TITIK DAN SISI PENUTUP MINIMAL PADA GRAF BINTANG $(m)_c\, S_n^k$ DAN GRAF RODA $(m)_c\, W_n^k$

Nurul Hijriyah[1] dan Wahyu H. Irawan[2]

[1] Mahasiswa Pascasarjana Jurusan Matematika Universitas Brawijaya Malang
[2]Jurusan Matematika UIN Maulana Malik Ibrahim Malang
e-mail: [1]n.hijriyah@gmail.com

ABSTRAK

Suatu titik dan sisi dikatakan saling menutup pada graf G jika titik dan sisi tersebut berinsiden di G. Titik penutup di G merupakan himpunan dari titik-titik yang menutup semua sisi di G dan sisi penutup pada graf G merupakan himpunan sisi-sisi yang menutup semua titik di G. Himpunan titik dan sisi penutup di katakan minimal karena banyaknya anggota paling sedikit atau himpunan yang kardinalnya terkecil. Titik penutup minimal dilambangkan dengan $\alpha(G)$ dan sisi penutup minimal dilambangkan dengan $\alpha_1(G)$. Skripsi ini bertujuan untuk mengetahui rumusan umum titik dan sisi penutup minimal pada graf bintang $(m)_c\, S_n^k$ dan graf roda $(m)_c W_n^k$. Hasil dari penelitian ini adalah titik dan sisi penutup minimal pada graf bintang $(m)_c\, S_n^k$ dan graf roda $(m)_c W_n^k$. Kemudian dirumuskan menjadi suatu lemma dan dibuktikan kebenarannya secara umum.

1. Graf bintang $(m)_c\, S_n^k$ dengan $n \in N, n \geq 3$. maka rumusan titik dan sisi penutup minimal masing-masing adalah $\alpha(S_n) = 1$ dan $\alpha_1(S_n) = n$, $\alpha((m)_c\, S_n^1) = m$ dan $\alpha_1((m)_c\, S_n^1) = m\ x\ n$,

$$\alpha((m)_c\, S_n^k) := \begin{cases} m\left(\frac{1}{2}kn + 1\right); \textit{untuk k genap} \\ m\left(\frac{1}{2}n(k+1) + 1\right);\ \textit{untuk k ganjil} \end{cases} \quad \alpha_1((m)_c\, S_n^k) := \begin{cases} m\left(n\left(\frac{1}{2}k + 1\right)\right); \textit{untuk k genap} \\ m\left(\frac{1}{2}n(k+1) + 1\right);\ \textit{untuk k ganjil} \end{cases}$$

2. Graf roda $(m)_c W_n^k$ dengan $n \in N, n \geq 3$. maka rumusan titik dan sisi penutup minimal masing-masing adalah $\alpha(W_n) := \begin{cases} \frac{1}{2}n + 1; \textit{untuk n genap} \\ \frac{1}{2}(n+1) + 1;\ \textit{untuk n ganjil} \end{cases}$ dan $\alpha_1(W_n) := \begin{cases} \frac{1}{2}n + 1; \textit{untuk n genap} \\ \frac{1}{2}(n+1);\ \textit{untuk n ganjil} \end{cases}$

$$\alpha((m)_c W_n^1) := \begin{cases} m\left(\frac{1}{2}n + 1\right); \textit{untuk n genap} \\ m\left(\frac{1}{2}(n+1) + 1\right);\ \textit{untuk n ganjil} \end{cases} \text{ dan } \alpha_1((m)_c W_n^1) := \begin{cases} m\left(\frac{1}{2}n + 1\right); \textit{untuk n genap} \\ m\left(\frac{1}{2}(n+1)\right);\ \textit{untuk n ganjil} \end{cases}$$

$$\alpha((m)_c W_n^k)\ dan\ \alpha_1((m)_c\, W_n^k) := \begin{cases} m\left(\frac{1}{2}(2kn + n + 2)\right); n\ genap, k\ genap \\ m\left(\frac{1}{2}(2kn + n + 3)\right); n\ ganjil, k\ genap \end{cases}$$

$$\alpha((m)_c W_n^k) := \{m(nk+1)\ dan\ \alpha_1((m)_c\, W_n^k) := \{m(n(k+1));\ k\ ganjil\ dan\ n \in N, n \geq 3$$

Kata Kunci: *Titik Penutup, Sisi Penutup, Minimal, Graf Bintang, Graf Roda*

PENDAHULUAN

Teori graf merupakan salah satu cabang dari ilmu matematika yang masih sangat menarik untuk dibahas karena teori-teorinya masih aplikatif sampai saat ini dan dapat diterapkan untuk memecahkan masalah dalam kehidupan sehari-hari. Dengan mengkaji dan menganalisis model atau rumusan, teori graf dapat diperlihatkan peranan dan kegunaannya dalam memecahkan berbagai masalah. Permasalahan yang dirumuskan dengan teori graf dibuat sederhana, yaitu diambil aspek-aspek yang diperlukan dan dibuang aspek-aspek lainnya (Purwanto, 1998:1).

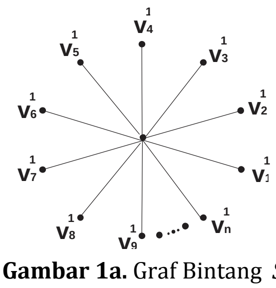
Graf telah dikembangkan sejak tahun 1960-an yang didefinisikan sebagai himpunan titik *(vertex)* yang tidak kosong dan himpunan garis atau sisi *(edge)* yang mungkin kosong. Graf itu menghubungkan pasangan dari suatu himpunan, dalam Alquran bisa kita hubungkan dengan *Hablum min An-Nas* dan *Hablum min Allah*.

Hubungan antara Allah dengan manusia dapat dijelaskan bahwa secara umum seluruh alam ini ta'at dan tunduk kepada Allah SWT, sehingga berfungsi maksimal dan saling memberikan manfaat kepada bagian alam lainnya bahkan tahu cara bertasbih dan sholatnya. Secara khusus ternyata seluruh alam semesta ini juga berhijab atau memakai penutup atau pelindung agar berjalan sesuai fungsinya dan selamat dari hal-hal yang membahayakan. Contoh kecil seperti pena tanpa penutup maka tintanya akan menjadi kering, seperti rumah juga perlu adanya penutup yakni atap dan dinding.

