstawić skomplikowaną funkcję periodyczną wymuszającą w postaci jej szeregu Fouriera. Całki szczególne odpowiadające składowym szereg Fouriera można znaleźć w sposób prosty. Suma tych całek da całkę szczególną odpowiadającą wypadkowej funkcji wymuszającej.

Układy nieliniowe nie posiadają własności superpozycji. Duża część podstawowych teorii układów fizykalnych (technicznych) opiera się na założeniu, że układy te można opisać w sposób adekwatny za pomocą równań różniczkowych liniowych o stałych współczynnikach. Założenie to jest dla wielu układów w pełni uzasadnione. Większa część teorii obwodów elektrycznych opiera się na tym założeniu. Nie będzie jednak przesadą stwierdzenie, że *wszystkie układy fizykalne przy pewnych warunkach pracy stają się nieliniowymi i wymagają opisu za pomocą równań nieliniowych*. Skoro tylko prądy i napięcia w obwodzie elektrycznym stają się zbyt duże, występują efekty nieliniowe, rdzenie magnetyczne nasycają się, własności dielektryczne izolatorów ulegają zmianie, temperatura i oporność przewodników zmienia się, występują efekty prostownicze. Często bardzo małe napięcia i prądy są wystarczająco duże, aby wywołać tego rodzaju zmiany.

Jest rzeczą bardzo dogodną dla badającego, że założenie liniowości i stałości współczynników jest słuszne dla bardzo wielu układów. Niemniej należy pamiętać o tym, że założenie to nie będzie uzasadnione, gdy układ znajdzie się na granicach swego przedziału pracy.

Metody rozwiązywania równań nieliniowych lub równań o współczynnikach zmiennych są na ogół trudniejsze i mniej zadowalające niż metody rozwiązywania równań prostszych. Tylko w nielicznych przypadkach można znaleźć dokładne rozwiązanie równania nieliniowego w postaci zamkniętej (w postaci funkcji znanej). Zazwyczaj możliwe jest rozwiązanie przybliżone, które jest zadowalająco dokładne tylko w pewnym przedziale warunków pracy układu. Analizując układ nieliniowy trzeba uciekać się często do wszelkich możliwych środków pozwalających przewidzieć zachowanie się układu. Często kierujemy się intuicją, opartą na głębokim rozumieniu natury procesów fizycznych zachodzących w układzie. Ogólnie rzecz biorąc opieramy się na *metodach analizy jakościowej układów silnie nieliniowych*. Nie zaleca się natomiast bezkrytycznego stosowania formuł czysto matematycznych. Truizmem jest uwaga, że znajomość odpowiedzi z góry wydatnie pomaga w rozwiązaniu zagadnienia. Dane eksperymentalne charakteryzujące pracę układu mogą mieć dużą wartość użytkową przy jego analizie. Zbędnym jest podkreślanie okoliczności, że omawiane trudności będą wielokrotnie większe przy *syntezie układów nieliniowych*.

Jeżeli nieliniowości nie są zbyt duże lub gdy równania należą do pewnych specjalnych typów, to rozwiązania przybliżone można otrzymać za pomocą *metod analitycznych*. Metody analityczne dają rozwiązania w postaci algebraicznej bez konieczności podstawiania wartości liczbowych parametrów w trakcie obliczeń. Skoro tylko rozwiązanie otrzymano, można do niego wprowadzić wartości liczbowe i łatwo zbadać efekt zmiany wartości pewnych wielkości.

Jeżeli nieliniowości są silniejsze, metody analityczne mogą się okazać nieprzydatne i rozwiązanie równania może być możliwe tylko za pomocą *metod numerycznych* lub *graficznych*. Metody te wymagają korzystania w trakcie obliczeń z wartości liczbowych parametrów równania i warunków początkowych. Stąd rozwiązanie otrzymane tymi metodami odpowiada tylko pewnemu szczególnemu zespołowi warunków. Co więcej, przebieg obliczania jest zwykle pracochłonny (nie mamy na myśli korzystania z elektronowych maszyn matematycznych) i dla uzyskania dostatecznej dokładności wymaga dużej ilości operacji. Aby otrzymać rozwiązanie dla innych wartości liczbowych parametrów, należy całe obliczenie powtórzyć. Ze względu na dużą liczbę operacji potrzebnych do rozwiązania równania metodą numeryczną, w przypadku konieczności rozwiązywania większej liczby takich równań, potrzebna jest odpowiednia cyfrowa maszyna licząca.

