

PODSTAWOWE ZAGADNIENIA LEPKOPLASTYCZNOŚCI

P. PERZYNA (WARSZAWA)

Wstęp

W wielu istniejących teoriach plastyczności zakłada się, że związki fizyczne między tensorem naprężenia a tensorem odkształcenia są niezależne od czasu. Założenie to jest celowo przyjętym ograniczeniem. Jest ono główną przyczyną trudności, jakie się wyłoniły przy opisywaniu własności materiałów rzeczywistych.

Trudności te wystąpiły zwłaszcza w ostatnich latach, które przyniosły duży rozwój dynamicznych zagadnień teorii plastyczności. Podstawowe założenie wszystkich teorii plastyczności o niezależności równań stanu od czasu uniemożliwia jednoczesny opis własności plastycznych materiału i jego własności reologicznych.

Nie trzeba chyba popierać przykładami twierdzenia, że w wielu zagadnieniach praktycznych o rzeczywistym zachowaniu się materiału mogą decydować w równym stopniu efekty plastyczne jak i efekty reologiczne. Można nawet pójść dalej i powiedzieć, że dla wielu konstrukcyjnie ważnych materiałów efekty reologiczne występują znacznie wyraźniej po osiągnięciu przez materiał stanu plastycznego.

Truizmem stało się twierdzenie, że każdy materiał wykazuje w mniejszym lub większym stopniu własności lepkie. Wpływ własności lepkich materiału w pewnych zagadnieniach może być całkowicie nieistotny, natomiast wpływ ten dla tego samego materiału ale dla innego zagadnienia może okazać się decydujący.

Obydwie dyscypliny — reologia i teoria plastyczności — zajmują się opisem bardzo ważnych własności mechanicznych materiałów konstrukcyjnych. Każda z nich stworzyła właściwe dla swych celów sposoby badań i rozwinęła się w ramach pewnych założeń, które niestety nie zawsze w praktyce mogą być spełnione. Wyniki badań reologii są ograniczone tylko do takich przypadków, w których odkształcenia plastyczne nie mają decydującego znaczenia. Natomiast wyniki badań teorii plastyczności pozwalają na właściwy opis tylko takich zagadnień, w których wpływ efektów reologicznych można uważać za nieistotny. Mówiąc inaczej, przy stosowaniu metod reologii należy ograniczyć się tylko do badania stanów naprężenia, które nie wywołują plastycznego płynięcia materiału, sto-

sując zaś metody teorii plastyczności trzeba się ograniczyć do zagadnień quasi-statycznych, których przebieg w czasie jest jednak na tyle krótki, aby nie wystąpiły wyraźnie efekty pełzania czy relaksacji.

Ostatnie badania w zakresie opisu dynamicznych własności materiałów wykazały, że stosowanie metod teorii plastyczności nie uwzględniających efektów reologicznych prowadzi do zbyt dużych rozbieżności między wynikami teoretycznymi a rezultatami doświadczalnymi¹.

Po tym krótkim wstępie nie trzeba będzie chyba wskazywać na korzyści, jakie uzyskamy opisując jednocześnie efekty reologiczne i plastyczne. Właśnie lepkoplastyczność postawiła sobie takie szerokie zadanie. Zanim przejdziemy do bliższego przedstawienia metod badań lepkoplastyczności, chcemy podkreślić, że nie będą to metody ani reologii, ani teorii plastyczności. Przekonamy się, że specyfika zagadnienia i skomplikowany charakter sprzężenia efektów reologicznych i plastycznych wymagają specjalnych metod opartych na wnikliwej analizie fizyki materiałów oraz własnych oryginalnych opisów matematycznych.

Łączne traktowanie zjawisk reologicznych i zjawisk plastycznych stwarza jednak ogromne trudności. Uwzględnienie lepkości materiału wprowadza zależność stanów naprężenia i odkształcenia od czasu, natomiast własności plastyczne materiału uzależniają te stany od drogi obciążenia. Uwzględniając jednocześnie własności lepkie i plastyczne otrzymujemy więc zależność od drogi i czasu. Wszystkie procesy odkształcania w lepkoplastyczności będą zależne od historii, która jest zdeterminowana drogą obciążenia i czasem. Na różnych drogach i dla różnych czasów przebiegu danego procesu otrzymywać będziemy w lepkoplastyczności różne rezultaty.

Celem tego przeglądu jest wskazanie nowych zagadnień, które charakteryzują się sprzężonym traktowaniem zjawisk reologicznych i plastycznych oraz przedstawienie głównych kierunków, w jakich rozwijają się metody badań lepkoplastyczności.

Nie można jeszcze w tej chwili mówić o teorii lepkoplastyczności jako o ukształtowanej i rozwiniętej dyscyplinie naukowej. Można już jednak wyodrębnić w niej pewne kierunki badań, które różnią się ogólnością podejścia do zagadnienia i stawiają sobie odmienne zadania.

Podstawowym problemem lepkoplastyczności jest określenie odpowiedniego kryterium uplastycznienia dla materiału sprężystolepkiego. Zagadnienie następne to sformułowanie równań konstytutywnych czyli związków fizykalnych między tensorem naprężenia a tensorem odkształcenia.

Aby przedstawić bliżej powyższe zagadnienia, wprowadzimy wyraźne rozróżnienie między materiałem sprężysto-lepkoplastycznym a sprężysto/lepko-

¹ Stwierdzenie to odnosi się zarówno do różnego rodzaju teorii płynięcia, jak i teorii odkształceniowych. Trzeba zaznaczyć, że nie brak prac, które starają się opisywać zagadnienia dynamiczne posługując się związkami fizykalnymi teorii odkształceniowej, słusznej tylko w przypadku obciążenia proporcjonalnego. W żadnym zagadnieniu dynamicznym, w którym występuje rozprzestrzenianie się fal naprężenia, założenie o proporcjonalnym obciążeniu nie może być spełnione.

plastycznym. *Sprężysto-lepkoplastycznym* będziemy nazywać taki materiał, który wykazuje wyraźne własności lepkie zarówno w obszarach sprężystych, jak również w obszarach uplastycznionych. Natomiast *sprężysto/lepkoplastycznym* będziemy nazywać taki materiał, który posiada własności lepkie tylko w obszarach plastycznych.

Rozróżnienie to wprowadzili P. M. NAGHDI i S. A. MURCH w pracy [18].

Jest oczywiste, że pojęcie materiału sprężysto/lepkoplastycznego jest celową idealizacją, która pozwala na daleko idące uproszczenie rozważań. Wystarczy tu zwrócić uwagę na zagadnienie doboru odpowiedniego kryterium uplastycznienia.

Określenie warunku plastyczności dla materiału sprężysto-lepkoplastycznego będzie niezmiernie trudne i do chwili obecnej problem ten nie został całkowicie rozwiązany. Przyjęcie materiału sprężysto/lepkoplastycznego rozwiązuje natychmiast to zagadnienie, bo początkowy warunek plastyczności można przyjąć taki sam jak w teorii płynięcia. Trudności powstają dopiero przy rozważaniu zmiany powierzchni płynięcia w czasie procesu odkształcenia ciała sprężysto/lepkoplastycznego.

Wprowadzone rozróżnienie sugeruje podział naszych rozważań na dwie części. W części pierwszej przedyskutujemy metody opisu zachowania się materiałów sprężysto-lepkoplastycznych. Część druga będzie dotyczyła materiałów sprężysto/lepkoplastycznych i pokaże wykorzystanie tego modelu do opisu dynamicznych własności materiałów plastycznych.

W obydwu częściach rozważania będą prowadzone przy założeniu, że gradienty przemieszczenia rozpatrywanych procesów odkształcenia są nieskończenie małe (por. definicja w monografii C. TRUESDELLA i R. TOUPINA [39]). Ograniczymy się ponadto do studiowania tylko izotermicznych procesów odkształcenia i będziemy zakładać, że materiał jest izotropowy i jednorodny.

I. MATERIAŁ SPRĘŻYSTO-LEPKOPLASTYCZNY

1. Zachowanie się materiału w obszarach sprężysto-lepkich

W układzie ortogonalnych współrzędnych kartezjańskich oznaczymy tensor odkształcenia przez ε_{ij} , a tensor naprężenia przez σ_{ij} . Będziemy zakładać, że tensor odkształcenia ε_{ij} dla ciała sprężysto-lepkoplastycznego można przedstawić w postaci sumy

$$(1.1) \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^v + \varepsilon_{ij}^p,$$

gdzie ε_{ij}^e oznaczają składowe odkształcenia sprężystego, ε_{ij}^v składowe lepkie i ε_{ij}^p składowe plastyczne.

Trzeba wyraźnie podkreślić, że równanie (1.1) nie jest w ogólności spełnione. Będziemy je traktowali jako podstawowe założenie upraszczające.

W dalszym ciągu będziemy posługiwać się zdefiniowanymi następująco dewiatorami odkształcenia i naprężenia

$$(1.2) \quad e_{ij} = \varepsilon_{ij} - e\delta_{ij}, \quad e = \frac{1}{3}\varepsilon_{ii},$$

$$(1.3) \quad s_{ij} = \sigma_{ij} - s\delta_{ij}, \quad s = \frac{1}{3}\sigma_{ii},$$

gdzie δ_{ij} oznacza symbol Kroneckera.

Składowe tensora prędkości zmiany odkształcenia i naprężenia oznaczymy odpowiednio przez $\dot{\varepsilon}_{ij}$ i $\dot{\sigma}_{ij}$ (kropka oznacza tu różniczkowanie względem czasu).

Zagadnienia liniowej teorii lepkosprężystości są szeroko opracowane w wielu monografiach i artykułach przeglądowych. Wymienimy tu tylko kilka ostatnich prac podstawowych, które przynoszą systematyczną analizę związków fizykalnych między tensorem naprężenia i tensorem odkształcenia dla ciał sprężystolepkich w ramach założeń teorii liniowej. Są to prace D. R. BLANDA [3], B. D. COLEMANA i W. NOLLA [6] oraz M. E. GURTINA i E. STERNBERGA [9]. Tam też można znaleźć obszerną literaturę dotyczącą tych zagadnień.

Przyjmując oznaczenia z pracy [9] związki fizykalne między tensorem odkształcenia i tensorem naprężenia w obszarach sprężystolepkich można zapisać w postaci

$$(1.4) \quad e_{ij}^{(e+v)} = \dot{s}_{ij}(x)\mathcal{F}_1(t) + \int_0^t \mathcal{F}_1(t-\tau) \frac{\partial s_{ij}(x, \tau)}{\partial \tau} d\tau,$$

$$(1.5) \quad e^{(e+v)} = \dot{s}^o(x)\mathcal{F}_2(t) + \int_0^t \mathcal{F}_2(t-\tau) \frac{\partial s(x, \tau)}{\partial \tau} d\tau,$$

gdzie \mathcal{F}_1 i \mathcal{F}_2 oznaczają odpowiednio postaciową i dylatacyjną funkcję pełzania. Wprowadzono tu ponadto oznaczenie $s_{ij}(x, t)$ zamiast $s_{ij}(x_k, t)$ oraz $\dot{s}_{ij}(x)$ zamiast $\dot{s}_{ij}(x_k, 0+)$.