Suatu titik dan sisi dikatakan saling menutup pada graf G jika titik dan sisi tersebut terkait langsung di G. Titik penutup di G merupakan himpunan dari titik-titik yang menutup semua sisi di G dan sisi penutup pada graf G (tanpa titik terisolasi) merupakan himpunan sisi-sisi yang menutup semua titik di G (Chartrand dan Lesniak, 1986: 243). Berdasarkan latar belakang diatas, maka penelitian ini dapat dirumuskan bagaimana rumus umum titik dan sisi penutup minimal pada graf bintang $(m)_c\ S_n^k$ dan graf roda $(m)_c\ W_n^k$. Tujuan dari penelitian ini adalah untuk mengetahui rumus umum titik dan sisi penutup minimal pada graf bintang $(m)_c\ S_n^k$ dan graf roda $(m)_c\ W_n^k$.

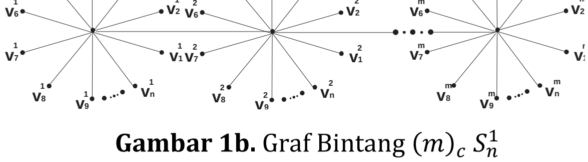
Dalam penelitian ini penulis mendefinisikan untuk beberapa istilah yang digunakan agar tidak terjadi penafsiran ganda terhadap istilah-istilah tersebut yaitu, S_n adalah graf bintang dengan n titik, selanjutnya S_n ditulis sebagai S_n^1, $(m)_c\ S_n^1$ diperoleh dari S_n^1 sebanyak m kali dengan $v_0^i\ v_0^{i+1}$ sisi di $(m)_c\ S_n^1$, S_n^k adalah setiap anting graf bintang S_n yang diberi k titik, sehingga $(m)_c\ S_n^k$ diperoleh dari S_n^k sebanyak m kali dengan $v_0^i\ v_0^{i+1}$ sisi di $(m)_c\ S_n^k$.

$V((1)_c\ S_n^1) = \{v_0^1, v_1^1, \dots, v_n^1\}$
$V((2)_c\ S_n^1) = \{v_0^1, v_1^1, \dots, v_n^1\} \cup \{v_0^2, v_1^2, \dots, v_n^2\}$
$V((m-1)_c S_n^1) \cup \{v_0^m, v_1^m, \dots, v_n^m\}$
S_n : graf bintang dengan n titik.



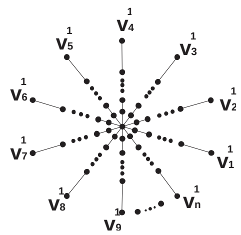
Gambar 1a. Graf Bintang S_n

Selanjutnya S_n ditulis sebagai S_n^1 sehingga,
$(m)_c\ S_n^1$: graf bintang S_n^1 sebanyak m kali dan $v_0^i\ v_0^{i+1}$ sisi di$(m)_c\ S_n^1$.



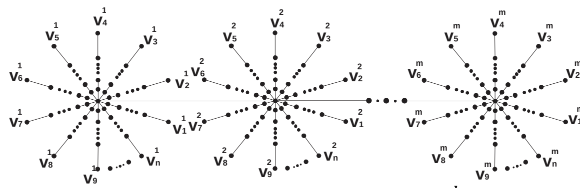
Gambar 1b. Graf Bintang $(m)_c\ S_n^1$

S_n^k: setiap anting graf bintang S_n yang diberi k titik.



Gambar 1. Graf Bintang S_n^k

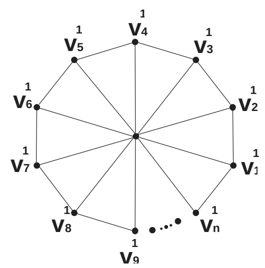
$(m)_c\ S_n^k$: graf bintang S_n sebanyak m kali yang setiap anting graf bintang S_n yang memiliki k titik dan $v_0^i\ v_0^{i+1}$ sisi di$(m)_c\ S_n^k$.



Gambar 2. Graf Bintang $(m)_c\ S_n^k$

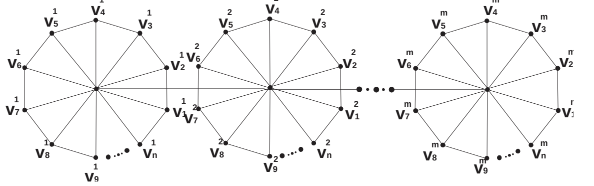
Selanjutnya W_n adalah graf roda dengan n titik, selanjutnya W_n ditulis sebagai W_n^1, $(m)_c\ W_n^1$ diperoleh dari W_n^1 sebanyak m kali dengan $v_0^i\ v_0^{i+1}$ sisi di $(m)_c\ W_n^1$,W_n^k adalah setiap sisi graf roda W_n yang diberi k titik, sehingga $(m)_c\ W_n^k$ diperoleh dari W_n^k sebanyak m kali dengan $v_0^i\ v_0^{i+1}$ sisi di $(m)_c\ W_n^k$.

$V((1)_c\ W_n^1)) = \{v_0^1, v_1^1, \dots, v_n^1\}$
$V((2)_c\ W_n^1) = \{v_0^1, v_1^1, \dots, v_n^1\} \cup \{v_0^2, v_1^2, \dots, v_n^2\}$
$V((m-1)_c S_n^1) \cup \{v_0^m, v_1^m, \dots, v_n^m\}$
W_n : graf roda dengan n titik



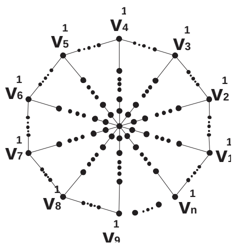
Gambar 3. Graf Roda W_n

Selanjutnya W_n ditulis sebagai W_n^1:
$(m)_c\ W_n^1$: graf roda W_n^1 sebanyak m kali dan $v_0^i\ v_0^{i+1}$ sisi di $(m)_c\ W_n^1$.



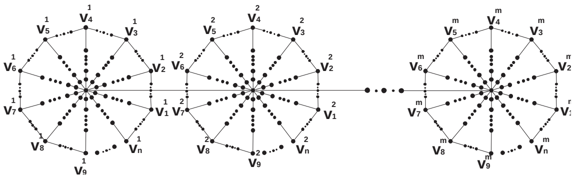
Gambar 4. Graf Roda $(m)_c\ W_n^1$

W_n^k : setiap sisi yang ada pada graf roda W_n diberi k titik.



Gambar 5. Graf Roda W_n^k

$(m)_c\ W_n^k$: graf roda W_n^k sebanyak m kali dan v_0^i v_0^{i+1} sisi di$(m)_c\ W_n^k$.