Podsumowując powyższe uwagi można w sposób następujący scharakteryzować poszczególne przypadki napotymane przy analizie układów fizykalnych. Równania opisujące pracę wielu układów fizykalnych mogą być sprowadzone do układów równań różniczkowych zwyczajnych. Jeżeli równania te są równaniami liniowymi o stałych współczynnikach, rozwiązanie można otrzymać za pomocą metod powszechnie znanych. W przypadku gdy liczba zmiennych zależnych jest duża lub gdy równania są rzędu wysokiego, stosowanie tych metod może wymagać dużego nakładu pracy. Niemniej jednak rozwiązanie jest zawsze możliwe.

W przypadku równań różniczkowych nieliniowych rozwiązanie metodą analityczną jest możliwe wtedy, gdy nieliniowości nie są zbyt silne. Rozwiązania otrzy-

mane w tym przypadku są zwykle tylko przybliżone. Równania z dużymi nieliniowościami można rozwiązać tylko za pomocą metod numerycznych lub graficznych.

W praktyce wiele ważnych problemów jest tak skomplikowanych, że otrzymanie dokładnego rozwiązania jest w ogóle niemożliwe lub wymagałoby zbyt dużo czasu i pracy. W takich przypadkach konieczne jest pewne uproszczenie problemu, pominięcie cech nieistotnych i skoncentrowanie uwagi na cechach istotnych. Często przez poczynienie pewnych dopuszczalnych założeń upraszczających można równanie uprościć i doprowadzić do postaci łatwej do rozwiązania. Chociaż równania te nie będą opisywały układu dokładnie, mogą jednak opisywać jego własności najważniejsze. Uprozczone równanie można analizować za pomocą odpowiednich metod otrzymując w wyniku pewne informacje o układzie. Powyższe postępowanie jest równoznaczne ze sporządzeniem pewnego *uproszczonego modelu matematycznego* badanego układu w celu poznania jego zachowania się w różnych warunkach. Dane te mogą, co prawda, nie wystarczać do zaprojektowania danego urządzenia, niemniej jednak mogą być bardzo pożyteczne. Podany sposób postępowania okazał się przydatny przy rozwiązywaniu wielu praktycznych problemów. Na przykład generator lampowy drgań elektrycznych jest urządzeniem tak skomplikowanym, że przy jego analizie nie można uwzględnić wszystkich czynników wpływających na jego pracę. Niemniej jednak klasyczne równanie van der Pola opisuje wiele jego właściwości i jest na tyle proste, że może dostarczyć dużo informacji. Analiza równania van der Pola dostarczyła wiele cennych wiadomości o pracy generatorów samowzbudnych.

Każda z przybliżonych metod rozwiązywania problemu nieliniowego wzięta z osobna daje najczęściej rozwiązanie tylko fragmentaryczne. Aby otrzymać pełniejsze informacje, należy to samo zagadnienie rozwiązać kilkoma metodami. Warto zauważyć, że pewne metody stosowane przez matematyków do rozwiązywania poszczególnych problemów na pierwszy rzut oka wydają się bezpodstawne i niezrozumiałe. Na przykład, przy rozwiązywaniu równania różniczkowego rzędu wyższego bardzo często zastępuje się to równanie odpowiednim układem równań pierwszego rzędu. Taki sposób postępowania jest konieczny zazwyczaj wtedy, gdy chce się otrzymać rozwiązanie metodą numeryczną, gdyż większość tych metod można stosować tylko do równania pierwszego rzędu. W przypadku stosowania innych metod analizy rozkład na układ równań rzędu pierwszego jest również bardzo dogodny, gdyż pozwala na lepsze zorganizowanie następujących po sobie etapów rozwiązania. W jeszcze innych przypadkach zachodzi konieczność zastępowania w trakcie rozwiązywania pewnego układu równań jednym równaniem rzędu wyższego.

Innym często stosowanym sposobem jest zamiana zmiennych w równaniu. Często podstawienie zamiast dotychczasowej zmiennej jakiejś innej przekształca równanie z postaci, której nie dało się rozwiązać, w postać łatwiejszą do rozwiązania. Na przykład niekiedy pewne równanie nieliniowe można przez zmianę zmiennej przekształcić w równanie liniowe. W innych znowu przypadkach zamiana zmiennej jest stosowana dla udogodnienia dalszych obliczeń.