Równania fizykalne (1.4)-(1.5), uzależniają aktualny stan odkształcenia w chwili t od historii zmiany stanu naprężenia w całym okresie przebiegu danego zjawiska, od 0 do t .

Autorzy pracy [9] wykazali, że początkowym stanem ciała sprężystolepkiego, określonego związkami fizykalnymi (1.4)-(1.5) jest stan sprężysty odpowiadający uogólnionemu prawu Hooke'a:

$$(1.6) \quad e_{ij}^e = \frac{1}{2\mu} s_{ij}, \quad e^e = \frac{1}{3K} s,$$

gdzie μ i K oznaczają odpowiednie stałe sprężyste materiału, tj. moduł odkształcenia postaciowego i objętościowy.

Wykorzystując to spostrzeżenie możemy w prosty sposób wydzielić lepkie składowe odkształcenia. Na podstawie związków (1.4)-(1.5) otrzymamy (por. P. M. NAGHDI i S. A. MURCH, [18]),

$$(1.7) \quad e_{ij}^v = \left\{ \dot{s}_{ij}(x) \mathcal{F}_1(t) + \int_0^t \mathcal{F}_1(t-\tau) \frac{\partial s_{ij}(x, \tau)}{\partial \tau} d\tau \right\} -$$

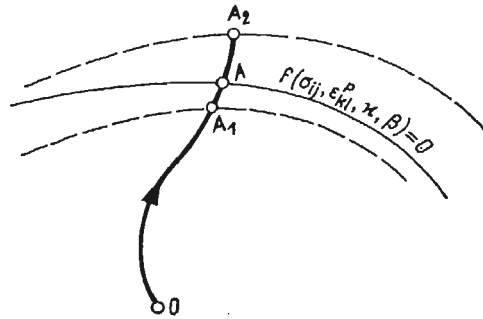
$$- \left\{ \dot{\mathcal{F}}_1 \left[\dot{s}_{ij}(x) + \int_0^t \frac{\partial s_{ij}(x, \tau)}{\partial \tau} d\tau \right] \right\} = \dot{s}_{ij}(x) [\mathcal{F}_1(t) - \dot{\mathcal{F}}_1] + \int_0^t [\mathcal{F}_1(t-\tau) - \dot{\mathcal{F}}_1] \frac{\partial s_{ij}(x, \tau)}{\partial \tau} d\tau,$$

$$(1.8) \quad e^v = \dot{s}(x) [\mathcal{F}_2(t) - \dot{\mathcal{F}}_2] + \int_0^t \mathcal{F}_2(t-\tau) - \dot{\mathcal{F}}_2 \frac{\partial s(x, \tau)}{\partial \tau} d\tau.$$

2. Kryterium uplastycznienia dla materiału sprężysto-lepkoplastycznego

W celu wyjaśnienia różnic między zagadnieniem uplastycznienia materiału sprężystego i sprężystolepkiego rozważmy drogę obciążenia w dziewięciowymiarowej przestrzeni naprężeń (rys. 1).

Jeżeli rozważamy materiał sprężysty, to niezależnie od czasu, w jakim osiągamy stan reprezentowany punktem A, przy tej samej drodze zawsze otrzymamy stan uplastycznienia w tym samym punkcie. Natomiast gdy rozważamy materiał sprężystolepki, to idąc po tej samej drodze obciążenia możemy uzyskać uplastycznienie w innym punkcie np. A_1 lub A_2 na rys. 1 w zależności od czasu, w jakim realizowała się droga obciążenia OA. Zmiana ta wywołana jest lepkością materiału, zależnością historii obciążenia od czasu. Jest oczywiste, że przebiegając drogę OA w tym samym czasie sumarycznym, ale z różnymi prędkościami odkształcenia w odpowiednich punktach drogi uzyskamy również inne granice plastyczności.



Rys. 1

P. M. NAGHDI i S. A. MURCH [18] w celu opisania skomplikowanego zagadnienia uplastycznienia materiału sprężystolepkiego wprowadzili pojęcie powierzchni płynięcia:

$$(2.1) \quad f = f(\sigma_{ij}, \epsilon_{ij}^p, \kappa, \beta),$$

takie, że stan sprężysto-lepkoplastyczny określony jest warunkiem $f = 0$, a stanem sprężystolepkim odpowiada warunek $f < 0$. Funkcja f zależy od stanu naprężenia σ_{ij} , od stanu odkształcenia plastycznego ϵ_{ij}^p , od parametru $\beta = \beta(\epsilon_{kl}^v)$ reprezentującego efekty lepkie i od parametru wzmocnienia κ , który zależy z kolei od odkształceń plastycznych i jest zdefiniowany podobnie jak w teorii plastycznego płynięcia, opisującej izotropowe wzmocnienie materiału (por. P. M. NAGHDI [17]).

Rozważmy zmianę powierzchni płynięcia w czasie. Obliczając pochodną względem czasu funkcji f otrzymamy

$$(2.2) \quad \dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} + \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{ij}^p} \dot{\varepsilon}_{ij}^p + \frac{\partial f}{\partial \kappa} \dot{\kappa} + \frac{\partial f}{\partial \beta} \dot{\beta}.$$

Jeżeli rozpatrywany stan jest stanem sprężysto-lepkoplastycznym i ulega zmianie takiej, że $\dot{f} < 0$, to zmiana taka prowadzi do stanu sprężystolepkiego, ponieważ $f + \dot{f}dt$ daje nową wartość funkcji f mniejszą od zera. Taką zmianę stanu naprężenia będziemy nazywać *procesem odciażania*. W czasie takiego procesu nie ma przyrostów odkształcenia plastycznego, a więc $\dot{\varepsilon}_{ij}^p = 0$, a to pociąga za sobą równość $\dot{\kappa} = 0$, gdyż nie może być zmiany parametru wzmocnienia, jeżeli $\dot{\varepsilon}_{ij}^p = 0$.

Ponieważ $\dot{\beta}$ może być wyrażone za pomocą związków fizykalnych (1.7)-(1.8) jako funkcja prędkości zmiany naprężenia $\dot{\sigma}_{ij}$, przeto można wprowadzić następujący operator

$$(2.3) \quad \mathcal{L}(\dot{\sigma}_{ij}) = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} + \frac{\partial f}{\partial \beta} \dot{\beta}.$$

Możemy obecnie zapisać matematyczny warunek dla *procesu odciażania* w postaci

$$(2.4) \quad f = 0, \quad \mathcal{L}(\dot{\sigma}_{ij}) < 0.$$

Zmianę stanu naprężenia od pewnego stanu sprężysto-lepkoplastycznego do innego stanu sprężysto-lepkoplastycznego, której nie towarzyszą żadne przyrosty odkształcenia plastycznego, będziemy nazywać *procesem neutralnym*. Stan neutralny będzie się realizował, jeżeli

$$(2.5) \quad f = 0, \quad \mathcal{L}(\dot{\sigma}_{ij}) = 0.$$

Aktywny *proces obciążania*, któremu towarzyszy przyrost odkształceń plastycznych, występuje, jeżeli

$$(2.6) \quad f = 0, \quad \mathcal{L}(\dot{\sigma}_{ij}) > 0.$$

Rozpatrując powierzchnię płynięcia w dziewięciowymiarowej przestrzeni naprężeń zauważymy łatwo, że neutralny proces nie odpowiada kierunkowi przyrostu naprężenia $\dot{\sigma}_{ij}dt$ stycznym do powierzchni płynięcia w rozpatrywanym punkcie, co miało miejsce w teorii płynięcia.

Stan neutralny będzie się obecnie realizował, jeżeli wektor przyrostu naprężenia $\dot{\sigma}_{ij}dt$ będzie odchylony od kierunku normalnego do powierzchni płynięcia o kąt ϑ , który określa równanie

$$(2.7) \quad \vartheta = \arccos \frac{-\frac{\partial f}{\partial \beta} \dot{\beta}}{\left| \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \right| |\dot{\sigma}_{ij}|}.$$

Wyrażenie (2.7) wskazuje na przyczynę zmiany kryteriów obciążania dla lepkoplastyczności w porównaniu z kryteriami klasycznej teorii plastyczności. Przyczyną tą jest wpływ lepkości materiału na warunek plastyczności.

Znane jest również zjawisko wpływu prędkości odkształcenia na warunek plastyczności. Będzie ono szczegółowo wyjaśnione w drugiej części pracy.

M. REINER [34] przedyskutował osiągnięcie stanu plastycznego przy stałym obciążeniu, a więc zbadał możliwości uplastycznienia się materiału w procesie pełzania.

Oryginalną koncepcję zbadania kryteriów uplastycznienia lub ogólniej kryteriów osiągnięcia stanu krytycznego zaproponowali W. OLSZAK i Z. BYCHAWSKI w pracach [21], [22]. Podstawą tej koncepcji jest spostrzeżenie, że o zniszczeniu niektórych ciał sprężystolepkich decyduje nie tylko energia sprężysta, ale również prędkość zmiany energii dysypacji.

Zanalizowano przykłady modeli, które ulegają zniszczeniu, kiedy prędkość zmiany energii dysypacji osiąga pewną określoną wartość. Dla takich modeli decydujący jest wpływ prędkości odkształcenia.

Dla przeprowadzenia analizy dość szerokiej klasy ciał rzeczywistych autorzy pracy [22] zaproponowali następujący warunek osiągnięcia stanu krytycznego²

$$(2.8) \quad W_E + W_D = k^2 \quad \text{lub} \quad (\omega_E + \omega_D)W = k^2,$$

jeżeli

$$(2.9) \quad \omega_E W = W_E, \quad \omega_D W = W_D,$$

gdzie W_E jest zredukowaną energią sprężystą odkształcenia czysto postaciowego, a W_D prędkością zmiany energii dysypacji, ale wyrażoną w wymiarze energii. Wielkości ω_E , ω_D i k są pewnymi stałymi właściwymi dla rozważanego materiału.

W pracy [22] rozważono kilka przypadków modeli i zanalizowano dla nich szczegółowo postać kryterium (2.8).

3. Definicja materiału statecznego

Wydaje się, że najogólniejszym podejściem do zagadnienia opisu własności ciał sprężysto-lepkoplastycznych jest koncepcja D. C. DRUCKERA przedstawiona w pracy [7].

D. C. DRUCKER wykorzystał pewne spostrzeżenia z teorii plastyczności. Wskazał on na to, że chcąc dać jednolity i jednoznaczny opis własności lepkich i plastycznych trzeba wprowadzić pewne podstawowe postulaty, które są celowo przyjętymi ograniczeniami.