Gambar 6. Graf Roda $(m)_c\ W_n^k$

KAJIAN TEORI

Covering di dalam Al-Qur'an

Dalam Al-Quran kata "penutup" itu diartikan sebagai "*Hijab dan Himar*" yang memiliki arti sebagai penutup (aurat) baik laki-laki maupun perempuan dan penutup kepala. Memakai *hijab* yang benar akan mendatangkan kebaikan. Dalam kajian matematika khususnya dalam teori graf ada juga kata penutup yaitu penutup *(covering)* yang di dalam Alquran Allah SWT berfirman dalam surat al-Ahzab/33 ayat 53:

وَإِذَا سَأَلْتُمُوهُنَّ مَتَٰعًا فَسْـَٔلُوهُنَّ مِن وَرَآءِ حِجَابٍ ۚ ذَٰلِكُمْ
أَطْهَرُ لِقُلُوبِكُمْ وَقُلُوبِهِنَّ ۚ وَمَا كَانَ لَكُمْ أَن تُؤْذُوا۟
رَسُولَ ٱللَّهِ وَلَآ أَن تَنكِحُوٓا۟ أَزْوَٰجَهُۥ مِنۢ بَعْدِهِۦٓ أَبَدًا ۚ إِنَّ
ذَٰلِكُمْ كَانَ عِندَ ٱللَّهِ عَظِيمًا ﴿٥٣﴾

Artinya: *"Apabila kamu meminta sesuatu (keperluan) kepada mereka (isteri- isteri Nabi), Maka mintalah dari belakang tabir. cara yang demikian itu lebih suci bagi hatimu dan hati mereka. dan tidak boleh kamu menyakiti (hati) Rasulullah dan tidak (pula) mengawini isteri-isterinya selama-lamanya sesudah ia wafat. Sesungguhnya perbuatan itu adalah Amat besar (dosanya) di sisi Allah".* (QS. al-Ahzab/33: 53)

Ini adalah ayat *hijab* yang di dalamnya mengandung beberapa hukum dan beberapa adat *syar'i*, di mana sebab turunnya adalah menyetujui perkataan 'Umar ra. Dan aku berkata: 'Ya Rasulullah, sesungguhnya orang yang baik dan orang yang buruk, terkadang masuk kepada isteri-isterimu, maka kiranya engkau memberikan mereka *hijab*, lalu Allah menurunkan ayat hijab. Dalam surat diatas jika di pandang dalam segi matematika yang dimaksud sebagai *hijab/khimar* adalah suatu *covering*. *Covering* pada suatu graf menjadi bukti bahwa dengan mengamati petunjuk Allah, yang berupa penutup *(hijab)* tersebut dapat diperoleh suatu formula yang luar biasa yang bermanfaat bagi manusia yaitu dalam bentuk penutup.

Teori Dasar

Definisi 1. Graf G

Graf G adalah pasangan himpunan *(V,E)* dengan V adalah himpunan tidak kosong dan berhingga dari objek-objek yang disebut sebagai titik dan E adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan tak berurutan dari titik-titik berbeda di V yang disebut sebagai sisi (Chartrand dan Lesniak, 1986:4).

Definisi 2. *Adjacent* dan *Incident*

Sisi $e = \{u, v\}$ dikatakan menghubungkan titik u dan v. Jika $e = \{u, v\}$ adalah sisi pada graf G, maka u dan v adalah titik yang terhubung langsung (*adjacent*), sementara itu u dan e sama halnya dengan v dan e disebut terkait langsung (*incident*). Lebih jauh, jika e_1 dan e_2 berbeda pada G terkait langsung (*incident*) dengan sebuah titik bersama, maka e_1 dan e_2 disebut sisi adjacent (Chartrand dan Lesniak, 1986:4).

Definisi 3. Jalan

Misalkan u dan v (yang tidak harus berbeda) adalah titik pada graf G. Jalan u-v pada graf G adalah barisan berhingga yang berselang-seling,

$$u = u_0, e_1, u_1, e_2, \dots, u_{k-1}, e_k, u_k = v$$

antara titik dan sisi, yang dimulai dari titik u dan diakhiri di titik v, dengan $e_i = u_{i-1}u_i$ untuk $i = 1, 2, \dots, k$ (Chartrand dan Lesniak, 1986:26).

Definisi 4. Trail

Jalan u-v yang tidak mengulang sisi atau semua sisinya berbeda disebut *trail* u-v (Chartrand dan Lesniak, 1986:26).

Definisi 5. Lintasan

Jalan u-v yang semua titiknya berbeda disebut *path* (lintasan) u-v. Dengan demikian, semua lintasan adalah *trail.* Contoh pada gambar 2.4 yaitu jalan $v_3, e_2, v_2, e_1, v_1, e_7, v_6, e_5, v_5, e_4, v_4$ adalah lintasan (Chartrand dan Lesniak, 1986: 26).

Definisi 6. Sirkuit

Trail tertutup (*closed trail*) dan tak *trivial* pada graf G disebut *sirkuit* G. Contoh pada gambar 2.4 yaitu jalan $v_5, e_5, v_6, e_7, v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_3, v_5$ adalah *sirkuit* (Chartrand dan Lesniak, 1986:28).

Definisi 7. Sikel

Sirkuit $v_1, v_2, \dots, v_n,\ v_1 (n \geq 3)$ memiliki n titik dengan v_i adalah titik-titik berbeda untuk

$1 \leq i \leq n$ disebut sikel (*Cycle*). Contoh pada gambar 2.4 yaitu jalan $v_5, e_5, v_6, e_6, v_2, e_2, v_3, e_3, v_5$ adalah contoh sikel (Chartrand dan Lesniak, 1986:28).

Definisi 8. Keterhubungan
Pasangan titik u dan v dapat dikatakan terhubung (*connected*), jika terdapat lintasan u-v di G. Suatu graf G dapat dikatakan terhubung (*connected*) jika untuk setiap titik u dan v di G terhubung (Chartrand dan Lesniak, 1986:28).

Definisi 9. Gabungan (*union*)
Gabungan (*union*) dari G_1 dan G_2, ditulis $G = G_1 \cup G_2$, adalah graf dengan $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$ dan $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2)$. Jika graf G merupakan gabungan dari sebanyak n graf H, $n \geq 2$, maka ditulis $G = nH$ (Abdussakir, 2009:33).