Często w pewnych problemach związanych z układami fizycznymi możliwe jest uproszczenie równania przez łączenie w jeden współczynnik kilku parametrów układu. Przez odpowiedni wybór tego współczynnika można doprowadzić równanie wypadkowe do postaci bezwymiarowej. Wielkości zmienne równania nazywa się wówczas zmiennymi znormalizowanymi. Znormalizowane równanie (i jego rozwiązanie) jest często bardziej zwarte i łatwiejsze do analizy niż odpowiednie równanie nieznormalizowane. Znormalizowane równanie nie posiada «niepotrzebnych współczynników», a współczynniki, które pozostały, są istotne dla analizy.

Jest rzeczą zrozumiałą, że metody numeryczne czy graficzne w ich klasycznym ujęciu i wykonaniu są mało przydatne w *zadaniach syntezy* układów fizycznych, technicznych, układów regulacji automatycznej itp., o silnej nieliniowości zwłaszcza wtedy, kiedy dla uzyskania wysokiej jakości syntezerowanego układu celowo wprowadza się elementy o charakterystykach silnie nieliniowych. Elementy te odgrywają coraz większą rolę w budowie układów regulacji automatycznej. Wprowadza się je głównie w celu:

- 1) uzyskania lepszej stabilizacji,
- 2) poprawy jakości działania układów regulacji automatycznej, w szczególności zapewnienia żądanej dynamicznej dokładności,
- 3) przy optymalizacji procesów sterowanych automatycznie,
- 4) przy rozwiązywaniu problemów programowania liniowego, a zwłaszcza dynamicznego.

W takich zadaniach szczególnego znaczenia nabierają *jakościowe metody badania* (zarówno analizy jak i syntezy) *układów nieliniowych*, z których najbardziej typowe są: *metody topologiczne* związane z geometryczną budową struktury przestrzeni fazowej oraz *metody jakościowej teorii równań różniczkowych*.

W badaniach *dynamiki układów fizycznych*, a w szczególności dynamiki maszyn i dynamiki układów regulacji automatycznej, coraz więcej uwagi poświęca się istnieniu i wpływowi *czynników losowych*. W układach fizycznych opisujących się układami równań różniczkowych zwyczajnych losowymi mogą być:

- 1) parametry opisujące charakterystykę układu,
- 2) warunki początkowe,
- 3) działanie zewnętrzne czyli wymuszenia.

O ile czynniki dwóch pierwszych grup możemy wyrazić przez *wielkości* (liczby) *losowe*, o tyle wymuszenia wyrażają się przez *funkcje losowe*. Jest rzeczą jasną, że przy udziale czynników losowych procesy zachodzące w układzie, tj. praca układu będzie procesem losowym, czyli procesem stochastycznym, a parametry opisujące ten proces będą losowymi funkcjami czasu.

Przy badaniu dynamiki układów fizycznych będących pod wpływem czynników losowych wysuwają się dwa zasadnicze zadania:

- 1) zadanie analizy, gdy wg danych statystycznych charakterystyk czynników (wymuszeń) należy podać statystyczne charakterystyki procesu;
- 2) zadanie syntezy, gdy wg statystycznych charakterystyk czynników losowych należy zbudować układ (zaprojektować jego regulację automatyczną) tak, żeby dynamiczna dokładność pracy układu czyniła zadość postawionym wymaganiom.

3

Mechanika teoretyczna stanowi konieczną bazę nie tylko dla nauk i zadań konstrukcyjnych. W naukach technologicznych dynamika realizowanych procesów technologicznych wymaga jej wnikliwej analizy, a przy rozwijającej się automatyzacji procesów produkcyjnych wysuwa coraz bardziej złożone *zadania syntezy dynamicznej*.

W eksploatacji konstrukcji i maszyn konieczne są badania mające za zadanie z jednej strony kontrolę prawidłowości przebiegu realizowanych przez maszyny procesów jak i utrzymania warunków prawidłowej pracy samych maszyn, z drugiej zaś badania dające zarówno wytyczne konstrukcyjne dla polepszenia konstrukcji maszyn, technologiczne dla usprawnienia realizowanego procesu produkcyjnego, wreszcie eksploatacyjno-remontowe dla oceny stanu maszyny, jego zmiany wskutek zużycia itd.