Okazuje się, że wprowadzając postulat o *materiale statecznym* można otrzymać podstawowe warunki, których spełnienie pozwala na logiczne wyprowa-

² Należy jednak zaznaczyć, że pojęcie osiągnięcia stanu krytycznego jest w pracy [22] rozumiane ogólniej niż osiągnięcie stanu plastycznego. Stan plastyczny może być jednym z przypadków szczególnych stanu krytycznego.

dzenie związków fizykalnych. Warunki te ograniczają rozważania do pewnej klasy materiałów, ale jednocześnie umożliwiają konsekwentny opis matematyczny klasy wybranej.

Rozważmy ciało o objętości V ograniczone regularną powierzchnią S , poddane działaniu sił powierzchniowych T_i i sił masowych P_i , które są funkcjami czasu. Wywołane tymi warunkami brzegowymi stany przemieszczenia u_i , odkształcenia ε_{ij} i naprężenia σ_{ij} , są również funkcjami czasu.

Przyjmijmy, że warunki brzegowe ulegają pewnym wariacjom i są określone siłami powierzchniowymi $T_i + \Delta T_i$ i siłami masowymi $P_i + \Delta P_i$, którym odpowiadają: stan przemieszczenia $u_i + \Delta u_i$, stan odkształcenia $\varepsilon_{ij} + \Delta \varepsilon_{ij}$ i stan naprężenia $\sigma_{ij} + \Delta \sigma_{ij}$.

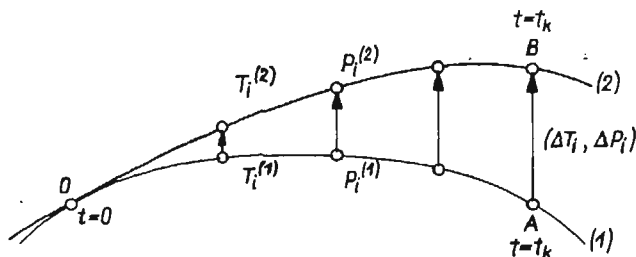
Podstawową definicję *statecznego materiału* niesprężystego (sprężysto-lepkoplastycznego) można wyrazić jako następujący postulat Druckera:

Praca wykonana przez przyrost sił zewnętrznych na odpowiednich przyrostach składowych wektora przemieszczenia musi być nieujemna.

Definicję tę można przedstawić w następującej postaci matematycznej:

$$(3.1) \quad \int_{t=0}^{t_k} \left\{ \int_S \Delta T_i \Delta \dot{u}_i dS + \int_V \Delta P_i \Delta \dot{u}_i dV \right\} dt \geq 0,$$

jeżeli $t = 0$ oznacza chwilę przyłożenia przyrostów sił zewnętrznych.



Rys. 2

Często wygodniej jest wprowadzić dwie różne drogi obciążenia $T_i^{(1)}$, $P_i^{(1)}$ i $T_i^{(2)}$, $P_i^{(2)}$, które zaczynają się różnić od chwili $t = 0$ (rys. 2). Wtedy definicję (3.1) zapisać można w postaci:

$$(3.2) \quad \int_{t=0}^{t_k} \left\{ \int_S [T_i^{(2)} - T_i^{(1)}] [\dot{u}_i^{(2)} - \dot{u}_i^{(1)}] dS + \int_V [P_i^{(2)} - P_i^{(1)}] [\dot{u}_i^{(2)} - \dot{u}_i^{(1)}] dV \right\} dt \geq 0.$$

Jeżeli w wyrażeniach (3.1) i (3.2) czas t_k nie jest ograniczony żadnym dodatkowym warunkiem i może być założony dowolnie wielki, wtedy mówimy o «stateczności w dużym», natomiast ograniczając czas t_k do bardzo bliskiego sąsiedztwa chwili $t = 0$ otrzymujemy matematyczną postać wyrażającą «stateczność w małym».

Wykorzystując zasadę prac przygotowanych można siły powierzchniowe, siły objętościowe i prędkość zastąpić naprężeniami i prędkościami odkształcenia.

Zasada prac przygotowanych stwierdza, że dla dowolnych ciągłych prędkości \dot{u}_i zachodzi równość

$$(3.3) \quad \int_S T_i \dot{u}_i dS + \int_V P_i \dot{u}_i dV = \int_V \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} dV,$$

gdzie T_i , P_i , σ_{ij} reprezentują układ wielkości statycznych będących w równowadze, a \dot{u}_i , $\dot{\epsilon}_{ij}$ są zgodnym układem kinematycznym. Należy podkreślić, że układy wielkości statycznych i kinematycznych nie są z sobą związane.

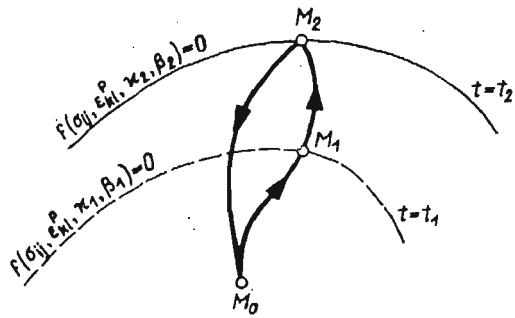
Zakładając, że rozpatrujemy tylko jednorodny stan naprężenia i odkształcenia i wykorzystując zasadę prac przygotowanych (3.3), na podstawie (3.2) otrzymamy warunek

$$(3.4) \quad \int_0^{t_k} [\sigma_{ij}^{(2)} - \sigma_{ij}^{(1)}][\dot{\epsilon}_{ij}^{(2)} - \dot{\epsilon}_{ij}^{(1)}] dt \geq 0.$$

4. Wypukłość powierzchni płynięcia

W celu wykazania, że w teorii ciał sprężysto-lepkoplastycznych przyjmować należy wypukłą powierzchnię płynięcia, wykorzystujemy warunek (3.4) wynikający z postulatu Druckera.

Załóżmy, że stan $\sigma_{ij}^{(1)}$ jest identyczny ze stanem stacjonarnym σ_{ij}^* w chwili $t = 0$, a stan $\sigma_{ij}^{(2)}$ będzie stanem zmiennym w czasie i stan ten oznaczmy przez σ_{ij} . Zanalizujemy następujący zamknięty cykl obciążenia. W chwili $t = 0$ aktualny stan obciążenia σ_{ij} pokrywa się ze stanem stacjonarnym σ_{ij}^* , następnie stan bieżący σ_{ij} zmienia się wzdłuż drogi M_0M_1 (rys. 3) osiągając w chwili $t = t_1$ punkt M_1 odpowiadający stanowi uplastycznionemu. Na drodze M_1M_2 istnieją przyrosty odkształcenia plastycznego. Stan M_2 osiągnięty zostaje w chwili $t = t_2$. Poczynając od chwili t_2 następuje odciążanie wzdłuż drogi M_2M_0 . W chwili $t = t_k$ stan aktualny pokrywa się ze stanem początkowym i wtedy $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^*$.



Rys. 3

Warunek (3.4) dla zamkniętego cyklu $M_0M_1M_2M_0$ w czasie $0 \leq t \leq t_k$ daje

$$(4.1) \quad \int_0^{t_k} [\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*][\dot{\epsilon} - \dot{\epsilon}_{ij}^*] dt \geq 0,$$

gdzie $\dot{\epsilon}_{ij}$ i $\dot{\epsilon}_{ij}^*$ zastępują odpowiednio $\dot{\epsilon}_{ij}^{(2)}$ i $\dot{\epsilon}_{ij}^{(1)}$.

Uwzględniając, że $\dot{\varepsilon}_{ij}^{p*} = 0$ oraz że $\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^{(e+v)} + \dot{\varepsilon}_{ij}^p$, wyrażenie (4.1) można zapisać w postaci (por. P. M. NAGHDI i S. A. MURCH [18]):

$$(4.2) \quad \int_{t_1}^{t_2} [\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*] \dot{\varepsilon}_{ij}^p dt + \{Y[\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^{(e+v)}]\}_0^{t_2} \geq 0,$$

gdzie

$$(4.3) \quad \{Y\}_0^{t_k} = \int_0^{t_k} (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*) (\dot{\varepsilon}_{ij}^{(e+v)} - \dot{\varepsilon}_{ij}^{(e+v)*}) dt.$$

Rozwijając pierwszy składnik wyrażenia (4.2) w szereg Taylora w punkcie $t = t_1$ i zachowując tylko pierwszy wyraz, otrzymamy

$$(4.4) \quad [(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*) \dot{\varepsilon}_{ij}^p]_{t=t_1} \Delta t + \{Y\}_0^{t_k} \geq 0.$$

Jeżeli założymy, że $\Delta t = t_2 - t_1$ jest dostatecznie małe (ograniczamy się bowiem do żądania «stateczności w małym»), wtedy nierówność (4.4) wystarcza do spełnienia nierówności (4.2).

Aby przeprowadzić pełną dyskusję zagadnienia dotyczącego wypukłości powierzchni płynięcia, wprowadzimy zgodnie z pracą P. M. NAGHDI'EGO i S. A. MURCHA [18] pojęcie *szybkiej drogi obciążenia* i *chwilowej powierzchni płynięcia*.

Szybką drogą obciążenia w dziewięciowymiarowej przestrzeni naprężeń będziemy nazywać taki przebieg skończonej zmiany stanu naprężenia, który realizuje się w czasie nieskończenie krótkim i podczas którego parametr $\beta(\varepsilon_{kl}^v)$ pozostaje niezmienny

$$(4.5) \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta \beta(\varepsilon_{kl}^v) = 0.$$

Dla szybkiej drogi obciążenia zachowanie się powierzchni płynięcia jest dokładnie takie samo jak w klasycznej teorii płynięcia dla zwykłej drogi.

Chwilową powierzchnię płynięcia zdefiniujemy następująco. Załóżmy, że w danym czasie $t_a \geq 0$ mamy stan, który charakteryzują zmienne $\sigma_{ij}^{(a)}$, $\varepsilon_{ij}^{p(a)}$, $\varkappa^{(a)}$, $\beta^{(a)}$, taki że ciało jest sprężystolepkie

$$(4.6) \quad f(\sigma_{ij}^{(a)}, \varepsilon_{kl}^{p(a)}, \beta^{(a)}, \varkappa^{(a)}) < 0.$$

Równanie

$$(4.7) \quad f(\sigma_{ij}, \varepsilon_{kl}^{p(a)}, \beta^{(a)}, \varkappa^{(a)}) = 0$$

będziemy nazywać chwilową powierzchnią płynięcia odpowiadającą stanowi, który reprezentowany jest w przestrzeni naprężenia punktem A (rys. 4). Trzeba zaznaczyć, że stan A zależy nie tylko od składowych tensora naprężenia, ale określony jest również wielkościami $(\varepsilon_{ij}^{p(a)}, \beta^{(a)}, \varkappa^{(a)})$, które opisują historię obciążenia charakteryzującą się drogą obciążenia, wzdłuż której była realizowana zmiana aktualnego stanu, oraz czasem, w którym punkt A został osiągnięty.