Definisi 10. Penjumlahan (*join*)
Penjumlahan (*join*) dari G_1 dan G_2, ditulis $G = G_1 + G_2$, adalah graf dengan $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$ dan $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{uv | u \in V(G_1)$ dan $v \in V(G_2)\}$ (Abdussakir, 2009:33).

Definisi 11. Graf Bintang
Graf bipartisi komplit $K_{1,n}$ disebut graf bintang (*star*) dan dinotasikan dengan S_n. Jadi, S_n mempunyai order $(n+1)$ dan ukuran n (Abdussakir, 2009:21-22).

Definisi 12. Graf Roda
Graf roda (W_n) adalah graf yang memuat satu sikel yang setiap titik pada sikel terhubung langsung dengan titik pusat. Graf roda W_n diperoleh dengan operasi penjumlahan graf sikel C_n dengan graf komplit K_1. Jadi, $W_n = C_n + K_1, n > 2$ (Chartrand dan Lesniak, 1996:8).

Penutup pada Graf

Definisi 10. Titik Penutup
Titik penutup dari graf G adalah $A \subseteq V(G)$ sedemikian sehingga semua titik di A menutup semua sisi di G, artinya setiap sisi dari G adalah terhubung langsung untuk setidaknya salah satu di titik A (Bondy dan Murty, 2008:420). Titik penutup minimal dari graf G dinotasikan $\alpha(G)$ adalah bilangan kardinal terkecil dari himpunan titik penutup yang paling sedikit.

Definisi 11. Sisi Penutup
Sisi penutup dari graf G adalah $A \subseteq V(G)$ sedemikian hingga semua sisi di A menutup semua titik di G, artinya adalah setiap titik di G berinsiden dengan setidaknya satu sisi di A (Bondy dan Murty, 2008:420). Sisi penutup minimal dari graf G dinotasikan $\alpha_1(G)$ adalah bilangan kardinal terkecil dari himpunan sisi penutup yang paling sedikit.

Titik dan Sisi Penutup Minimal pada Graf Lintasan

Titik penutup minimal dari graf lintasan P_n $(n \geq 2)$ adalah:

$$\alpha(P_n) := \begin{cases} \frac{1}{2}n; untuk\ n\ genap \\ \frac{1}{2}(n-1);\ untuk\ \ n\ ganjil \end{cases}$$

Sisi penutup minimal dari graf lintasan P_n $(n \geq 2)$ adalah:

$$\alpha_1(P_n) := \begin{cases} \frac{1}{2}n; untuk\ n\ genap \\ \frac{1}{2}(n+1);\ untuk\ \ n\ ganjil \end{cases}$$

Titik dan Sisi Penutup Minimal pada Graf Sikel

Titik penutup minimal dari graf sikel C_n $(n \geq 3)$ adalah:

$$\alpha(P_n) := \begin{cases} \frac{1}{2}n; untuk\ n\ genap \\ \frac{1}{2}(n+1);\ untuk\ \ n\ ganjil \end{cases}$$

Sisi penutup minimal dari graf sikel C_n $(n \geq 3)$ adalah:

$$\alpha_1(P_n) := \begin{cases} \frac{1}{2}n; untuk\ n\ genap \\ \frac{1}{2}(n+1);\ untuk\ \ n\ ganjil \end{cases}$$

PEMBAHASAN

Suatu titik dan sisi dikatakan saling penutup pada graf G jika titik dan sisi tersebut inciden di G. Titik penutup di G merupakan himpunan dari titik-titik yang menutup semua sisi di G dan sisi penutup pada graf G (tanpa titik terisolasi) merupakan himpunan sisi-sisi yang menutup semua titik di G. Di katakan minimal karena banyaknya anggota paling sedikit atau himpunan penutup yang kardinalnya terkecil.

Titik dan Sisi Penutup pada Graf Bintang S_n dan $(m)_c S_n^1$
Perhatikan tabel di bawah ini:

Tabel 1. Titik dan Sisi Penutup Minimal pada Graf Bintang $(m)_c\ S_n^1$

Simpul	$\alpha(S_n)$	$\alpha_1(S_n)$	$\alpha((m)_c\ S_n^1)$	$\alpha_1((m)_c\ S_n^1)$
S_3	1	3	$1\ x\ m$	$3\ x\ m$
S_4	1	4	$1\ x\ m$	$4\ x\ m$
S_5	1	5	$1\ x\ m$	$5\ x\ m$
S_6	1	6	$1\ x\ m$	$6\ x\ m$
S_7	1	7	$1\ x\ m$	$7\ x\ m$
S_8	1	8	$1\ x\ m$	$8\ x\ m$
S_9	1	9	$1\ x\ m$	$9\ x\ m$
S_{10} .. S_n	1 .. 1	10 .. n	$1\ x\ m$ .. m	$10\ x\ m$ .. $n\ x\ m$

Berdasarkan Tabel 1 maka diperoleh lemma berikut:

Lemma 1:
Titik penutup minimal pada graf bintang S_n adalah 1.
Bukti:
Misal titik pusat adalah v_0. Karena semua sisi e_i insidensi dengan v_0 sehingga v_0 menutup semua sisi di S_n, atau v_0 berinsiden dengan e_i $(i = 1, 2, \dots, n)$ maka v_0 adalah satu-satunya titik yang menutup semua sisi. Jadi titik penutup minimal graf bintang (S_n) adalah 1.

Lemma 2:
Sisi penutup minimal pada graf bintang S_n adalah n.
Bukti:
Misal $V(S_n) = \{v_0, v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$. Titik $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$ tidak terhubung langsung tetapi titik $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$ terhubung langsung dengan v_0 sehingga sisi (v_i, v_0) menutup titik $v_i\ dan\ v_0$ $(i = 1, 2, \dots, n)$. Maka sisi penutup minimal pada graf bintang S_n terbukti sebanyak n.

Lemma 3;
Titik penutup minimal pada graf bintang $(m)_c\, S_n^1$ adalah m.
Bukti:
Pada graf $(m)_c\, S_n^1$ masing-masing titik pusat yang berurutan adalah terhubung langsung, yaitu (v_0^i, v_0^{i+1}). Dari lemma 1 titik penutup minimal S_n^1 adalah 1. Sehingga diperoleh titik penutup minimal pada graf bintang $(m)_c\, S_n^1$ adalah m.