Ale mechanika teoretyczna i stosowana to nie tylko podbudowa pod dyscypliny techniczne, lecz również narzędzie, to zespół metod nieodzownych dla prawidłowej budowy i rozwoju tych dyscyplin technicznych. Przy tym ta rola nie ogranicza się do nauk związanych z budową maszyn czy też konstrukcji, ale dotyczy również bardziej odległych dyscyplin technicznych, jak elektrotechnika, chemia itd.

Wśród nauk podstawowych (ogólno-technicznych) mechanika teoretyczna zajmuje miejsce szczególne. Pod względem ścisłości i stosowanego aparatu logiczno-formalnego nie różni się zasadniczo od matematyki, jednak jeśli chodzi o przedmiot badań, to dopuszcza i buduje modele matematyczne mniej lub bardziej wyidealizowane obiektów konkretnych, procesów rzeczywistych, zjawisk fizycznych. Wynikają stąd zasadnicze postulaty pociągające za sobą duże trudności, których nie spotykamy w czystej matematyce, mianowicie wymagania co do sensu fizycznego, celowości i użyteczności technicznej pojęć wprowadzonych przy budowie i opisie modelu, możliwie jak najdalej posuniętej prostoty opisu, a jednocześnie możliwie dobrej zgodności cech modelu i obiektu rzeczywistego oraz konieczności weryfikacji doświadczalnej zgodności właściwości modelu i obiektu rzeczywistego.

Na gruncie rozważań o ruchach i siłach w nauce mechaniki teoretycznej przyszły inżynier zapoznaje się z możliwością i celowością rozumienia i opisu matematycznego fizykalnych układów i takim prowadzeniem rozważań, obliczeń i spekulacji, które w końcu prowadzą do ostatecznych wyników konkretnych, dających się wcielić w wymiary, parametry, kształty projektowanych układów, konstrukcji i maszyn. Wydaje się, że głównie dzięki tej operatywności, przystosowalności i uniwersalności mechanika teoretyczna nie tylko pozostaje nauką żywą, ale zarazem najlepiej opracowaną dyscypliną dla wdrażania przyszłego inżyniera w nawyki ścisłego technicznego myślenia. Niedocenianie tej roli mechaniki teoretycznej w programach wyższych uczelni technicznych powodować może braki jakościowe w ukształtowaniu umysłowości nowoczesnego inżyniera, w wyrobieniu umiejętności i nawyków do naukowego, odkrywczego podchodzenia do konkretnych problemów napotykanym w praktyce podyplomowej.

Podstawowym działem mechaniki teoretycznej, który przez swoją strukturę logiczną, ogólność i operatywność metod w zastosowaniach daleko przekracza zjawiska czy procesy mechaniczne, a rozciąga się na wszystkie procesy opisujące się parametrami zmiennymi z czasem i powiązanych z sobą i z czasem różniczkowymi równaniami stanu, jest dynamika analityczna. Dynamiką analityczną nazywamy tę gałąź wiedzy, w której bada się za pomocą analizy matematycznej zmiany stanów ciał materialnych (ruchy), wynikające z ich wzajemnego oddziaływania. Przez prawie dwieście lat (1700-1900) fizycy rozwijali tylko jedną teorię dynamiczną. Obecnie mamy trzy teorie dynamiczne, przy czym ostatnia może być jeszcze podzielona na dwie:

- 1) dynamikę newtonowską,
- 2) dynamikę relatywistyczną (wyłącza się z niej teorię kwantów),
- 3a) kwantową dynamikę newtonowską, opartą na bezwzględnej przestrzeni i bezwzględnym czasie Newtona,
- 3b) relatywistyczną dynamikę kwantową, opartą na płaskiej czaso-przestrzeni Minkowskiego lub na zakrzywionej czaso-przestrzeni Einsteina.