Założmy, że realizowane jest obciążanie w czasie $t > t_a$ i od chwili $t_1 > t_a$ towarzyszy mu przyrost odkształcenia plastycznego $\dot{\epsilon}_{ij}^p dt$, następnie rozpoczyna się odciążanie i w chwili $t = t_k$ stan naprężenia wraca do stanu wyjściowego $\sigma_{ij}^{(a)}$. Zastosowanie nierówności (4.4) do zamkniętego cyklu obciążenia w czasie $t_a \leq t \leq t_k$ prowadzi do nierówności

$$(4.8) \quad [\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{(a)}] \dot{\epsilon}_{ij}^p + \frac{1}{\Delta t} \{\Psi\}_{t_a}^{t_k} \geq 0.$$

Dla dowolnego szybkiego cyklu obciążenia na podstawie (4.5) powierzchnia płynięcia jest identyczna z chwilową powierzchnią płynięcia

$$(4.9) \quad \lim_{(t_1 - t_a) \rightarrow 0} f(\sigma_{ij}, \epsilon_{kl}^{p(a)}, \beta^{(a)}, \kappa^{(a)}) = f_a.$$

Jeżeli przyjmiemy, że wielkość $\{\Psi\}_{t_a}^{t_k}$ jest funkcją ciągłą w punkcie $t = t_a$, wtedy wprowadzając oznaczenie

$$(4.10) \quad \{\Psi\}_{t_a}^{t_k} = \int_{t_a}^{t_k} \psi(\dot{\epsilon}_{ij}^p) dt$$

można łatwo wykazać, że w przypadku granicznym $t_k \rightarrow t_a$, $\Delta t \rightarrow 0$, $\Delta\beta \rightarrow 0$ mamy

$$(4.11) \quad \lim_{t_k \rightarrow t_a} \frac{\{\Psi\}_{t_a}^{t_k}}{\Delta t} = \psi(t_a) = 0.$$

Stąd wnioskujemy, że nierówność (4.8) dla szybkich dróg obciążenia można przyjąć w takiej samej postaci jak w klasycznej teorii płynięcia. W szczególności jeżeli przyjmiemy t_a równe zeru i $\sigma_{ij}^{(a)}$ potraktujemy jako dowolny punkt w obszarze sprężystolepkim identyczny z σ_{ij}^* , wtedy mamy

$$(4.12) \quad (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*) \dot{\epsilon}_{ij}^p \geq 0.$$

Dla szybkich dróg obciążenia kierunek $\dot{\epsilon}_{ij}^p$ jest ustalony i niezależny od czasu.

Rozważając wszystkie możliwe szybkie drogi obciążenia od dowolnego punktu σ_{ij}^* w obszarze sprężystolepkim do punktu σ_{ij} na chwilowej powierzchni płynięcia $f_a = 0$, można w oparciu o nierówności (4.12) udowodnić wypukłość chwilowej powierzchni płynięcia.

Kierunek $\dot{\epsilon}_{ij}^p$ dla wszystkich szybkich dróg obciążenia jest ortogonalny do chwilowej powierzchni płynięcia.

Ponieważ powyższe uzasadnienie wypukłości chwilowej powierzchni płynięcia jest słuszne dla każdego punktu i dla każdej drogi w przestrzeni naprężeń, to wynika stąd wniosek, że powierzchnia płynięcia $f = 0$ musi być również wypukła. Prowadzi to z kolei do wniosku, że wypukłość powierzchni płynięcia nie jest zależna ani od drogi, ani od czasu.

Podobnej konkluzji nie można wypowiedzieć odnośnie ortogonalności wektora $\dot{\epsilon}_{ij}^p$. Wektor $\dot{\epsilon}_{ij}^p$ jest ortogonalny do powierzchni płynięcia tylko dla szyb-

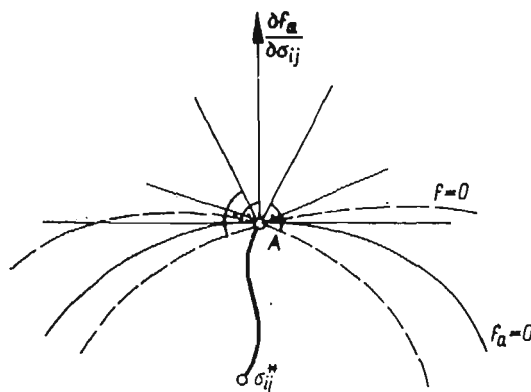
kich dróg obciążenia. Dla rzeczywistych dróg obciążenia kierunek wektora $\dot{\epsilon}_{ij}^p$ pozostaje kwestią dyskusyjną.

5. Kierunek wektora prędkości odkształcenia plastycznego

Rozważmy obecnie drogę obciążenia w przestrzeni naprężeń. Załóżmy, że punkt reprezentujący aktualny stan naprężenia porusza się po tej samej drodze z różnymi prędkościami. Czasy całego procesu obciążenia wzdłuż tej samej drogi będą różne, co powoduje również inne efekty reologiczne. Badając zagadnienie osiągnięcia stanu plastycznego zauważymy, że będzie się on realizował w różnych punktach drogi i będzie określony różnymi powierzchniami płynięcia. W wyniku różnych efektów reologicznych na tej samej drodze obciążenia otrzymujemy pewną rodzinę powierzchni płynięcia zależną od parametru β .

W celu uproszczenia rozważań założmy, że wszystkie powierzchnie płynięcia rozważanej rodziny przechodzą przez ten sam punkt, np. punkt A na rys. 4. Wtedy łatwo zauważymy, że rzeczywisty kierunek wektora prędkości odkształcenia plastycznego może być odchylony od kierunku normalnego do chwilowej powierzchni płynięcia i zawiera się w stożku, którego rozwartość zależna jest od wielkości $\{\Psi\}_0^{t,k}$.

Wykorzystując nierówność (4.4) do rozważanego obecnie przypadku z rys. 4 i zakładając, że dla $t = 0$ zachodzi równość $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^*$ wnioskujemy, że maksymalny kąt rozwarcia stożka jest funkcją $\{\Psi\}_0^{t,k}$.



Rys. 4

Wpływ efektów reologicznych na zmianę powierzchni płynięcia prowadzi do pewnej nieoznaczoności. Położenie aktualnej powierzchni płynięcia w przestrzeni naprężeń nie jest bowiem znane i nie wiadomo, w którym punkcie drogi obciążenia nastąpi uplastycznienie. Kierunek hiperpłaszczyzny stycznej do aktualnej powierzchni płynięcia w rozważanym punkcie nie jest ściśle określony.

Pełną dyskusję tych kwestii przyniosła praca P. N. NAGHDI'EGO i S. A. MURCHA [18].

Autorzy pracy [18] zwrócili również uwagę na pewne wnioski dotyczące teorii plastyczności nie uwzględniającej efektów reologicznych, ale dopuszczającej istnienie nieregularnych powierzchni płynięcia. W takiej teorii wektor prędkości odkształcenia plastycznego $\dot{\epsilon}_{ij}^p$ leży wewnątrz wachlarza utworzonego przez normalne do gładkich powierzchni tworzących «naroże plastyczne». Eksperymentator, który zauważy, że badany wektor przyrostu odkształcenia plastycznego ma różny kierunek od kierunku normalnego do oczekiwanej powierzchni płynięcia lub że kierunek ten zmienia się w pewnych granicach, wyprowadzi w oparciu o klasyczną teorię plastyczności wniosek, że w rozważanym punkcie istnieje tzw. «naroże plastyczne», podczas gdy w świetle teorii lepkoplastyczności powierzchnia płynięcia jest regularna.

6. Związki fizyczne między tensorem naprężenia i tensorem odkształcenia

Zakładając, że wektor prędkości odkształcenia plastycznego $\dot{\epsilon}_{ij}^p$ jest skierowany wzdłuż normalnej zewnętrznej do chwilowej powierzchni płynięcia $f = 0$, P. M. NAGHDI i S. A. MURCH [18] zaproponowali następujący związek:

$$(6.1) \quad \dot{\epsilon}_{ij}^p = A \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}.$$

Określając A z warunku $\dot{f} = 0$ otrzymamy

$$(6.2) \quad A = - \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} \dot{\sigma}_{kl} + \frac{\partial f}{\partial \beta} \dot{\beta}}{\frac{\partial f}{\partial \epsilon_{mn}^p} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} + \frac{\partial f}{\partial x} \bar{\kappa} \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}} \right)}.$$

Wprowadzając oznaczenie

$$(6.3) \quad h = - \frac{1}{\frac{\partial f}{\partial \epsilon_{mn}^p} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} + \frac{\partial f}{\partial x} \bar{\kappa} \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}} \right)}$$

i biorąc pod uwagę kryteria dla obciążania dostajemy

$$(6.4) \quad \dot{\epsilon}_{ij}^p = \begin{cases} 0, & \text{jeżeli } f < 0, \\ h \langle \mathcal{L}(\dot{\sigma}_{ij}) \rangle \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}, & \text{jeżeli } f = 0, \end{cases}$$

przy czym symbol $\langle x \rangle$ jest zdefiniowany następująco:

$$(6.5) \quad \langle x \rangle = \begin{cases} 0, & \text{jeżeli } x \leq 0, \\ x, & \text{jeżeli } x > 0. \end{cases}$$

W wyprowadzonych związkach (6.4) nie uwzględniono trudności wynikających z nieokreśloności kierunku wektora $\dot{\epsilon}_{ij}^p$ do aktualnej powierzchni płynię-

cia w czasie procesu odkształcenia. Przyczyną tej nieoznaczoności jest wpływ efektów reologicznych na postać powierzchni płynięcia.

Efekty te można uwzględnić wprowadzając następującą zależność (por. P. M. NAGHDI i S. A. MURCH, [18]):

$$(6.6) \quad \dot{\epsilon}_{ij}^p = \left[L \frac{\partial f_0}{\partial \sigma_{ij}} + M \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \right] \langle \mathcal{L}(\dot{\sigma}_{kl}) \rangle,$$

w której funkcja f_0 jest powierzchnią płynięcia, opisującą tylko izotropową zmianę warunku plastyczności, a druga funkcja g określa taką zmianę kierunku wektora $\dot{\epsilon}_{ij}^p$, jaka jest dopuszczalna i która wynika z poprzednio diskutowanych przyczyn. Wielkości L i M są skalarnymi funkcjami zależnymi od $\{\Psi\}_{i_a}^4$.

7. Dyskusja i wnioski

Kończąc opis metod pierwszego kierunku chcemy zwrócić uwagę na kilka podstawowych zagadnień, wykazać jego zalety i wady oraz zanalizować nie rozwiązane do tej pory problemy.

Trzeba zaznaczyć, że metody opisujące zachowanie się ciał sprężysto-lepkoplastycznych nie stanowią jeszcze narzędzia, za pomocą którego można rozwiązywać praktycznie ważne problemy brzegowe. Kierunek ten postawił sobie bardzo ogólne zadanie, wymagające jeszcze wielu badań i prac. Wiele kwestii pozostało nie wyjaśnionych, niektóre są tylko zasygnalizowane.