Lemma 4
Sisi penutup minimal pada graf bintang $(m)_c\, S_n^1$ adalah $m\ x\ n$.
Bukti:
Pada graf $(m)_c\, S_n^1$ masing-masing titik pusat yang berurutan adalah terhubung langsung, yaitu (v_0^i, v_0^{i+1}). Berdasarkan lemma 2, sisi penutup minimal pada graf bintang S_n adalah n. Sehingga diperoleh sisi penutup minimal pada graf bintang $(m)_c\, S_n^1$ adalah $m\ x\ n$.

Titik dan Sisi Penutup pada Graf Bintang $(m)_c\, S_n^k$

Lemma 5
Titik penutup minimal pada graf bintang $(m)_c\, S_n^k$ adalah:

$$\alpha((m)_c S_n^k) := \begin{cases} m\left(\frac{1}{2}kn + 1\right) ;\textit{untuk k genap} \\ m\left(\frac{1}{2}n(k+1) + 1\right);\ \textit{untuk}\ \ \textit{k ganjil} \end{cases}$$

Berlaku untuk $n \in N, n \geq 3$.
Bukti:
1. Untuk k genap
Ambil v_0 sebagai titik penutup. Maka anting graf S_n^k berupa lintasan P_{k+1}, dengan $(k+1)$ bilangan ganjil. Jadi $\alpha(P_{k+1}) = \frac{1}{2}k$. Karena terdapat sebanyak n anting maka diperoleh $\alpha(S_n^k) = 1 + \frac{1}{2}k(n) = \frac{1}{2}nk + 1$.

2. Untuk k ganjil
Ambil v_0 sebagai titik penutup. Maka anting graf S_n^k berupa lintasan P_{k+1}, dengan $(k+1)$ bilangan genap. Jadi $\alpha(P_{k+1}) = \frac{1}{2}(k+1)$. Karena terdapat sebanyak n anting maka diperoleh $\alpha(S_n^k) = \frac{1}{2}n(k+1) + 1$.

Dari 1 dan 2, karena $(m)_c\, S_n^k$ terdiri dari $m\, S_n^k$ yang titik pusat berurutan dihubungkan langsung maka titik penutup minimal pada graf bintang $(m)_c\, S_n^k$ ditunjukkan pada gambar 4 sehingga:

$$\alpha((m)_c\, S_n^k) := \begin{cases} m\left(\frac{1}{2}kn + 1\right) ;\textit{untuk k genap} \\ m\left(\frac{1}{2}n(k+1) + 1\right);\ \textit{untuk}\ \ \textit{k ganjil} \end{cases}$$

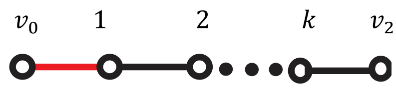
Berlaku untuk $n \in N, n \geq 3$.

Lemma 6
Sisi penutup minimal pada graf bintang $(m)_c\, S_n^k$ adalah:

$$\alpha_1((m)_c\, S_n^k) := \begin{cases} m\left(n\left(\frac{1}{2}k + 1\right)\right) ;\textit{untuk k genap} \\ m\left(\frac{1}{2}n(k+1) + 1\right);\ \textit{untuk}\ \ \textit{k ganjil} \end{cases}$$

Berlaku untuk $n \in N, n \geq 3$.

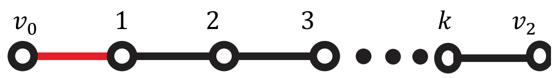
Bukti:
1. Untuk k genap
Pada graf S_n^k pandang lintasan 1 anting berikut:



Gambar 9. Lintasan P_{k+2}

Graf ini berupa P_{k+2} dengan $(k+2)$ adalah genap, sehingga $\alpha_1(P_{k+2}) = \frac{1}{2}(k+2) = \frac{1}{2}k + 1$. Dengan mengambil (v_0, k_1) sebagai sisi penutup. Anting lainnya berupa P_{k+1} dengan $(k+1)$ adalah ganjil maka $\alpha_1(P_{k+1}) = \frac{1}{2}\left((k+1)+1\right) = \frac{1}{2}k + 1$. Karena lintasan P_{k+1} sebanyak $(n-1)$ lintasan maka sisi penutup minimalnya $\left(\frac{1}{2}k + 1\right)(n-1)$. Sehingga diperoleh $\alpha_1(S_n^k) = \left(\frac{1}{2}k + 1\right) + \left(\frac{1}{2}k + 1\right)(n-1) = \left(\frac{1}{2}k + 1\right)n$.

2. Untuk k ganjil
Pada graf S_n^k pandang lintasan 1 anting berikut:



Gambar 10. Lintasan P_{k+2}

Graf ini berupa P_{k+2} dengan $(k+1)$ adalah ganjil, maka $\alpha_1(P_{k+1}) = \frac{1}{2}\left((2+1)+1\right) = \frac{1}{2}(k+3) = \frac{1}{2}(k+1) + 1$. Dengan mengambil (v_0, k_1) sebagai

sisi penutup. Anting lainnya berupa P_{k+1} dengan $(k+1)$ genap maka $\alpha_1(P_k)=\frac{1}{2}(k+1)$. Karena lintasan P_k sebanyak $(n-1)$ lintasan maka sisi penutup minimalnya $\left(\frac{1}{2}(k+1)\right)(n-1)$. Sehingga diperoleh $\alpha_1(S_n^k)=\frac{1}{2}(k+1)+1+\left(\frac{1}{2}k+1\right)(n-1)=\frac{1}{2}n(k+1)+1$.
Dari 1 dan 2, karena $(m)_c\, S_n^k$ terdiri dari $m\, S_n^k$ yang titik pusat berurutan dihubungkan langsung maka titik penutup minimal pada graf bintang $(m)_c\, S_n^k$ ditunjukkan pada gambar 4 sehingga:

$$\alpha_1((m)_c\, S_n^k) \coloneqq \begin{cases} m\left(n\left(\frac{1}{2}k+1\right)\right) ; untuk\ k\ genap \\ m\left(\frac{1}{2}n(k+1)+1\right);\ untuk\ \ k\ ganjil \end{cases}$$

Berlaku untuk $n \in N, n \geq 3$.