We współczesnym rozumieniu dynamika klasyczna oznacza dynamikę punktów materialnych i ciał sztywnych, przy czym specjalne znaczenie przywiązuje się do ogólnej teorii. Obejmuje ona również główne rozdziały kinematyki: teorię przemieszczeń skończonych, geometrię mas a także układ sił i współrzędnych uogólnionych. Co się tyczy dziedziny stosowalności dynamiki klasycznej, to można powiedzieć, że mechanika newtonowska prawidłowo opisuje zjawiska fizyczne w warunkach, które moglibyśmy nazwać zwykłymi «normalnymi», tzn. kiedy ją stosujemy do problemów techniki i w szerokim znaczeniu tego słowa do problemów fizyki, obejmujących układy, które nie są ani zbyt wielkie, ani zbyt małe. Niezgodności między teorią a doświadczeniem w tych dziedzinach są w głównej mierze wynikiem zbyt daleko posuniętego uproszczenia modelu matematycznego (np. pominięcie tarcia, zastąpienie ciała sprężystości odkształcalnego przez ciało doskonale sztywne). Dynamika newtonowska może być z powodzeniem stosowana w kinetycznej teorii gazów, w pewnej mierze również w mechanice nieba. Uchybienia w przewidywaniu zjawisk pojawiają się wtedy, gdy 1) prędkości względne nie są już małe w porównaniu do prędkości światła lub gdy 2) w rozważaniach wprowadza się masę skali atomowej.

Skoro w warunkach laboratoryjnych wysokie prędkości mogą być nadane tylko bardzo lekkim cząstkom, przeto w praktyce te oba warunki pokrywają się. Jednak możemy traktować je oddzielnie, albowiem warunek pierwszy oznacza granicę, powyżej której dynamika newtonowska powinna być zastąpiona przez dynamikę relatywistyczną, warunek zaś drugi oznacza, że poniżej pewnej granicy dynamika newtonowska powinna być zastąpiona przez dynamikę kwantową.

Jednakże wartość naukowa dynamiki klasycznej, w szczególności dynamiki newtonowskiej, nie ogranicza się do fizycznych przewidywań opartych bezpośrednio na jej podstawach. Dynamika newtonowska jest zbudowana ze zbioru matematycznych wywodów i wniosków otrzymanych w rezultacie podporządkowania pewnych prostych pojęć pewnym prostym prawom. W rozwoju matematycznym

tej dyscypliny zostały rozwinięte pewne ogólne schematy (w szczególności metody Lagrange'a i Hamiltona), które pozwalają na zmianę pierwotnych pojęć prymitywnych na bardziej ogólne (np. przestrzeń konfiguracji i przestrzeń fazowa). Okazało się, że te nowe pojęcia matematyczne można użyć do przedstawienia pojęć fizycznych w sposób odmienny od tego, jaki był źródłem pojęć matematycznych.

Zatem dynamika newtonowska zrodziła nowe podstawy fizyczne przez zastosowanie wewnątrz niej odpowiadających idei matematycznych poza granice ich pierwotnego zastosowania. Jako przykład można przytoczyć zastosowanie metod Lagrange'a w teorii obwodów elektrycznych bądź (co dziwniejsze na pozór) zastosowanie metod Hamiltona w rozwoju mechaniki kwantowej. W dalszych rozważaniach nad dynamiką należy zauważyć, że dynamika newtonowska stawia przed nami zadanie rozwiązania układu równań różniczkowych zwyczajnych, zatem z matematycznego punktu widzenia można przedmiot dynamiki newtonowskiej określić jako równania różniczkowe zwyczajne.

Metody Hamiltona wprowadzają równania różniczkowe o pochodnych cząstkowych pierwszego rzędu i przedmiot dynamiki Hamiltona można określić jako równania różniczkowe cząstkowe pierwszego rzędu. Przejście do teorii kwantów poprzez równanie Schrödingera stanowi przejście do równań cząstkowych rzędu drugiego.

Резюме

РОЛЬ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ В РАЗВИТИИ ТЕХНИЧЕСКОГО ПРОГРЕССА

Проводится анализ текущего состояния и перспектив развития теоретической механики в области технических применений. В общем виде обсуждена роль динамики нелинейных систем с сосредоточенными параметрами.

Работа имеет целью постановку и рассмотрение некоторых вопросов механики, имеющих значение с технической точки зрения.

Summary

THE ROLE OF THEORETICAL AND APPLIED MECHANICS IN THE TECHNOLOGICAL PROGRESS

The analysis of the present stage of development and the prospects for further progress of theoretical mechanics are discussed in the light of its application to technological systems. The role of the dynamics of nonlinear systems of concentrated parameters are treated in general. The object of the paper is to discuss some problems of mechanics important from the technological point of view.

ZAKŁAD BADAŃ DRGAŃ
INSTYTUTU PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 12 czerwca 1964 r.