Zaletą tego kierunku jest jego głęboka wartość poznawcza, wskazanie na podstawowe trudności i stworzenie ogólnie chyba słusznej i konsekwentnej drogi postępowania. Jego niezaprzeczalnym sukcesem jest zbudowanie ogólnych podstaw szeroko rozumianych zagadnień lepkoplastyczności.

Śledząc rozwój podstaw tego kierunku widzimy wyraźnie, ile problemów pozostało jeszcze do rozwiązania.

Jako zagadnienie podstawowe należy wymienić przede wszystkim szczegółową dyskusję i zbadanie kryterium uplastycznienia ciał sprężystolepkich, sprecyzowanie postaci funkcji reprezentującej warunek plastyczności i pokazanie jej zależności od efektów reologicznych. Z tym zagadnieniem wiąże się kwestia zmiany powierzchni płynięcia w zależności od różnych czasów trwania drogi obciążenia. Rozwiązanie tego zagadnienia usunie nieoznaczoność, o której poprzednio była mowa. Pełne wyjaśnienie i dyskusja kwestii ortogonalności wektora przyrostu odkształcenia plastycznego, zbadanie charakteru równań stanu dla bardziej konkretnych przykładów materiałów rzeczywistych — oto dalsze zagadnienia.

Do zagadnień podstawowych zaliczyć trzeba również dyskusję słuszności podstawowej hipotezy, którą wyraża związek (1.1).

Można tu również wymienić problemy, które pozwolą na rozszerzenie słuszności rozważań i wyników już uzyskanych.

Pierwszym z nich będzie uogólnienie lub zbadanie na nowo tych samych problemów przy założeniu odkształceń skończonych i rozszerzenie rozważań na procesy nieizotermiczne.

Do tej pory nie ma pełnego opracowania podstawowych zagadnień dotyczących termodynamiki odkształceń sprężysto-lepkoplastycznych. Wydaje się, że jest to kwestia również podstawowa, gdyż jej rozstrzygnięcie pozwoli oprzeć wszystkie rozważania natury fenomenologicznej na bardziej ścisłych podstawach fizykalnych.

Pozostaje też otwarta kwestia jednoznaczności rozwiązania podstawowego problemu brzegowego lepkoplastyczności.

Nie opracowano również do tej pory twierdzeń wariacyjnych, które pozwoliłyby na konsekwentne stosowanie metod przybliżonych.

II. MATERIAŁ SPRĘŻYSTO/LEPKOPLASTYCZNY

I. Podstawowe założenia

Badania tego kierunku były zapoczątkowane wcześniej niż badania kierunku poprzedniego. Ogólne podstawy rozwoju zagadnień lepkoplastycznych w ramach tego kierunku dała praca K. HOHENEMSERA i W. PRAGERA [11] w roku 1932 (patrz również W. PRAGER [31, 32]).

Nie od razu jednak praca ta spotkała się z pełnym zrozumieniem. Wydaje się, że długo była niedoceniana. Zainteresowano się nią dopiero w latach 1948-1950, kiedy to W. W. SOKOŁOWSKI [36, 38] a następnie L. E. MALVERN [16] wykazali, że w oparciu o założenie K. Hohenemsera i W. Pragera można opisać pewne własności dynamiczne materiałów wrażliwych na prędkość odkształcenia. Dotyczyło to jednak tylko problemów jednowymiarowych.

Szersze rozwinięcie idei K. Hohenemsera i W. Pragera przyniosły prace [26, 27, 29].

Dzięki przyjęciu założenia, że materiał posiada cechy lepkie dopiero po uplastycznieniu, a w obszarach sprężystych cechy te są nieistotne, podstawowe koncepcje opisu własności lepkoplastycznych różnią się od metod kierunku poprzedniego.

Założymy, że prędkość odkształcenia można rozłożyć na część sprężystą i niesprężystą:

$$(1.1) \quad \dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}^e + \dot{\epsilon}_{ij}^p.$$

Część niesprężysta prędkości odkształcenia oznaczona przez $\dot{\epsilon}_{ij}^p$ reprezentuje sprzężenie efektów lepkich i plastycznych.

2. Ogólne związki fizykalne

Ponieważ w obszarach sprężystych materiał nie posiada cech lepkich, to dobór odpowiedniego kryterium uplastycznienia będzie znacznie prostszy niż dla materiału sprężysto-lepkoplastycznego.

Początkowy warunek plastyczności, który nazwiemy *statycznym kryterium uplastycznienia*, nie będzie się różnił od znanych kryteriów plastyczności w klasycznej teorii plastyczności.

Aby nasze rozważania miały charakter dostatecznie ogólny, wprowadzimy statyczną funkcję uplastycznienia w następującej postaci:

$$(2.1) \quad F(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p) = \frac{f(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p)}{\kappa} - 1,$$

gdzie funkcja $f(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p)$ zależy od stanu naprężenia σ_{ij} i od stanu odkształcenia plastycznego ε_{ij}^p . Parametr κ jest zdefiniowany wyrażeniem

$$(2.2) \quad \kappa = \kappa(W_p) = \kappa \left(\int_0^{\varepsilon_{ij}^p} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^p \right).$$

Wielkość ta nazywana jest parametrem wzmocnienia (dokładny opis dwóch podstawowych definicji parametru κ można znaleźć w książce R. HILLA [10] lub w pracy P. M. NAGHDI [17]).

O powierzchni płynięcia $F = 0$, rozważanej w dziewięciowymiarowej przestrzeni naprężeń, zakładamy, że jest regularna i wypukła.

W pracy [29] zaproponowano następujące związki fizyczne opisujące materiał sprężysto/lepkoplastyczny

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{ij} &= \frac{1}{2\mu} \dot{s}_{ij} + \gamma^0 \langle \Phi(F) \rangle \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}, \\ \dot{\varepsilon}_{ii} &= \frac{1}{3K} \dot{\sigma}_{ii}. \end{aligned}$$

Funkcja $\Phi(F)$ powinna być dobrana na podstawie rezultatów badań doświadczalnych, dotyczących dynamicznych własności materiałów. Odpowiedni dobór funkcji $\Phi(F)$ pozwala na opis wpływu prędkości odkształcenia na granicę plastyczności materiału. Zagadnienie wyboru funkcji $\Phi(F)$ w oparciu o wyniki doświadczeń zostało szczegółowo przedyskutowane w pracy [27].

Wygodniej będzie zapisać związki fizyczne w trochę innej postaci

$$(2.4) \quad \begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{ij} &= \frac{1}{2\mu} \dot{s}_{ij} + \gamma \langle \Phi(F) \rangle \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}, \\ \dot{\varepsilon}_{ii} &= \frac{1}{3K} \dot{\sigma}_{ii}, \end{aligned}$$

gdzie obecnie $\gamma = \gamma^0/\kappa$ oznacza stałą materiału.

Równania stanu (2.4) wprowadzają założenie, że prędkość odkształcenia niesprężystego jest funkcją stanu naprężenia będącego różnicą między stanem rzeczywistym, a stanem odpowiadającym statycznemu warunkowi uplastycznienia. Funkcja różnicy stanu naprężenia wytwarza prędkość odkształcenia niesprężystego zgodnie z prawem lepkości Maxwella. Sprężyste składowe tensora odkształcenia są niezależne od prędkości odkształcenia.

Związki fizyczne (2.4) opisują również wzmocnienie materiału. Dzięki wprowadzonej funkcji F można opisać wzmocnienie zarówno izotropowe jak i anizotropowe.

Aby dać bliższą dyskusję związku (2.4), rozważmy tylko niesprężystą część prędkości odkształcenia:

$$(2.5) \quad \dot{\varepsilon}_{ij}^p = \gamma \Phi(F) \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}.$$

Po prostych przekształceniach z równania (2.5) otrzymamy

$$(2.6) \quad f(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p) = \kappa(W_p) \left\{ 1 + \Phi^{-1} \left[\frac{(I_2^p)^{1/2}}{\gamma} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} \right)^{-1/2} \right] \right\},$$

gdzie $I_2^p = \frac{1}{2} \dot{\varepsilon}_{ij}^p \dot{\varepsilon}_{ij}^p$ jest drugim niezmiennikiem niesprężystego tensora prędkości odkształcenia.

Związek (2.6) przedstawia dynamiczny warunek plastyczności dla ciała sprężysto/lepkoplastycznego, które wykazuje izotropowe i anizotropowe wzmocnienie. Opisuje jednocześnie zależność kryterium plastyczności od prędkości odkształcenia.

Równanie (2.6) określa zmianę aktualnej powierzchni płynięcia w czasie dynamicznego procesu odkształcenia niesprężystego. Zmiana ta jest spowodowana izotropowym i anizotropowym wzmocnieniem materiału oraz wpływem efektów reologicznych, które w analizowanym przypadku oddziałują przez wpływ prędkości odkształcenia.

Na podstawie równań (2.4) można łatwo wykazać, że prędkość odkształcenia niesprężystego, traktowana jako wektor w dziewięciowymiarowej przestrzeni naprężeń, jest zawsze skierowana wzdłuż normalnej do aktualnej, dynamicznej powierzchni płynięcia.

3. Szczególne przypadki związków fizykalnych

Zbadamy obecnie kilka przypadków szczególnych związków fizykalnych (2.4). Jako pierwszy przykład zanalizujemy relacje opisujące zachowanie się materiału sprężysto/lepkoplastycznego wykazującego wzmocnienie izotropowe. W tym celu założmy, że funkcja F ma postać

$$(3.1) \quad F = \frac{f(\sigma_{ij})}{\kappa} - 1,$$

gdzie funkcja $f(\sigma_{ij})$ zależy obecnie tylko od stanu naprężenia. Jeżeli ograniczymy nasze rozważania do warunku plastyczności Hubera-Misesa, tzn. przyjmiemy $f(\sigma_{ij}) = (J_2)^{1/2}$, gdzie J_2 jest drugim niezmiennikiem dewiatora naprężenia, wtedy związki (2.4) dają⁸

⁸ Podobną postać związków fizykalnych badał ostatnio S. KALISKI w pracy przygotowanej do druku. Różnica między równaniami (3.2) i zależnościami S. Kaliskiego polega tylko na definicji parametru wzmocnienia κ .

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{ij} &= \frac{1}{2\mu} \dot{s}_{ij} + \gamma \left\langle \Phi \left(\frac{\sqrt{J_2}}{\varkappa} - 1 \right) \right\rangle \frac{s_{ij}}{\sqrt{J_2}}, \\ \dot{\varepsilon}_{ii} &= \frac{1}{3K} \dot{\sigma}_{ii}. \end{aligned}$$

Zgodnie z (2.6) dynamiczny warunek plastyczności ma obecnie postać

$$(3.3) \quad \sqrt{J_2} = \varkappa (W_p) \left[1 + \Phi^{-1} \left(\frac{\sqrt{I_2^p}}{\gamma} \right) \right].$$

Dla stanu jednowymiarowego równania konstytutywne (3.2) prowadzą do następującego prawa:

$$(3.4) \quad \dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \gamma^* \left\langle \Phi \left[\frac{\sigma}{q(\varepsilon^p)} - 1 \right] \right\rangle,$$

gdzie $\gamma^* = 2\gamma/\sqrt{3}$, $q(\varepsilon^p) = \sqrt{3}\varkappa(W_p)$, ε oznacza odkształcenie, σ naprężenie i E moduł Younga.