Titik dan Sisi Penutup pada Graf Roda W_n dan $(m)_c\, W_n^1$

Perhatikan tabel di bawah ini:

Tabel 2. Titik dan Sisi Penutup Minimal pada Graf Roda $(m)_c\, W_n^1$

Simpul	$\alpha(W_n)$	$\alpha_1(W_n)$	$\alpha((m)_c\, W_n^1)$	$\alpha_1((m)_c\, W_n^1)$
W_3	3	2	$3\, x\, m$	$2\, x\, m$
W_4	3	3	$3\, x\, m$	$3\, x\, m$
W_5	4	3	$4\, x\, m$	$3\, x\, m$
W_6	4	4	$4\, x\, m$	$4\, x\, m$
W_7	5	4	$5\, x\, m$	$4\, x\, m$
W_8	5	5	$5\, x\, m$	$5\, x\, m$
W_9	6	5	$6\, x\, m$	$5\, x\, m$
W_{10}	6	6	$6\, x\, m$	$6\, x\, m$

Berdasarkan Tabel 2 maka diperoleh lemma berikut:

Lemma 9

Titik penutup minimal pada graf roda W_n adalah

$$\alpha(W_n) \coloneqq \begin{cases} \frac{1}{2}n+1 ; untuk\ n\ genap \\ \frac{1}{2}(n+1)+1;\ untuk\ \ n\ ganjil \end{cases}$$

Bukti:

Misal v_0 titik pusat pada W_n dan $(v_1, v_2, v_3, \dots, v_n)$ adalah titik pada sikel luar. Karena v_0 akan menutup semua sisi di selain sikel luar dan

$$\alpha(C_n) \coloneqq \begin{cases} \frac{1}{2}n ; untuk\ n\ genap \\ \frac{1}{2}(n+1);\ untuk\ \ n\ ganjil \end{cases}$$

Maka diperoleh:

$$\alpha(W_n) \coloneqq \begin{cases} \frac{1}{2}n+1 ; untuk\ n\ genap \\ \frac{1}{2}(n+1)+1;\ untuk\ \ n\ ganjil \end{cases}$$

Lemma 10:

Sisi penutup minimal pada graf roda W_n adalah

$$\alpha_1(W_n) \coloneqq \begin{cases} \frac{1}{2}n+1 ; untuk\ n\ genap \\ \frac{1}{2}(n+1);\ untuk\ \ n\ ganjil \end{cases}$$

Bukti:

Misal v_0 titik pusat pada W_n dan $(v_1, v_2, v_3, \dots, v_n)$ adalah titik pada sikel luar. Ambil (v_0, v_1) sebagai sisi penutup, maka pada $C_n: v_1, v_2, v_3, \dots, v_n, v_1$ titik v_1 sudah tertutup oleh (v_0, v_1). $\alpha_1(C_n) \coloneqq \frac{1}{2}n$, untuk n genap dan tidak terpengaruh oleh tertutupnya v_1. $\alpha_1(C_n) \coloneqq \frac{1}{2}(n+1)$, untuk n ganjil dan terpengaruh oleh tertutupnya v_1, sehingga harus dikurangi 1. Maka diperoleh:

$$\alpha_1(W_n) \coloneqq \begin{cases} \frac{1}{2}n+1 ; untuk\ n\ genap \\ \frac{1}{2}(n+1);\ untuk\ \ n\ ganjil \end{cases}$$

Lemma 11:

Titik penutup minimal pada graf roda $(m)_c\, W_n^1$ adalah:

$$\alpha((m)_c\, W_n^1) \coloneqq \begin{cases} m\left(\frac{1}{2}n+1\right) ; untuk\ n\ genap \\ m\left(\frac{1}{2}(n+1)+1\right);\ untuk\ \ n\ ganjil \end{cases}$$

Bukti:

Pada graf $(m)_c\, W_n^1$ masing-masing titik pusat yang berurutan adalah terhubung langsung, yaitu (v_0^i, v_0^{i+1}). Berdasarkan lemma 9, titik penutup minimal pada graf roda W_n adalah adalah $\frac{1}{2}n+1$; untuk n genap dan $\frac{1}{2}(n+1)+1$; untuk n ganjil. Sehingga diperoleh titik penutup minimal pada graf roda$(m)_c\, W_n^1$ adalah:

$$\alpha((m)_c\, W_n^1) \coloneqq \begin{cases} m\left(\frac{1}{2}n+1\right) ; untuk\ n\ genap \\ m\left(\frac{1}{2}(n+1)+1\right);\ untuk\ \ n\ ganjil \end{cases}$$

Lemma 12:

Sisi penutup minimal pada graf roda $(m)_c W_n^1$ adalah:

$$\alpha_1((m)_c\, W_n^1) \coloneqq \begin{cases} m\left(\frac{1}{2}n+1\right) ; untuk\ n\ genap \\ m\left(\frac{1}{2}(n+1)\right);\ untuk\ \ n\ ganjil \end{cases}$$

Bukti:

Pada graf $(m)_c\, W_n^1$ masing-masing titik pusat yang berurutan adalah terhubung langsung, yaitu (v_0^i, v_0^{i+1}). Berdasarkan lemma 10, sisi penutup minimal pada graf roda W_n adalah adalah $\frac{1}{2}n+1$; untuk n genap dan $\frac{1}{2}(n+1)$; untuk n ganjil. Sehingga diperoleh sisi penutup minimal pada graf roda$(m)_c\, W_n^1$ adalah:

$$\alpha_1((m)_c\, W_n^1) \coloneqq \begin{cases} m\left(\frac{1}{2}n+1\right) ; untuk\ n\ genap \\ m\left(\frac{1}{2}(n+1)\right);\ untuk\ \ n\ ganjil \end{cases}$$

Titik dan Sisi Penutup pada Graf Roda $(m)_c\, W_n^k$

Lemma 13:

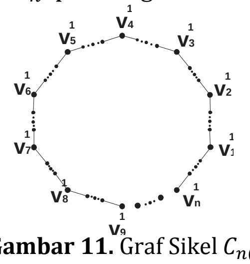
Titik penutup minimal pada graf roda $(m)_c\, W_n^k$ adalah:

$$\alpha((m)_c\, W_n^k) := \begin{cases} m\left(\frac{1}{2}(2kn+n+2)\right); n\ genap\ dan\ k\ genap \\ m\left(\frac{1}{2}(2kn+n+3)\right); n\ ganjil\ dan\ k\ genap \\ m(nk+1));\ untuk\ \ k\ ganjil, n \in N, n \geq 3 \end{cases}$$

Bukti:

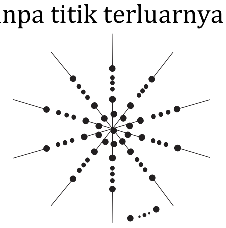
1. **Untuk k genap**

   Pada graf W_n^k pandang sikel luarnya:



Gambar 11. Graf Sikel $C_{n(k+1)}$

Graf tersebut berupa $C_{n(k+1)}$. Jika n ganjil maka $n(k+1)$ adalah ganjil, dan jika $n$genap maka $n(k+1)$ adalah genap. Sehingga $\alpha\left(C_{n(k+1)}\right) = \frac{1}{2}\left(n(k+1)+1\right)$ untuk n ganjil dan $\alpha\left(C_{n(k+1)}\right) = \frac{1}{2}\left(n(k+1)\right)$ untuk n genap. Selanjutnya pandang graf bintang tanpa titik terluarnya:



Gambar 12. Graf Bintang S_n^{k-1}

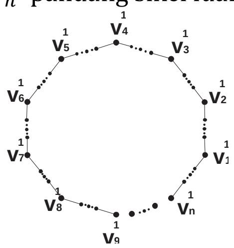
Graf S_n^k tanpa titik terluar ini sama dengan graf S_n^{k-1}. Karena k genap maka $k-1$ ganjil. Sesuai bukti lemma 5, diperoleh:

$\alpha(S_n^{k-1}) := \frac{1}{2}n\left((k-1)+1\right)+1 = \frac{1}{2}nk+1$ Jadi,

$$\alpha(W_n^k) := \begin{cases} \frac{1}{2}\left(n(k+1)\right)+\frac{1}{2}nk+1 \\ = \frac{1}{2}(2kn+n+2);\ \text{untuk } n \text{ genap} \\ \frac{1}{2}(n(k+1)+1)+\frac{1}{2}nk+1 \\ = \frac{1}{2}(2kn+n+3);\ \text{untuk } n \text{ ganjil} \end{cases}$$

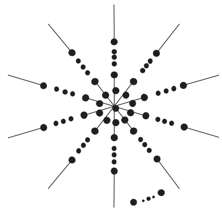
2. **Untuk k ganjil**

   Pada graf W_n^k pandang sikel luarnya:



Gambar 13. Graf Sikel $C_{n(k+1)}$

Graf tersebut berupa $C_{n(k+1)}$. Karena k ganjil maka $(k+1)$ genap, sehingga $n(k+1)$ selalu genap. Jadi$\alpha\left(C_{n(k+1)}\right) = \frac{1}{2}\left(n(k+1)\right)$. Selanjutnya pandang graf bintang tanpa titik terluarnya:



Gambar 14. Graf Bintang S_n^{k-1}

Graf S_n^k tanpa titik terluar ini sama dengan graf S_n^{k-1}. Karena k ganjil maka $k-1$ genap. Sesuai bukti lemma 5, maka:

$\alpha(S_n^{k-1}) := \frac{1}{2}n(k-1)+1$ Jadi diperoleh,

$$\alpha(W_n^k) := \frac{1}{2}\left(n(k+1)\right)+\frac{1}{2}n(k-1)+1$$
$$= \frac{1}{2}(2nk+2) = nk+1$$

Dari 1 dan 2, karena $(m)_c\, W_n^k$ terdiri dari $m\, W_n^k$ yang titik pusat berurutan dihubungkan langsung maka titik penutup minimal pada graf roda $(m)_c\, W_n^k$ ditunjukkan pada gambar 8 sehingga:

$$\alpha((m)_c\, W_n^k) := \begin{cases} m\left(\frac{1}{2}(2kn+n+2)\right); n\ genap\ dan\ k\ genap \\ m\left(\frac{1}{2}(2kn+n+3)\right); n\ ganjil\ dan\ k\ genap \\ m(nk+1));\ untuk\ \ k\ ganjil, n \in N, n \geq 3 \end{cases}$$

Lemma 14:

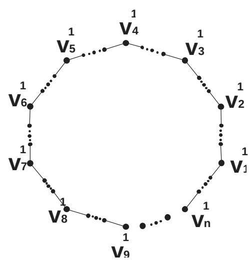
Sisi penutup minimal pada graf roda $(m)_c\, W_n^k$ adalah:

$$\alpha_1((m)_c\, W_n^k) := \begin{cases} m\left(\frac{1}{2}(2kn+n+2)\right); n\ genap\ dan\ k\ genap \\ m\left(\frac{1}{2}(2kn+n+3)\right); n\ ganjil\ dan\ k\ genap \\ m(n(k+1));\ untuk\ \ k\ ganjil, n \in N, n \geq 3 \end{cases}$$

Bukti:

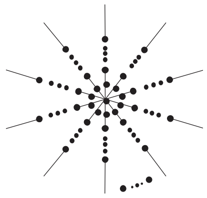
1. **Untuk k genap**

   Pada graf W_n^k pandang sikel luarnya:



Gambar 15. Graf Sikel $C_{n(k+1)}$

Graf tersebut berupa $C_{n(k+1)}$. Jika n ganjil maka $n(k+1)$ adalah ganjil, dan jika $n$genap maka $n(k+1)$ adalah genap. Sehingga $\alpha\left(C_{n(k+1)}\right) = \frac{1}{2}(n(k+1)+1)$ untuk n ganjil dan $\alpha\left(C_{n(k+1)}\right) = \frac{1}{2}\left(n(k+1)\right)$ untuk n genap. Selanjutnya pandang graf bintang tanpa titik terluarnya:



Gambar 16. Graf Bintang S_n^{k-1}

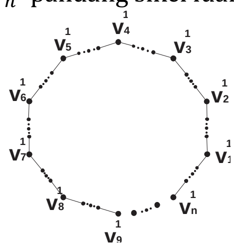
Graf S_n^k tanpa titik terluar ini sama dengan graf S_n^{k-1}. Karena k genap maka $k-1$ ganjil. Sesuai bukti lemma 6, diperoleh:

$\alpha_1(S_n^{k-1}) := \frac{1}{2}n\big((k-1)+1\big)+1 = \frac{1}{2}nk+1$ Jadi,

$$\alpha_1(W_n^k) := \begin{cases} \frac{1}{2}\big(n(k+1)\big)+\frac{1}{2}nk+1 \\ = \frac{1}{2}(2kn+n+2);\text{ untuk } n \text{ genap} \\ \frac{1}{2}(n(k+1)+1)+\frac{1}{2}nk+1 \\ = \frac{1}{2}(2kn+n+3);\text{ untuk } n \text{ ganjil} \end{cases}$$