Prawo (3.4) było po raz pierwszy wprowadzone przez L. E. MALVERNA [16].

Wyrażenie (3.3) w przypadku zagadnienia jednowymiarowego daje związek

$$(3.5) \quad \sigma = \varphi(\varepsilon^p) \left[1 + \Phi^{-1} \left(\frac{\dot{\varepsilon}^p}{\gamma^*} \right) \right],$$

gdzie $\sigma = \varphi(\varepsilon^p)$ jest statyczną charakterystyką materiału dla prostego rozciągania.

Jako drugi przypadek zbadamy związki fizyczne opisujące sprężysto-lepko-idealnie plastyczny materiał. Przypadek ten otrzymamy przez wprowadzenie założenia, że funkcja F nie zależy od odkształceń, czyli

$$(3.6) \quad F = \frac{f(J_2, J_3)}{c} - 1,$$

gdzie J_3 jest trzecim niezmiennikiem dewiatora naprężenia, a c oznacza stałą materiału.

Równania (2.4) można obecnie zapisać następująco:

$$(3.7) \quad \begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{ij} &= \frac{1}{2\mu} \dot{s}_{ij} + \gamma \left\langle \Phi \left[\frac{f(J_2, J_3)}{c} - 1 \right] \right\rangle \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}, \\ \dot{\varepsilon}_{ii} &= \frac{1}{3K} \dot{\sigma}_{ii}, \end{aligned}$$

gdzie $\gamma = \gamma^0/c$. Związki (3.7) były po raz pierwszy wprowadzone i szczegółowo zbadane w pracy [26].

Dynamiczny warunek plastyczności wynikający ze związków (3.7) ma postać

$$(3.8) \quad f(J_2, J_3) = c \left\{ 1 + \Phi^{-1} \left[\frac{\sqrt{I_2^p}}{\gamma} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \right)^{-\frac{1}{2}} \right] \right\}.$$

Zakładając dalej

$$(3.9) \quad F = \frac{\sqrt{J_2}}{k} - 1,$$

otrzymujemy odpowiednio następujące równania konstytutywne i dynamiczny warunek plastyczności (por. [26]):

$$(3.10) \quad \dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2\mu} \dot{s}_{ij} + \gamma \langle \Phi \left[\frac{\sqrt{J_2}}{k} - 1 \right] \rangle \frac{s_{ij}}{\sqrt{J_2}},$$

$$\dot{\epsilon}_{ii} = \frac{1}{3K} \dot{\sigma}_{ii},$$

$$(3.11) \quad \sqrt{J_2} = k \left[1 + \Phi^{-1} \left(\frac{\sqrt{I_2^p}}{\gamma} \right) \right].$$

Kiedy odkształcenia sprężyste są małe w porównaniu z odkształceniami niesprężystymi, wtedy równania (3.10) dla funkcji liniowej $\Phi(F) = F$ dają związki fizyczne zaproponowane przez K. HOHENEMSERERA i W. PRAGERA [11].

Uwzględniając odkształcenia sprężyste i zakładając nadal liniową postać funkcji $\Phi(F) = F$ otrzymujemy na podstawie równań (3.10) równania fizyczne, które były szczegółowo badane przez A. M. FREUDENTHALA [8].

Dla stanów jednowymiarowych równania (3.10) i (3.11) dają odpowiednio związki

$$(3.12) \quad \dot{\epsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \gamma^* \langle \Phi \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} - 1 \right) \rangle,$$

$$(3.13) \quad \sigma = \sigma_0 \left[1 + \Phi^{-1} \left(\frac{\dot{\epsilon}^p}{\gamma^*} \right) \right].$$

Związek (3.12) opisuje zależności dynamiczne zachodzące między naprężeniami i odkształceniami w materiale sprężysto-lepko-idealnie plastycznym. Prawo to w przypadku liniowej funkcji $[\Phi(\sigma/\sigma_0) - 1]$ zostało wykorzystane przez W. W. SOKOŁOWSKIEGO [36, 38] do rozwiązania zagadnienia rozprzestrzeniania się fal naprężenia w pręcie.

W. PRAGER w książce [32] wykazał, że równania stanu dla ciała lepko-idealnie-plastycznego i dla ciała idealnie plastycznego są względem siebie w takim samym związku jak równania stanu cieczy lepkiej i idealnej.

W pracy [29] przedstawiono ogólną metodę otrzymania równań klasycznej teorii płynięcia z równań opisujących materiał sprężysto/lepkoplastyczny.

Aby to wykazać bliżej założymy, że $\gamma \rightarrow \infty$. Fizycznie założenie to oznacza pozbawienie ciała własności lepkich. Wtedy zgodnie z równaniem (2.6) otrzymujemy

$$(3.14) \quad f(\sigma_{ij}, \epsilon_{ij}^p) = \kappa \quad \text{lub} \quad F = 0.$$

Warunek (3.14) jest klasycznym kryterium plastyczności w teorii opisującej izotropowe i anizotropowe wzmocnienie materiału. Z warunku (3.14) i na

podstawie definicji funkcji $\Phi(F)$ [por. równania (2.4)] w przypadku granicznym, kiedy $\gamma \rightarrow \infty$ mamy $\Phi(F) \rightarrow 0$. Wtedy iloczyn $\gamma\Phi(F) = \Lambda$ jest nieokreślonym parametrem i otrzymujemy następujący związek:

$$(3.15) \quad \dot{\varepsilon}_{ij}^p = \Lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}.$$

Parametr Λ można określić z warunku, że punkt, który w przestrzeni naprężeń obrazuje aktualny stan obciążenia, musi się znajdować na powierzchni płynięcia

$$(3.16) \quad F(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p) = 0.$$

Stąd

$$(3.17) \quad \dot{F} = \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} + \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}^p} \dot{\varepsilon}_{ij}^p = 0.$$

Po uwzględnieniu związku (3.15) i spełnieniu równania (3.17) dostajemy wzór znany z teorii płynięcia (patrz P. M. NAGHDI [17])

$$(3.18) \quad \Lambda = \left| - \frac{(\partial F / \partial \sigma_{ij}) \dot{\sigma}_{ij}}{(\partial F / \partial \varepsilon_{kl}^p)(\partial F / \partial \sigma_{kl})} \right|.$$

W przypadku materiału sprężysto/lepkko-idealnie plastycznego przez podstawienie rezultatu (3.11) do związków fizykalnych (3.10) dostajemy

$$(3.19) \quad \dot{\varepsilon}_{ij}^p = \sqrt{I_2^p} \frac{s_{ij}}{k \left[1 + \Phi^{-1} \left(\frac{\sqrt{I_2^p}}{\gamma} \right) \right]}.$$

Przyjmując następnie w (3.19) $\gamma = \infty$ otrzymujemy równania stanu

$$(3.20) \quad \dot{\varepsilon}_{ij}^p = \frac{\sqrt{I_2^p}}{k} s_{ij},$$

opisujące zachowanie się nieściśliwego materiału idealnie plastycznego (por. W. PRAGER [32]). Równania (3.20) są słuszne tylko wtedy, kiedy prędkość odkształcenia nie znika.

4. Dynamiczny warunek stateczności dla materiału niesprężystego

Głównym celem wyprowadzonych związków fizykalnych dla materiału sprężysto/lepkoplastycznego była możliwość opisu pewnych własności dynamicznych. Dlatego warto się zastanowić nad modyfikacją definicji materiału statecznego z uwzględnieniem sił bezwładności.

Zagadnienie to rozwiązał D. C. DRUCKER w pracy [7]. Rozszerzona definicja prowadzi do następującego warunku (por. z definicją [I-(3.4)]):

$$(4.1) \quad \int_{t=0}^{t_k} \left\{ \int_V [\sigma_{ij}^{(2)} - \sigma_{ij}^{(1)}] [\dot{\varepsilon}_{ij}^{(2)} - \dot{\varepsilon}_{ij}^{(1)}] dV \right\} dt + \left\{ \int_V \frac{1}{2} \rho [\dot{u}_i^{(2)} - \dot{u}_i^{(1)}]^2 dV \right\}_{t=0}^{t_k} \geq 0,$$

gdzie przez ρ oznaczono gęstość materiału.

Wyraz drugi w nierówności (4.1) jest różnicą wartości całki objętościowej liczonej dla chwili $t = t_k$ i dla chwili początkowej $t = 0$.

Oczywiście, w każdym przypadku prędkość $\dot{u}_i^{(2)}$ dla dowolnego punktu ciała jest w chwili $t = 0$ taka sama jak prędkość $\dot{u}_i^{(1)}$, stąd drugi wyraz w nierówności (4.1) jest nieujemny dla dowolnego czasu $t = t_k$. Dlatego nierówność [I-(3.4)] ma większe znaczenie.

W konkluzji widać, że uwzględnienie sił bezwładności nie wpływa na wnioski wynikające z warunku o materiale statecznym odnośnie związków fizykalnych.

5. Wybór funkcji $\Phi(F)$ i określenie stałych

Pełna analiza doboru funkcji $\Phi(F)$ w związkach fizykalnych sprężysto/lepkoplastycznych oparta na podstawie badań doświadczalnych dotyczących dynamicznych własności materiału przeprowadzona została w pracy [27]. Jednocześnie określone zostały fizykalne stałe materiału.

Zanalizowano szczegółowo pięć różnych funkcji

$$(5.1) \quad \Phi(F) = F^{\delta},$$

$$(5.2) \quad \Phi(F) = F,$$

$$(5.3) \quad \Phi(F) = \exp F - 1,$$

$$(5.4) \quad \Phi(F) = \sum_{\alpha=1}^N A_{\alpha} [\exp F^{\alpha} - 1],$$

$$(5.5) \quad \Phi(F) = \sum_{\alpha=1}^N B_{\alpha} F^{\alpha}.$$

Trzeba podkreślić, że nie prowadzono doświadczalnych badań dynamicznych dla złożonych stanów naprężenia. Wszystkie dotychczasowe rezultaty eksperymentalne były otrzymane przy spełnieniu warunków dla stanu jednowymiarowego.

W celu umożliwienia analizy różnych funkcji $\Phi(F)$ [wzory (5.1)-(5.5)] i określenia odpowiednich stałych wprowadzono hipotezę o podobieństwie krzywych $\sigma - \dot{\epsilon}$ i $\sqrt{J_2} - \sqrt{I_2^*}$.

Hipoteza ta pozwoliła na określenie stałych w zależnościach opisujących złożony stan naprężenia w oparciu o wyniki dla prostego rozciągania lub ściskania.

6. Proces relaksacji dla złożonego stanu naprężenia

Aby przedyskutować proces relaksacji dla złożonego stanu naprężenia, rozważymy ciało sprężysto/lepkoplastyczne o objętości V , ograniczone regularną powierzchnią S . Zbadajmy najpierw proces *obciążania*, w którym siły powierzchniowe T_i są dane na powierzchni S_1 , a na pozostałej części powierzchni

$S_2 = S - S_1$ siły powierzchniowe znikają. Po procesie obciążania następuje *proces relaksacji*, w którym prędkości v_i zerują się na powierzchni S_1 , a siły powierzchniowe nadal znikają na pozostałej części powierzchni S_2 .

Aby taki proces mógł dostarczyć pewnych informacji dotyczących zachowania się materiału i mógł być pomocny przy analizie związków fizykalnych, należy doświadczalną próbę relaksacyjną przeprowadzić tak, żeby stan naprężenia i odkształcenia były jednorodne. Tak zdefiniowany proces relaksacji nazywać będziemy *A-procesem* (patrz [26]).

Zbadajmy tensor Γ_{ij} zdefiniowany następująco:

$$(6.1) \quad \Gamma_{ij} = \frac{1}{2} \int (T_i v_j + T_j v_i) dS.$$

Podczas *A-procesu* tensor Γ_{ij} znika. Stąd

$$(6.2) \quad \Gamma_{ij} = \frac{1}{2} \int (T_i v_j + T_j v_i) dS = \frac{1}{2} \int (\sigma_{ik} n_k v_j + \sigma_{jk} n_k v_i) dS = \\ = \frac{1}{2} \int (\sigma_{ik} \dot{\epsilon}_{kj} + \sigma_{jk} \dot{\epsilon}_{ki}) dV = 0.$$

Ponieważ stany naprężenia i odkształcenia założone były jednorodne, to mamy

$$(6.3) \quad \frac{1}{2} (\sigma_{ik} \dot{\epsilon}_{kj} + \sigma_{jk} \dot{\epsilon}_{ki}) = 0.$$

Warunki (6.3) pozwalają określić stan naprężenia w procesie relaksacji jako funkcję czasu.

Przyjmując w (6.3) $i = j$ dostajemy

$$(6.4) \quad \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} = 0.$$

Mnożąc równanie (6.3) przez σ_{ij} mamy warunek

$$(6.5) \quad \sigma_{ij} \sigma_{jk} \dot{\epsilon}_{ki} = 0.$$

Rozważmy następnie prostszy problem brzegowy, w którym *proces obciążania* charakteryzuje się danymi siłami powierzchniowymi T_i na całej powierzchni S , podczas gdy w *procesie relaksacji* prędkości v_i znikają również na całej powierzchni ciała S . Taki rodzaj procesu relaksacji będziemy nazywać *B-procesem*.

Ponieważ stany naprężenia i odkształcenia są z założenia jednorodne, to otrzymujemy warunek

$$(6.6) \quad \dot{\epsilon}_{ij} = 0.$$

Warunek (6.6) prowadzi do następujących dwóch warunków skalarnych

$$(6.7) \quad s_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} = 0,$$

$$(6.8) \quad s_{ij} s_{jk} \dot{\epsilon}_{ik} = 0.$$

Warto podkreślić, że te dwa warunki są również słuszne dla *A-procesów* w materiałach nieściśliwych.

W pracy [26] zanalizowano szczegółowo całkowanie równań otrzymanych na podstawie warunków (6.3) i (6.6), które pozwalają na określenie stanu naprężenia w dowolnej chwili podczas procesu relaksacji. W celu bliższego scharakteryzowania metody postępowania zbadamy równania relaksacyjne dla drugiego niezmiennika J_2 .

Podczas *A-procesu* dla materiału nieściśliwego lub podczas *B-procesu* dla dowolnego materiału mamy w oparciu o związki fizyczne (3.10) następujące równanie

$$(6.9) \quad \dot{J}_2 + 4\mu\gamma\Phi\left(\frac{\sqrt{J_2}}{k} - 1\right)\sqrt{J_2} = 0.$$

Załóżmy, że podczas procesu obciążania został osiągnięty pewien stan naprężenia $\sigma_{ij}^{(0)}$ (lub $s_{ij}^{(0)}$ i $\sigma_{kk}^{(0)}$) taki, że $J_2^{(0)} = \frac{1}{2}s_{ij}^{(0)}s_{ij}^{(0)} > k^2$. Przyjmijmy następnie, że proces relaksacji zaczyna się w chwili $t = 0$. Wtedy równanie różniczkowe (6.9) może być zastąpione nieliniowym równaniem całkowym Volterry drugiego rodzaju

$$(6.10) \quad J_2 = J_2^{(0)} - 4\mu\gamma \int_0^t \sqrt{J_2(\xi)} \Phi\left[\frac{\sqrt{J_2(\xi)}}{k} - 1\right] d\xi.$$

Zakładając, że wyrażenie podcałkowe $\sqrt{J_2} \Phi\left(\frac{\sqrt{J_2}}{k} - 1\right)$ spełnia warunek Lipschitza

$$(6.11) \quad \left| \sqrt{J_2} \Phi\left(\frac{\sqrt{J_2}}{k} - 1\right) - \sqrt{J_2''} \Phi\left(\frac{\sqrt{J_2''}}{k} - 1\right) \right| < N_0 |J_2 - J_2''|,$$

gdzie N_0 jest dodatnią stałą, można otrzymać rozwiązanie równania (6.10) za pomocą metody iteracji wykorzystując następujący wzór rekurencyjny:

$$(6.12) \quad J_2^{(n+1)} = J_2^{(0)} - 4\mu\gamma \int_0^t \sqrt{J_2^{(n)}(\xi)} \Phi\left[\frac{\sqrt{J_2^{(n)}(\xi)}}{k} - 1\right] d\xi.$$

Można łatwo wykazać, że szereg

$$(6.13) \quad J_2^{(0)} + \sum_{n=0}^{\infty} [J_2^{(n+1)}(t) - J_2^{(n)}(t)]$$

jest absolutnie i jednostajnie zbieżny i jego suma

$$(6.14) \quad J_2(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} J_2^{(n)}(t)$$

jest rozwiązaniem równania całkowego (6.10), a stąd i równania różniczkowego (6.9). Oczywiście rozwiązanie (6.14) jest słuszne tylko w obszarze odkształceń niesprężystych, to znaczy jeżeli $J_2 > k^2$.

W pracy [26] zbadano rozwiązania równań relaksacyjnych dla różnych funkcji $\Phi(F)$. Udowodniono również, że nierówność Lipschitza jest spełniona dla wszystkich funkcji (5.1)-(5.5).

7. Rozwiązania problemów brzegowych

Mimo skomplikowanego charakteru związków fizykalnych opisujących zachowanie się materiału sprężysto/lepkoplastycznego udało się rozwiązać kilka ważnych problemów brzegowych dla złożonego stanu naprężenia.

Zagadnieniami jednowymiarowymi zajmowano się wcześniej i istnieje już kilka prac przeglądowych, w których można znaleźć krytyczną ocenę wyników (patrz np. [12, 30]).

Nie podamy tu również pełnego przeglądu rozwiązań uzyskanych dla złożonego stanu naprężenia. Przedstawimy tylko pewne wyniki podstawowe.

Pełną dyskusję zagadnienia rozprzestrzeniania się fal naprężenia w ośrodku sprężysto/lepkoplastycznym w oparciu o związki fizykalne (3.10) dla wszystkich wprowadzonych funkcji $\Phi(F)$, (5.1)-(5.5) podają prace [24, 25, 28]. Wykazano, że cztery rodzaje fal: fala sferyczna, cylindryczna fala promieniowa, cylindryczna fala ścinania i fala płaska w półprzestrzeni dają się sprowadzić do jednego zagadnienia matematycznego. Naturalnie metody rozwiązania tego zagadnienia są różne w obszarach sprężystych i w obszarach niesprężystych.

Rozwiązanie problemu rozprzestrzeniania się sferycznych i cylindrycznych fal naprężenia w ośrodku opisanym związkami (3.10), ale dla liniowej funkcji $\Phi(F)$ przedyskutowano w pracach [20, 23]. Podobnym zagadnieniem dla fali cylindrycznej zajmował się L. W. NIKITIN [19].

Okazało się, że stosowanie równań fizykalnych ciała sprężysto/lepkoplastycznego do zagadnień brzegowych płyt jest zbyt skomplikowane. Nie można uzyskać rozwiązań, które mogłyby być wykorzystane w praktyce inżynierskiej. Dlatego W. PRAGER zaproponował w pracy [33] pewną linearyzację równań stanu, polegającą na zastąpieniu warunku plastyczności Hubera-Misesa warunkiem odcinkami liniowym, tzn. warunkiem Treski. Linearyzacja ta dotyczy przypadku, kiedy

$$F = \frac{\sqrt{J_2}}{k} - 1 \text{ i } \Phi(F) = F.$$

W oparciu o tę koncepcję E. J. APPLEBY i W. PRAGER [1] rozwiązali zagadnienie zginania płyty kołowej lepko-sztywnoplastycznej, swobodnie podparte na brzegu i równomiernie obciążonej.

Krytyczną ocenę wyników uzyskanych dla belek w oparciu o model lepko-sztywnoplastyczny dają prace P. S. SYMONDSA i S. R. BODNERA [4, 5], w których również porównano wyniki teoretyczne z rezultatami doświadczalnymi.

Rozwiązania innych zagadnień dynamicznych bądź quasi-statycznych dla ośrodka sprężysto/lepkoplastycznego przyniosły prace, [2, 13, 14, 15, 37, 40, 41].

8. Wnioski końcowe

Oceniając krytycznie dorobek kierunku drugiego chcemy zwrócić uwagę na kilka podstawowych kwestii dyskusyjnych.

Poważne zastrzeżenia budzi podstawowe założenie, że materiał w obszarach nieuplastycznionych nie posiada własności lepkich. Na obronę tej hipotezy można przytoczyć przykłady metali, które wykazują wyraźniejsze własności lepkie po uplastycznieniu niż przed uplastycznieniem. Dobrymi przykładami mogą tu być miękka stal i czyste żelazo. Nie znaczy to jednak, że metale te nie posiadają zupełnie własności lepkich w obszarach nieuplastycznionych.

Dalszą kwestią dyskusyjną jest założenie, że wektor prędkości odkształcenia niesprężystego $\dot{\epsilon}_{ij}^p$ jest ortogonalny do aktualnej powierzchni płynięcia, co prowadzi w efekcie do koncepcji potencjału plastycznego. Założenie to ogranicza wpływ efektów reologicznych na warunek plastyczności.

W rozwoju kierunku drugiego brak opracowań podstaw opartych na termodynamice nieodwracalnych procesów odkształcenia lub na fizyce metali. Ostatnie badania wskazują, że wiele zjawisk dynamicznych można wyjaśnić na bazie teorii dyslokacji (por. np. [35]).

Nie została również dotychczas zbadana jednoznaczność rozwiązania podstawowego zagadnienia brzegowego dla ośrodka sprężysto/lepkoplastycznego. Nie ma też ogólnych opracowań metod przybliżonych opartych o twierdzenia wariacyjne.