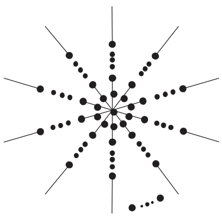
2. Untuk *k* ganjil

Pada graf W_n^k pandang sikel luarnya:



Gambar 17. Graf Sikel $C_{n(k+1)}$

Graf tersebut berupa $C_{n(k+1)}$. Karena k ganjil maka $(k+1)$ genap, sehingga $n(k+1)$ selalu genap. Jadiá$\big(C_{n(k+1)}\big) = \frac{1}{2}\big(n(k+1)\big)$. Selanjutnya pandang graf bintang tanpa titik terluarnya:



Gambar 18. Graf Bintang S_n^{k-1}

Graf S_n^k tanpa titik terluar ini sama dengan graf S_n^{k-1}. Karena k ganjil maka $k-1$ genap. Sesuai bukti lemma 6, maka:

$$\alpha_1(S_n^{k-1}) := \frac{1}{2}n((k-1)+1)+1$$

Jadi diperoleh,

$$\alpha_1(W_n^k) := \frac{1}{2}\big(n(k+1)\big)+\frac{1}{2}n((k-1)+1)+1$$
$$= n(k+1);\; n \in N, n \geq 3$$

Dari 1 dan 2, karena $(m)_c\, W_n^k$ terdiri dari $m\, W_n^k$ yang titik pusat berurutan dihubungkan langsung maka sisi penutup minimal pada graf roda $(m)_c\, W_n^k$ ditunjukkan pada gambar 8 sehingga:

$$\boldsymbol{\alpha_1((m)_c\, W_n^k) := \begin{cases} m\left(\frac{1}{2}(2kn+n+2)\right); n \text{ genap dan } k \text{ genap} \\ m\left(\frac{1}{2}(2kn+n+3)\right); n \text{ ganjil dan } k \text{ genap} \\ m(n(k+1));\; k \text{ ganjil}, n \in N, n \geq 3 \end{cases}}$$

PENUTUP

Berdasarkan penelitian yang telah dilaksanakan, dapat disimpulkan bahwa:

1. Graf bintang $(m)_c\, S_n^k$ dengan $n \in N, n \geq 3$. maka rumusan titik dan sisi penutup minimal masing-masing adalah:
   a. $\alpha(S_n) = 1$ dan á$_1(S_n) = n$.
   b. $\alpha((m)_c\, S_n^1) = m$ dan $\alpha_1((m)_c\, S_n^1) = m \; x \; n$.
   c. $\alpha((m)_c\, S_n^k) := \begin{cases} m\left(\frac{1}{2}kn+1\right); \textit{untuk k genap} \\ m\left(\frac{1}{2}n(k+1)+1\right); \textit{untuk k ganjil} \end{cases}$

   $$\alpha_1((m)_c\, S_n^k) := \begin{cases} m\left(n\left(\frac{1}{2}k+1\right)\right); \textit{untuk k genap} \\ m\left(\frac{1}{2}n(k+1)+1\right); \textit{untuk k ganjil} \end{cases}$$

2. Graf roda $(m)_c W_n^k$ dengan $n \in N, n \geq 3$. maka rumusan titik dan sisi penutup minimal masing-masing adalah:
   a. $\alpha(W_n) := \begin{cases} \frac{1}{2}n+1; \textit{untuk n genap} \\ \frac{1}{2}(n+1)+1; \textit{untuk n ganjil} \end{cases}$

   $$\alpha_1(W_n) := \begin{cases} \frac{1}{2}n+1; \textit{untuk n genap} \\ \frac{1}{2}(n+1); \textit{untuk n ganjil} \end{cases}$$

   b. $\alpha((m)_c W_n^1) := \begin{cases} m\left(\frac{1}{2}n+1\right); \textit{untuk n genap} \\ m\left(\frac{1}{2}(n+1)+1\right); \textit{untuk n ganjil} \end{cases}$

   $$\alpha_1((m)_c W_n^1) := \begin{cases} m\left(\frac{1}{2}n+1\right); \textit{untuk n genap} \\ m\left(\frac{1}{2}(n+1)\right); \textit{untuk n ganjil} \end{cases}$$

   c. $\alpha((m)_c W_n^k) := \begin{cases} m\left(\frac{1}{2}(2kn+n+2)\right); n \textit{ genap}, k \textit{ genap} \\ m\left(\frac{1}{2}(2kn+n+3)\right); n \textit{ ganjil}, k \textit{ genap} \end{cases}$

   $$\alpha_1((m)_c W_n^k) := \begin{cases} m\left(\frac{1}{2}(2kn+n+2)\right); n \textit{ genap}, k \textit{ genap} \\ m\left(\frac{1}{2}(2kn+n+3)\right); n \textit{ ganjil}, k \textit{ genap} \end{cases}$$

   $\alpha((m)_c W_n^k) := \{m(nk+1)$ dan $\alpha_1((m)_c\, W_n^k) := \{m\big(n(k+1)\big);\; k$ ganjil dan $n \in N, n \geq 3$

DAFTAR PUSTAKA

[1] Abdullah Bin Muhammad.2007. *Tafsir Ibnu Katsir Jilid 6*. Bogor: Pustaka Imam Asy-Syafii

[2] Abdussakir, dkk. 2009. *Teori Graf*. Malang: UIN Press

[3] Al-Maragi, Ahmad Musthafa.1992. *Tafsir Al-Maraghi Juz 18 dan 22* . Semarang:Toha Putra

[4] Al-Qurthubi, Syaikh Imam. 2009. Tafsir Al-Qurthubi. Penj. Fathurrahman Abdul Hamid dkk. Jakarta: Pustaka Azzam

[5] Balakrishnan.V.K. 1995. *Schaum's Outline of Theory and Problems of Combinatorics.* New York: Mc Graw Hill. Inc

[6] Chatrand, Gery and Lesniak, Linda. 1986. *Graphs and Digraphs Second Edition*. California: a Division of Wadsworth.Inc.

[7] Gallian, J. A. 2007. "A Dynamic Survey of GraphLabeling.(Online:http//www.Combinatorics.org/Surveys/dr6.pdf). Diakses 11 Oktober 2011

[8] Purwanto. 1998. *Teori Graph*. Malang: IKIP MALANG

[9] Rosen, Kenneth H. 2003. *Discrete Mathemathics ang Its Application*: Fifth Edition. Singapore: Mc. Graw-Hill

[10] Wilson, Robin J dan Watkins. 1990. *Graph and Introductory Approach*. Singapore: Open Universitycourse.