Zaletą tego kierunku jest oparcie teoretycznych rezultatów o bazę wyników doświadczalnych. Przeprowadzona konfrontacja wyników wskazuje na możliwość dobrego opisu wielu zjawisk dynamicznych.

Uzyskane już rozwiązania problemów brzegowych stwarzają perspektywy zastosowania metod tego kierunku do rozwiązywania ważnych dla praktyki zagadnień.

Literatura cytowana w tekście

- [1] E. J. APPELBY and W. PRAGER, *A problem in visco-plasticity*, J. Appl. Mech., **29** (1962), 381.
- [2] J. BEJDA, *Analysis of deformation in a short visco-plastic cylinder striking a rigid target*, Arch. Mech. Stos., **15** (1963).
- [3] D. R. BLAND, *The Theory of Linear Viscoelasticity*, Pergamon Press, New York 1960.
- [4] S. R. BODNER and P. S. SYMONDS, *Plastic deformations in impact and impulsive loading of beams*, w: «Plasticity», (Ed. by E. H. Lee and P. S. Symonds), Pergamon Press, New York, Oxford, London and Paris 1960, 488.
- [5] S. R. BODNER and P. S. SYMONDS, *Experimental and theoretical investigation of the plastic deformation of cantilever beams subjected to impulsive loading*, J. Appl. Mech., **29** (1962), 719.
- [6] B. D. COLEMAN and W. NOLL, *Foundations of linear viscoelasticity*, Reviews of Modern Physics, **33** (1961), 239.
- [7] D. C. DRUCKER, *A definition of stable inelastic material*, J. Appl. Mech., **26** (1959), 101.
- [8] A. M. FREUDENTHAL, *The Mathematical Theories of the Inelastic Continuum*, Handbuch der Physik, VI (1958), Springer-Verlag, Berlin.
- [9] M. GURTIN and E. STERNBERG, *On the linear theory of viscoelasticity*, Arch. Rational Mech. Anal., **11** (1962), 20.
- [10] R. HILL, *The Mathematical Theory of Plasticity*, Oxford 1950.
- [11] K. HOHNEMSER and W. PRAGER, *Über die Ansätze der Mechanik isotroper Kontinua*, Z. A. M. M., **12** (1932), 216.
- [12] H. G. HOPKINS, *Dynamic anelastic deformations of metals*, Appl. Mech. Reviews, **14** (1961).

- [13] В.Н. Кукуджанов, Л.В. Никитин, *Распространение волн в стержне из неоднородного упруго-вязко-пластического материала*, Изв. Акад. Наук СССР, ОТН, Мех, Мат., 1960, 53.
- [14] В.Н. Кукуджанов, *Распространение цилиндрических ударных волн напряжения в пластике за пределом текучести*, Иссл. Физ. Радиом., 1961.
- [15] H. G. LANDAU, J. H. WEINER and E. E. ZWICKY, *Thermal stress in viscoelastic-plastic plate with temperature—dependent yield stress*, J. Appl. Mech., 27 (1960), 297.
- [16] L. E. MALVERN, *The propagation of longitudinal waves of plastic deformation in a bar of material exhibiting a strain-rate effect*, J. Appl. Mech., 18 (1951), 203.
- [17] P. M. NAGHDİ, *Stress-strain relations in plasticity and thermoplasticity*, w: «Plasticity» (Ed. by E. H. Lee and P. S. Symonds), Pergamon Press, New York, Oxford, London and Paris 1960, 121.
- [18] P. M. NAGHDİ and S. A. MURCH, *On the mechanical behavior of viscoelastic/plastic solids*, Technical Report, University of California, Berkeley 1963.
- [19] Л.В. Никитин, *Распространение упруго-вязко-пластических волн в толстостенной трубе*, Изв. ВУЗ-ов, Машиностроение, 3 (1958), 14.
- [20] W. OLSZAK and P. PERZYNA, *Propagation of spherical waves in a non-homogeneous elastic-visco-plastic medium*, Colloque International C.N.R.S., Marseille 1961, 67; Bull. Acad. Polon. Sci., Sérié Sci. Tech., 9, (1961), 509.
- [21] W. OLSZAK, *On critical states in viscoelasticity*, [w wydawn.] Progress in Applied Mechanics-The Prager Anniversary Volume, Mac Millan, New York 1963.
- [22] W. OLSZAK, Z. BYCHAWSKI, *Kryterium zniszczenia ciał sprężystolepkich*, w druku.
- [23] P. PERZYNA, *Stress waves in a homogeneous elastic-visco-plastic medium*, Arch. Mech. Stos., 11 (1959), 441.
- [24] P. PERZYNA, *Propagation of shock waves in non-homogeneous elastic-visco-plastic bodies*, Arch. Mech. Stos., 13 (1961), 851.
- [25] P. PERZYNA, *Propagation of shock waves in elastic-visco-plastic medium of a definite non-homogeneity type*, Arch. Mech. Stos. 14 (1962), 93.
- [26] P. PERZYNA, *The constitutive equations for rate sensitive plastic materials*, Quart. Appl. Math., 20 (1963), 321.
- [27] P. PERZYNA, *The study of the dynamical behavior of rate sensitive plastic materials*, Arch. Mech. Stos., 15 (1963), 113.
- [28] P. PERZYNA, *On the propagation of stress waves in a rate sensitive plastic medium*, Z.A.M.P., 14 (1963), 241.
- [29] P. PERZYNA, *The constitutive equations for work-hardening and rate sensitive plastic materials*, Proc. Vibr. Prob., 4 (1963), 281.
- [30] H. J. PLASS and E. A. RIPPERGER, *Current research on plastic wave propagation at the University of Texas*, Parts I and II, w: «Plasticity» (Ed. by E. M. Lee and P. S. Symonds). Pergamon Press. New York, Oxford, London and Paris 1960, 453.
- [31] W. PRAGER, *Mécanique des solides isotropes au dela du domaine élastique*, Memorial Sci. Math., 87 (1937).
- [32] W. PRAGER, *Introduction to Mechanics of Continua*, Ginn and Company, Boston 1961.
- [33] W. PRAGER, *Linearization in visco-plasticity*, Österr. Ing. Archiv., 1961, 152.
- [34] M. REINER, *Plastic yielding in anelasticity*, J. Mech. Phys. Solids, 8 (1960), 255.
- [35] J. A. SIMMONS, F. HAUSER and J. E. DORN, *Mathematical Theories of Plastic Deformation under Impulsive Loading*, University of California, Publications in Engineering, vol. 5, 1962, 177.
- [36] В.В. Соколовский, *Распространение упруго-вязко-пластических волн в стержнях*, Докл. АН СССР, 60 (1948), 775.
- [37] В.В. Соколовский, *Распространение цилиндрических волн сдвига в упруго-вязко-пластической среде*, Докл. АН СССР, 60 (1948), 1325.
- [38] В.В. Соколовский, *Распространение упруго-вязко-пластических волн в стержнях*, Прикл. Мат. Мех., 12 (1948), 3.

[39] C. TRUESDELL and R. A. TOUPIN, *The Classical Field Theories*, w: Handbuch der Physik, III/1 (1960), Springer-Verlag, Berlin.

[40] T. WIERZBIŃSKI, *A thick-walled elasto-visco-plastic spherical container under stress and displacement boundary value conditions*, Arch. Mech. Stos., **15** (1963), 297.

[41] T. WIERZBIŃSKI, *Impulsive loading of a spherical container with rigid-plastic and strain-rate sensitive material*, Arch. Mech. Stos., **15** (1963).

Р е з ю м е

ОСНОВНЫЕ ВОПРОСЫ ВЯЗКО-ПЛАСТИЧНОСТИ

Главной целью работы является представление основных направлений развития вязко-пластичности, новой отрасли механики сплошной среды, пытающейся дать совместное описание реологических и пластических свойств материала.

Широко обсуждены основы теории, критерий пластичности и физические зависимости между тензором напряжения и тензором деформации.

В первой части дан анализ свойств упруго-вязко-пластических тел, которые проявляют реологические эффекты до и после возникновения пластических деформаций.

Обсуждено условие пластичности в зависимости от вязких свойств и исследованы критерии нагрузки.

Путем введения постулата Дракера об устойчивом материале доказана выпуклость поверхности текучести и выведены условия разрешающие исследовать напряжения и деформации и выявить различия вытекающие из одновременного влияния реологических и пластических эффектов.

Во второй части работы дан обзор методов описания упруго/вязко-пластических материалов, которые проявляют ясно выраженные реологические свойства только лишь в пластических областях, а также обзор феноменологических физических зависимостей, описывающих влияние скорости деформации на предел пластичности.

Обсуждены динамические условия пластичности и четко выявлен характер зависимости этих условий от скорости деформации. Показано, что из общих физических зависимостей, описывающих изотропное и анизотропное упрочнение и влияние скорости деформации, можно получить много интересных частных случаев.

Доказано также, что в предельном случае, когда постоянная материала $\gamma \rightarrow \infty$, получают известные теории пластического течения.

Подробно проанализирован процесс релаксации для сложного напряженного состояния и показаны методы интегрирования релаксационных уравнений.

В конце второй части проведен краткий обзор решений краевых задач.

В заключительной части дан критический анализ основных упрощающих положений и нерешенных задач, а также общий набросок перспектив дальнейшего развития исследований.

S u m m a r y

FUNDAMENTAL PROBLEMS IN VISCO-PLASTICITY

The aim of the paper is to show the fundamental trends of visco-plasticity, representing a new branch of continuous media mechanics, which attempts to describe simultaneously the rheological and plastic properties of materials.

Fundamental problems, like the yield criterion and the constitutive equations have been extensively discussed in the paper.

In the first part of the paper the properties of elasto-visco-plastic bodies are described, the rheological effects appearing both before and after the yield point, the yield condition depending on viscous properties is discussed.

Introducing the Drucker postulate concerning stable materials, the convexity of the yield surface can be proved, and some conditions are derived which enable us to determine the direction of the rate of plastic deformation vector.

General constitutive equations have been shown, and differences resulting from simultaneous rheological and plastic influences have been stressed.

The second part of the paper presents a review of some properties of elasto/visco-plastic materials, i.e. materials which reveal explicit rheological properties in the plastic region only.

Phenomenological constitutive equations describing the influence of the strain rate on the yield limit are given. Dynamical yield conditions are discussed, and their dependence on the strain rate is emphasized. It has been proved that from the general constitutive equations describing the isotropic and anisotropic work hardening and the influence of the strain rate, numerous interesting special cases can be derived. It can be shown, furthermore, that the case, when the material constant γ tends to infinity, corresponds to the well known theory of plastic flow.

Detailed analysis of the relaxation process in the case of a general state of stress is followed by the demonstration of effective methods of integration of the relaxation equations. A short review of solutions of the boundary value problems concludes this part of the paper.

Final remarks are devoted to a critical analysis of basic assumptions, to the unsolved problems of visco-plasticity and to general outlines of the probable future development in this field of mechanics.

ZAKŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGLYCH
IPPT PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 3 maja 1963 r.
